*И. Г. Любич*[1], *Д. С. Романов*[2]

# О ЕДИНИЧНЫХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ В СХЕМАХ НАД НЕКОТОРЫМИ БАЗИСАМИ*

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, формально зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $S$ — схема из функциональных элементов в некотором базисе $B$, реализующая функцию $f$. Пусть на схему $S$ действует источник неисправностей $O^{inv}$, вызывающий инверсные неисправности на выходах функциональных элементов, т.е. на выходе любого функционального элемента схемы вместо реализуемой на его выходе функции от его входов может реализовываться отрицание этой функции (если на схему действует источник неисправностей, вызывающий инверсную неисправность на выходе не более чем одного функционального элемента, назовем его $O_1^{inv}$).

Обозначим через $W(S)$ ($W'(S)$) множество всех попарно неравных функций, каждая из которых может быть реализована схемой $S$ после поломки элементов, вызванной однократным воздействием на схему источником неисправностей $O_1^{inv}$ ($O^{inv}$). Схема $S$ называется неизбыточной (соответственно тестопригодной) тогда и только тогда, когда для любой функции $g(\widetilde{x}^n) \in W(S)$ (соответственно $g(\widetilde{x}^n) \in W'(S)$) справедливо соотношение $f(\widetilde{x}^n) \neq g(\widetilde{x}^n)$.

**Определение 1.** Множество $T$ наборов значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется проверяющим тестом для схемы $S$ относительно инверсных неисправностей на выходах элементов тогда и только тогда, когда для любой функции неисправности $g(\widetilde{x}^n)$, полученной в результате действия источника неисправностей, такой, что $f(\widetilde{x}^n) \neq g(\widetilde{x}^n)$, найдется набор $\widetilde{\alpha}$ из $T$, для которого выполнено неравенство $f(\widetilde{\alpha}^n) \neq g(\widetilde{\alpha}^n)$.

**Определение 2.** Множество $T$ наборов значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется диагностическим тестом для схемы $S$ относительно инверсных неисправностей на выходах элементов тогда и только тогда, когда для

[1]Асп. факультета ВМК МГУ, e-mail: `lubi4ig@gmail.com`.

[2]Доц. факультета ВМК МГУ, e-mail: `romanov@cs.msu.ru`.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №16-01-00593-а, №18-01-00800-а) и Госбюджетной темы НИР №5.4 ВМК МГУ.

любых функций $g_1(\widetilde{x}^n)$, $g_2(\widetilde{x}^n) \in W(S) \cup \{f(\widetilde{x}^n)\}$, полученных в результате действия источника неисправности, таких, что $g_1(\widetilde{x}^n) \neq g_2(\widetilde{x}^n)$, найдется набор $\widetilde{\alpha}$ из $T$, для которого выполнено неравенство $g_1(\widetilde{\alpha}^n) \neq g_2(\widetilde{\alpha}^n)$.

Тест относительно источника неисправностей $O_1^{inv}$ ($O^{inv}$), одновременно производящего не более одной поломки элемента в схеме (соответственно, производящего в схеме произвольное количество поломок элементов), называется единичным (соответственно полным).

Количество различных наборов в тесте $T$ называется его длиной и обозначается через $l(T)$ или через $|T|$. Тест минимальной длины называется минимальным. Обозначим через $L^{detect}(O_1^{inv}, S)$ длину минимального единичного проверяющего теста относительно инверсных и неисправностей на выходах элементов в схеме $S$, через $L_B^{detect}(O_1^{inv}, f(\widetilde{x}^n))$ — минимум величины $L^{detect}(O_1^{inv}, S)$ по всем неизбыточным, реализующим $f(\widetilde{x}^n)$ схемам $S$ в базисе $B$. Через $L_B^{detect}(O_1^{inv}, n)$ обозначим функцию Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов, т.е. функцию: $L_B^{detect}(O_1^{inv}, n) = \max\limits_{f(\widetilde{x}^n) \in P_2^n} L_B^{detect}(O_1^{inv}, f(\widetilde{x}^n))$.

Аналогично определяются функции Шеннона длины полного проверяющего теста $L^{detect}(O^{inv}, n)$, полного диагностического теста $L^{diagn}(O^{inv}, n)$ и единичного диагностического теста $L^{diagn}(O_1^{inv}, n)$. Для полных тестов перебор идет по всем тестопригодным схемам.

Введем следующие обозначения для базисов: $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$, $B_1 = \{x\&y, x \oplus y, 1\}$, $B_1' = \{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$, $B_1^{\infty} = \{x \oplus y,\ 1\} \cup \bigcup\limits_{i \geq 2} \{x_1 x_2 \ldots x_i\}$.

Приведем результаты, в которых оценивались функции Шеннона длины теста относительно инверсных неисправностей на выходах функциональных элементов в СФЭ (оценки справедливы при всех натуральных $n$).

Н. П. Редькиным в [1] было доказано, что в стандартном базисе $B_0$ функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов не превосходит 2.

С. В. Коваценко установлено, что в случае $B = \{x\&y, x \oplus y, 1\}$ функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов равна 1. В той же работе для того же класса схем и такого же источника неисправностей получена верхняя оценка $n+1$ для функции Шеннона длины единичного диагностического теста. А для функции Шеннона длины полного диагностического теста установлена верхняя оценка $2^{n-2}$[2].

Для произвольного полного конечного базиса $B$ Н. П. Редькиным [5] установлено: $L_B^{detect}(O_1^{inv}, n) \leq 3$.

Д. С. Романовым (работа [9] написана в соавторстве с

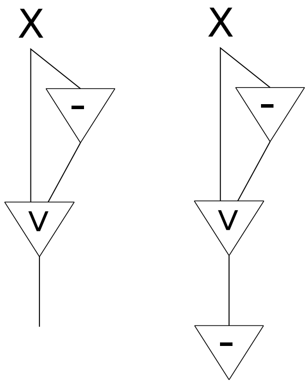


Рис. 1.
Константы 0 и 1.

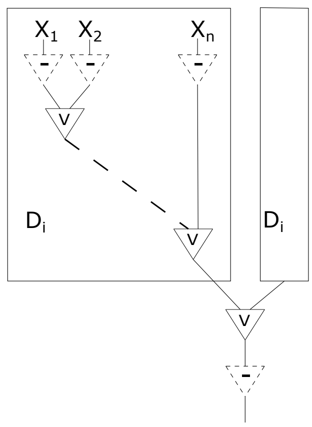


Рис. 2.
Схема для функций, в векторе значений которых либо один 0, либо одна 1.

Е. Ю. Романовой) получены следующие результаты.

1. Существует конечный полный базис $\hat{B}$, в котором $L_{\hat{B}}^{detect}(O^{inv}, n) \leq 4$ [8].

2. $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 1$ [4].

3. $L_{\mathscr{B}_0}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 2$ [3].

4. В работе [9] доказано, что для любой булевой функции существует неизбыточная схема в базисе $B_1^{\infty}$, допускающая полный диагностический тест длины 1 относительно $O^{inv}$.

К. А. Попковым в работах [6, 7] доказано, что для любой булевой функции существует неизбыточная схема в базисе $B_1'$, допускающая полный диагностический тест длины 2 относительно $O^{inv}$.

**Теорема 1.** *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$ имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.*

**Доказательство.** Если функция $f$ есть константа 0 или 1, то реализуем ее следующими схемами (рис. 1).

При наличии неисправности в первой схеме могут получиться две функции неисправности: тождественная функция и константа 0, при наличии неисправности во второй схеме — отрицание или константа 1. Множество из двух наборов $\{(0), (1)\}$ является диагностическим тестом.

Пусть функция $f$ всюду равна 1, за исключением одного набора $\widetilde{\alpha}_i$ ($f(\widetilde{\alpha}_i) = 0$). Построим две одинаковые цепочки $D_i$, соответствующие элементрарной дизъюнкции $x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}$. Выходы получившихся цепочек подадим на вход еще одного элемента дизъюнкции. Если в одном из блоков $D_i$ произойдет неисправность какого-нибудь элемента, то на наборе $\widetilde{\alpha}_i$ на выходе неисправного блока будет 1, а на любом другом наборе 1

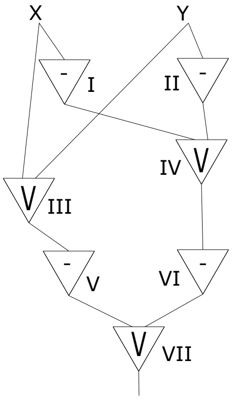


Рис. 3.
Эквивалентность.

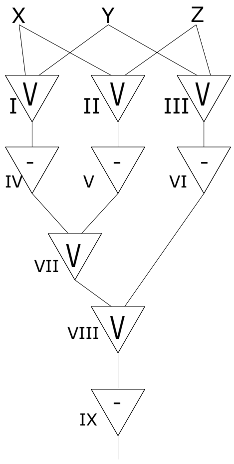


Рис. 4.
Медиана.

будет на выходе исправного блока, и схема всегда будет реализовывать константу 1. Пусть сломался последняя дизъюнкция, то на выходе схемы будет функция $\overline{f}$. Двух наборов достаточно, чтобы диагностировать неисправность (рис. 2). Так же реализуем функцию, которая всюду равна 0, за исключением одного набора (1 стоит на $i$-ой позиции). Сначала построим инверсную к ней функцию с одним 0 (как мы сделали выше), а потом подадим выход полученной схемы на инвертор. Двух наборов достаточно, чтобы диагностировать неисправность.

Пусть теперь функция $f$ отлична от уже рассмотренных. Для доказательства теоремы нам потребуются схемы, реализующие функции эквивалентность и медиана (рис. 3, 4).

При возникновении неисправности в каком-нибудь одном элементе схемы, реализующей эквивалентность, может получиться одна из следующих четырех функций неисправности: $\bar{x}$, $\bar{y}$, $x \vee y$, $x \oplus y$. Заметим, что каждое из множеств $\{(0,0),(1,1)\}$, $\{(0,1),(1,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$ является проверяющим тестом для этой схемы.

Если подавать на входы медианы одну и ту же функцию $f$, то на выходе будет 0, если произошла неисправность в одном из элементов I-VII, и $\overline{f}$, если произошла неисправность в одном из элементов VIII, IX (рис. 4).

В работе Редькина [1] в базисе $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$ для каждой функции строится схема $\hat{S}$, имеющая в качестве проверяющего теста набор $\{(0,\ldots,0)\}$. Добавим еще один набор $\widetilde{\sigma}$ так, чтобы функция принимала на этом наборе другое значение.

Построим финальную схему в соответствии с рис. 5:

Каждый блок $F$ реализует функцию $f$ схемой $\hat{S}$, допускающей единичный проверяющий тест длины 1.

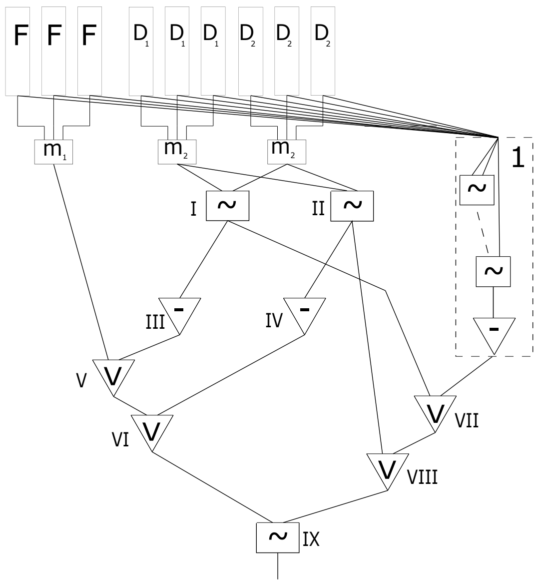


Рис. 5.

Финальная схема.

$D_1$ состоит из цепочки $n$ дизъюнкторов, на левый и правый вход первого дизъюнктора поданы $x_1$ и $x_2$, на левый вход следующих подан выход предыдущего дизъюнктора, а на правый $x_i$. $D_1$ принимает значение 0, если на вход поданы все нули, и 1 в противном случае.

Цепочка $D_2$ получается аналогично, за тем исключением, что переменные $x_i$, у которых в наборе $\widetilde{\sigma}$ стоит 1, сначала подаются на элементы отрицания. $D_2$ принимает значение 0, если на вход подан набор $\widetilde{\sigma}$, и 1 в противном случае.

Блок 1 состоит из последовательности восьми подсхем, реализующих эквивалентность (назовем из "эквивалентность 1" — "эквивалентность 8"), и одного элемента отрицания (рис. 3). На вход первой подсхемы подаются выходы двух блоков $F$. На левый вход следующих подсхем подается выход предыдущей подсхемы, а на правый — выход следующего по порядку блока. Если функция принимает на нулевом наборе значение 0, то после третьего блока $F$ подаются выходы блоков $D_1$, затем выходы блоков $D_2$. Если функция принимает на нулевом наборе значение 1, то после третьего блока $F$ подаются выходы блоков $D_2$, а затем выходы блоков $D_1$.

При правильной работе схемы на выходе получаем:

$$(f \vee (D_1 \oplus D_2)) \sim \Big((D_1 \sim D_2) \vee \overline{(f \sim D_1 \sim D_2)}\Big) = f.$$

Найдем все возможные функции неисправности, которые могут получиться при наличии неисправности в одной из элементов схемы:

1. Пусть сломался один элемент в одном из блоков $F$. Так как нулевой набор является проверяющим тестом для каждого блока $F$, на том блоке, в котором произошла ошибка, на этом наборе на выходе будет $\overline{f}$. Выход этого блока идет на вход медианы и на цепочку 1. Так как другие два

входа медианы получили правильные значения функции $f$, на левый вход последнего элемента IX поступит то же значение, что и при правильной работе (на нулевом наборе это 1). В цепочке 1 эта ошибка приведет к инвертированию значения на выходе цепочки, и на правый вход IX пройдет $\overline{f(\widetilde{0})}$. На наборе $\widetilde{\sigma}$ на выходе всей схемы может получиться любое значение. А на любом другом наборе на правый вход элемента IX поступит 1 и на выходе схемы будет правильное значение $f$.

2. Пусть сломался элемент в одном из блоков $D_1$. На нулевом наборе один из блоков $D_1$ больше не будет выдавать 0. И, как в предыдущем случае, это приведет к тому, что на выходе схемы будет реализовано $\overline{f(\widetilde{0})}$. На наборе $\widetilde{\sigma}$ на выходе всей схемы может получиться любое значение. А на любом другом наборе на правый вход элемента IX поступит 1 и на выходе схемы будет правильное значение $f$.

3. Пусть сломался элемент в одном из блоков $D_2$. На нулевом наборе на выходе всей схемы может получиться любое значение. На наборе $\widetilde{\sigma}$ один из блоков $D_2$ больше не будет выдавать 0. И, как в предыдущем случае, это приведет к тому, что на выходе схемы будет реализовано $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$. А на любом другом наборе на правый вход элемента IX придет 1 и на выходе схемы будет правильное значение $f$.

4. Пусть сломался элемент в блоке 1. Предположим сначала, что на нулевом наборе функция принимает значение 0.

Пусть сломался какой-нибудь элемент в блоке "эквивалентность 1 подадим на вход схемы наборы $\widetilde{0}, \widetilde{\sigma}$. На вход блока "эквивалентность 1" поступят наборы $\{(0,0),(1,1)\}$ соответственно. Как было показано выше, эти наборы являются для него проверяющем тестом, т.е. на одном из двух наборах на выходе будет инвертированное значение, которое "дойдет" до самого конца схемы, подобно случаю 1. На втором наборе на выходе схемы может получится любое значение. А на любом другом наборе на правый вход элемента IX поступит 1 и на выходе схемы будет правильное значение $f$.

Аналогично получается, если неиспраность происходит в других подсхемах:

На вход блока "эквивалентность 2" придут наборы $\{(1,0),(1,1)\}$ соответственно (так как на левом входе 1, а на правом $f$).

На вход блока "эквивалентность 3" придут наборы $\{(0,0),(1,1)\}$ соответственно (так как на левом входе $f$, а на правом $D_1$).

На вход блока "эквивалентность 4" придут наборы $\{(1,0),(1,1)\}$ соответственно (так как на левом входе $f \sim D_1$, а на правом $D_1$).

На вход блока "эквивалентность 5" придут наборы $\{(0,0),(1,1)\}$ соответственно (так как на левом входе $f$, а на правом $D_1$).

На вход блока "эквивалентность 6" придут наборы $\{(1,1),(1,0)\}$

соответственно (так как на левом входе $f \sim D_1$, а на правом $D_2$).

На вход блока "эквивалентность 7" придут наборы $\{(1,1),(0,0)\}$ соответственно (так как на левом входе $f \sim D_1 \sim D_2$, а на правом $D_2$).

На вход блока "эквивалентность 8" придут наборы $\{(1,1),(1,0)\}$ соответственно (так как на левом входе $f \sim D_1$, а на правом $D_2$).

Каждый из этих наборов является для схемы "эквивалентность" проверяющим тестом, т.е. на одном из двух наборах на выходе будет инвертированное значение, которое "дойдет" до самого конца схемы. На втором наборе на выходе схемы может получится любое значение. А на любом другом наборе на правый вход элемента IX придет 1 и на выходе схемы будет правильное значение $f$.

Наконец, Пусть сломался элемент отрицания, то на наборах $\widetilde{0}, \widetilde{\sigma}$ на выходе цепочки будет инвертированное значение, которое "дойдет" до самого конца схемы, подобно случаю 1. А на любом другом наборе на правый вход элемента IX придет 1 и на выходе схемы будет правильное значение $f$.

Аналогично получается, если на нулевом наборе функция принимает значение 1.

5. Пусть сломался какой-нибудь элемент в блоке медианы $m_1$. Как уже было замечено выше, при подаче на все входы функции $f$ на выходе при поломке могут получаться только функции 0 и $\overline{f}$.

(a) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается 0. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim f(\widetilde{\sigma}) = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $0 \sim 1 = 0$.

(b) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\overline{f}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim f(\widetilde{\sigma}) = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $\overline{f} \sim 1 = \overline{f}$.

6. Пусть сломался какой-нибудь элемент в блоке медианы $m_2$.

(a) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается 0. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $f(\widetilde{\sigma}) \sim 1 = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $1 \sim \overline{f} = \overline{f}$.

(b) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\overline{f}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $f(\widetilde{0}) \sim 1 = f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $f(\widetilde{\sigma}) \sim 1 = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $1 \sim \overline{f} = \overline{f}$.

7. Пусть сломался какой-нибудь элемент в блоке медианы $m_3$.

(a) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается 0. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $f(\widetilde{0}) \sim 1 = f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim f(\widetilde{\sigma}) = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $1 \sim \overline{f} = \overline{f}$.

(b) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\overline{f}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $f(\widetilde{0}) \sim 1 = f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $f(\widetilde{\sigma}) \sim 1 = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $1 \sim \overline{f} = \overline{f}$.

8. Пусть сломался какой-нибудь элемент в блоках I или II.

(a) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\bar{x}$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $(f \vee D_1 \vee (D_1 \oplus D_2)) \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee \vee (D_1 \oplus 1) \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1))$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim 1 = 1$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim f(\widetilde{\sigma}) = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $1 \sim 1 = 1$.

(b) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\bar{y}$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $(f \vee D_2 \vee (D_1 \oplus D_2)) \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee \vee (D_2 \oplus 1) \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1))$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim 1 = 1$. На любом другом наборе имеем: $1 \sim 1 = 1$.

(c) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $x \vee y$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\Big(f \vee \overline{(D_1 \vee D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2)\Big) \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee \vee (D_1 \vee D_2) \vee \overline{(D_1 \oplus D_2)})$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim 1 = 1$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim 1 = 1$. На любом другом наборе имеем: $f \sim 1 = f$.

(d) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\bar{x} \vee \bar{y}$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\Big(f \vee \overline{(\overline{D_1} \vee \overline{D_2})} \vee (D_1 \oplus D_2)\Big) \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee \vee (\overline{D_1} \vee \overline{D_2}) \vee \overline{(D_1 \oplus D_2)})$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim 1 = 1$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim 1 = 1$. На любом другом наборе имеем:

$1 \sim 1 = 1$.

(e) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $x \oplus y$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\left(f \vee \overline{(D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2)\right) \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee \vee (D_1 \oplus D_2) \vee \overline{(D_1 \oplus D_2)})$.

На любом наборе это выражение равно 1.

9. Пусть сломался один из элементов III,IV. Схема станет реализовывать следующую функцию: $(f \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1) \vee \vee (D_1 \oplus D_2)) \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1))$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на выходе схемы будет $f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем на выходе схемы будет $f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: 1.

10. Пусть сломался элемент V. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\left(\overline{\overline{(f \vee (D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2)}\right) \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1))$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{0})$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim f(\widetilde{\sigma}) = f(\widetilde{\sigma})$. На любом другом наборе имеем: $\overline{f} \sim 1 = \overline{f}$.

11. Пусть сломался элемент VI. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\overline{(f \vee (D_1 \oplus D_2) \vee (D_1 \oplus D_2))} \sim (\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1))$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $0 \sim f(\widetilde{0}) = \overline{f(\widetilde{0})}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $0 \sim f(\widetilde{\sigma}) = \overline{f(\widetilde{\sigma})}$. На любом другом наборе имеем: $\overline{f} \sim 1 = \overline{f}$.

12. Пусть сломался элемент VII. Схема станет реализовывать следующую функцию: $(f \vee (D_1 \oplus D_2)) \sim ((\overline{\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1))} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1))$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim \overline{f(\widetilde{0})} = \overline{f(\widetilde{0})}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim \overline{f(\widetilde{\sigma})} = \overline{f(\widetilde{\sigma})}$. На любом другом наборе имеем: $f \sim 1 = f$.

13. Пусть сломался элемент VIII. Схема станет реализовывать следующую функцию: $(f \vee (D_1 \oplus D_2)) \sim ((\overline{\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus \oplus 1))}))$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на входах элемента IX и, соответственно, на выходе схемы имеем: $1 \sim \overline{f(\widetilde{0})} = \overline{f(\widetilde{0})}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем: $1 \sim \overline{f(\widetilde{\sigma})} = \overline{f(\widetilde{\sigma})}$. На любом другом наборе имеем: $f \sim 0 = \overline{f}$.

14. Наконец, Пусть сломался какой-нибудь элемент в блоке IX.

(a) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\bar{x}$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\overline{(f \vee (D_1 \oplus D_2))}$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на выходе схемы будет 0. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем на выходе схемы будет 0. На любом другом наборе имеем: $\overline{f}$.

(b) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\bar{y}$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\overline{\left(\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1)\right)}$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на выходе схемы будет $\overline{f(\widetilde{0})}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем на выходе схемы будет $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$. На любом другом наборе имеем: 0.

(c) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $x \vee y$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $(f \vee (D_1 \oplus D_2)) \vee \left(\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1)\right)$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на выходе схемы будет 1. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем на выходе схемы будет 1. На любом другом наборе имеем: 1.

(d) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $\bar{x} \vee \bar{y}$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\overline{(f \vee (D_1 \oplus D_2))} \vee \overline{(\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus \oplus D_2 \oplus 1))}$.

При подаче на входы схемы набора $\widetilde{0}$ на выходе схемы будет $\overline{f(\widetilde{0})}$. При подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ имеем на выходе схемы будет $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$. На любом другом наборе имеем: $\overline{f}$.

(e) Пусть неисправность в блоке привела к тому, что на выходе блока реализовывается $x \oplus y$. Схема станет реализовывать следующую функцию: $\overline{(f \vee (D_1 \oplus D_2)) \sim \left(\overline{(f \oplus D_1 \oplus D_2)} \vee (D_1 \oplus D_2 \oplus 1)\right)}$.

На любом наборе это выражение равно $\overline{f}$.

Обозначим через $\widetilde{\gamma}$ любой набор, отличный от наборов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{\sigma}$. Сведем все возможные функции неисправности в одну таблицу (таблица 1):

Возьмем из оставшихся наборов 2 набора $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, на которых функция принимает разные значения. Разобьем таблицу 1 на две: таблица 2 соответствует случаю, когда на нулевом наборе функция равна 0, таблица 3, когда функция на нулевом наборе равна 1.

| | f | 1,2,4 | 1,2,4 | 3,4 | 3,4 | 5a | 5b,6,7,10 | 8a | 8b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\widetilde{0}$ | $f(\widetilde{0})$ | $\overline{f(\widetilde{0})}$ | $\overline{f(\widetilde{0})}$ | 0 | 1 | $f(\widetilde{0})$ | $f(\widetilde{0})$ | 1 | $f(\widetilde{0})$ |
| $\widetilde{\sigma}$ | $f(\widetilde{\sigma})$ | 0 | 1 | $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$ | $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$ | $f(\widetilde{\sigma})$ | $f(\widetilde{\sigma})$ | $f(\widetilde{\sigma})$ | 1 |
| $\widetilde{\gamma}$ | f | f | f | f | f | 0 | $\overline{f}$ | 1 | 1 |

| | 8c | 8d,8e,14c | 9 | 11,13,14d | 12 | 14a | 14b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\widetilde{0}$ | 1 | 1 | $f(\widetilde{0})$ | $\overline{f(\widetilde{0})}$ | $\overline{f(\widetilde{0})}$ | 0 | $\overline{f(\widetilde{0})}$ |
| $\widetilde{\sigma}$ | 1 | 1 | $f(\widetilde{\sigma})$ | $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$ | $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$ | 0 | $\overline{f(\widetilde{\sigma})}$ |
| $\widetilde{\gamma}$ | f | 1 | 1 | $\overline{f}$ | f | $\overline{f}$ | 0 |

Табл. 1. Возможные функции неисправности

| | f | 1,2, 4,12 | 1,2, 4,8c | 3,4 | 5a | 5b,6, 7,10 | 8a,8d, 8e,14c | 8b,9 | 11,13,14d | 14a | 14b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\widetilde{0}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\widetilde{\sigma}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\widetilde{\alpha}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\widetilde{\beta}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Табл. 2. Возможные функции неисправности. $f(\widetilde{0}) = 0$.

| | f | 1,2,4 | 1,2, 4,12 | 3,4,8c | 5a | 5b,6, 7,10 | 8a,9 | 8b,8d, 8e,14c | 11,13, 14d | 14a | 14b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\widetilde{0}$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\widetilde{\sigma}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $\widetilde{\alpha}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\widetilde{\beta}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Табл. 3. Возможные функции неисправности. $f(\widetilde{0}) = 1$.

Независимо от того, какие значения принимает исходная функция и функции с неисправностями на других наборах, эти 4 набора образуют диагностический тест, так как отличают между собой все эти функции. Теорема доказана.

В силу принципа двойственности имеет место следующее утверждение:

**Теорема 2.** *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{x \& y, \bar{x}\}$ имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.*

**Теорема 3.** *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{\overline{x \vee y}\}$ имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.*

**Доказательство.** Реализуем функцию схемой в базисе $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$. После чего заменим все вхождения элемента дизъюнкции на два элемента $\overline{x \vee y}$, таким образом, что на входы первого элемента подаются входы первоначальной дизъюнкции, а на входы второго подается раздвоенный выход первого, а каждый элемент отрицания заменим на один элемент $\overline{x \vee y}$, на входы которого подается раздвоенный вход первоначального отрицания.

В итоге мы получаем эквивалентную схему. Более того, при поломке одного любого элемента, мы получаем схему, эквивалентную той, которая бы получилась при поломке соответствующего элемента в исходной схеме. А значит, все рассуждения для базиса $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$ можно повторить для этого базиса и 4 наборов для диагностического теста достаточно.

Теорема доказана.

В силу принципа двойственности имеет место следующее утверждение:

**Теорема 4.** *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{\overline{x \& y}\}$ имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.*

**Теорема 5.** *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в произвольном базисе, содержащем функцию $x \vee y$, имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.*

**Доказательство.** Дальнейшие построения будем связывать с возможными расширениями заданного базиса $B$ (5). Расширением базиса $B$ будем считать всякий базис $B'$, любая функция которого либо совпадает с какой-нибудь функцией из $B$, либо может быть получена путем отождествления переменных какой-нибудь функции из $B$. Каждому элементу из $B'$, которого нет в $B$, можно поставить в соответствие эквивалентную схему над $B$ (склеивая в $B$ некоторые входы). Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать ее для произвольного расширения базиса $B$.

Пусть $B'$ — максимальное расширение исходного базиса. Если в нем есть отрицание, строим схему, как в теореме 1. Далее будем считать, что в расширении нет элемента отрицания.

Базис $B$ в силу своей полноты содержит функцию, не сохраняющую 0, и функцию, не сохраняющую 1. Так как в расширении нет отрицания, то есть обе константы 0 и 1. Обозначим через $E^i$ элементы, реализующие константы.

Пусть $E^*$ — элемент из $B'$, реализующий немонотонную булеву функцию. Среди входов элемента выделим главный вход, а все остальные входы разобьем на нулевые и единичные таким образом, чтобы при подаче на главный вход переменной $x$, на нулевые — константы 0, а на единичные — константы 1 на выходе была реализована инверсия $\bar{x}$. Уточним, что единичные входы будем считать таковыми только в том случае, когда при подаче на эти входы константы 0 на выходе окажется реализована функция, отличная от отрицания (в противном случае все входы, кроме главного, относим к нулевым).

Если функция $f = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, то схема строится следующим образом:

Строим цепочку из $n-1$ дизъюнктора и повторяем ее дважды и подадим оба выхода на элемент дизъюнкции. При поломке любого элемента, кроме последнего, на выходе реализуется константа 1, а при поломке последнего — функция $\overline{x_1 \vee \ldots \vee x_n}$, и двух наборов для диагностики любой неисправности достаточно.

Пусть теперь функция $f$ имеет другой вид. Возьмем схему, построенную в теореме 1, и заменим все элементы отрицания на указанный выше элемент $E^*$, на нулевые входы которого поданы выход элемента $E^0$, а на единичные — выход элемента $E^1$. Выход полученной схемы подадим на вход дизъюнктора, на второй вход которого подается еще один выход элемента $E^0$.

При правильной работе схемы реализуется функция $f$. Все рассуждения теоремы 1 сохраняются при поломке любого элемента дизъюнкции или $E^*$. Осталось рассмотреть, что будет при поломке элементов $E^0$ и $E^1$.

Если сломается элемент $E^0$, то на выходе последнего элемента схемы, независимо от результата, поданного на один из его входов, будет 1, так как значение 1 подано на второй вход.

Если сломается элемент $E^1$, то все элементы $E^*$ на выходе будут выдавать константы 0, 1 или тождественную функцию.

Если при неисправности элемента $E^1$ на выходе всех элементов $E^*$ будет 0 или 1, то, так как последний элемент схемы в теореме 1 был отрицанием, то и на выходе всей схемы будет константа 0 или константа 1 соответственно (таким же образом константа получается, если для реализации $f$ была использована схема с рис. 2).

Если при неисправности элемента $E^1$ на выходе всех элементов $E^*$ будет тождественная функция, то в схеме исчезнут все отрицания и на выходе будет реализована функция $x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

При добавлении полученных функций неисправности к тем, которые могли получится раньше, видно, что 4 наборов по-прежнему хватает, чтобы диагностировать любую неисправность.

**Теорема 6.** *При всяком* $n \in \mathbb{N}$ *для СФЭ в произвольном базисе, содержащем функцию* $x \,\&\, y$, *имеет место неравенство* $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.

В силу принципа двойственности, этот результат является следствием предыдущей теоремы.

## Литература

1. *Редькин Н. П.* О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. — 1999. — С. 196.

2. *Коваценко С. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

3. *Романов Д. С.* Метод синтеза неизбыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины два // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 3. — С. 56–72.

4. *Романов Д. С.* Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 4. — С. 8–54.

5. *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов //Математические вопросы кибернетики. — 2003. — № 12— С. 217–230

6. *Попков К. А.* Полные диагностические тесты длины два для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов // М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2017. — 10 с.

7. *Попков К. А.* Полные диагностические тесты длины 2 для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов // Комплексный анализ, математическая физика и приложения. Сборник статей. Тр. МИАН. № 301. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика». — 2018. — С. 219–224.

8. *Романов Д. С.* О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на

выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2015. — № 1. — С. 30–37.

9. *Романов Д. С., Романова Е. Ю.* Короткий диагностический тест для одного класса схем // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия: Технические науки. Информатика, вычислительная техника и управление. — 2017. — № 04(38). — С. 91–93.