А.С. Макеев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ПОПУЛЯЦИИ [1]

Работа посвящена применению метода регуляризации Тихонова для численного решения обратных задач для моделей популяции. Для первой модели решается обратная задача, состоящая в одновременном определении коэффициента скорости смертности биологических объектов и их начального распределения по дополнительной информации о плотности популяции [6]. Для другой модели решается задача определения коэффициента скорости роста биологических объектов по дополнительной информации об их плотности. Для обеих обратных задач приведены примеры их численного решения.

Рассмотрим модель популяции биологических объектов

$$u_t + u_x = -\mu u, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \int\limits_0^1 q(s)u(s,t)ds, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ – плотность объектов размера x в момент времени t, $\mu(x)$ – коэффициент скорости смертности объектов, $\varphi(x)$ – начальное распределение плотности объектов и $q(x)$ – относительный коэффициент скорости рождения объектов. Функции $\mu(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и неотрицательны, а функция $q(x)$ непрерывна и положительна. Модель популяции (1)-(3) и ее обобщения исследовались в целом ряде работ (см, например [1]-[7]).

Решение задачи (1)-(3) для заданных $\mu(x), q(x)$ и $\varphi(x)$ может быть найдено следующим образом (см, например [2]). Если $x \ge t$, то

$$u(x,t) = \varphi(x-t)\exp\Big\{-\int\limits_{x-t}^{x} \mu(\sigma)d\sigma\Big\}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le x. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00232

При $x < t$ функция $u(x,t)$ является решением интегрального уравнения

$$u(x,t) = \exp\Big\{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma\Big\} \times$$

$$\times \int_0^1 q(s)u(s,t-x)ds, \ 0 \le x \le 1, \ x \le t \le 1. \tag{5}$$

Используя формулу (4), это уравнение для $x \le t \le 1$ можно переписать так

$$u(x,t) = \exp\Big\{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma\Big\} \int_0^{t-x} q(s)u(s,t-x)ds + \int_{t-x}^1 q(s)\varphi(s-t+x) \times$$

$$\times \exp\Big\{-\int_{s-t+x}^s \mu(\sigma)d\sigma - \int_0^x \mu(\sigma)d\sigma\Big\}ds, \ 0 \le x \le 1, \ x \le t \le 1. \tag{6}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функция $q(x)$ задана, а $\mu(x)$ и $\varphi(x)$ неизвестны. Требуется определить эти функции, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(3)

$$u(0,t) = a(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{7}$$

$$u(1,t) = b(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{8}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ известные положительные функции. Обратные задачи для модели популяции (1)-(3) исследовались в [6]-[7].

Рассмотрим метод приближенного решения поставленной обратной задачи основанный на использовании метода регуляризации Тихонова [8]. Обозначим через $u(x,t;\mu,\varphi)$ решение задачи (1)-(3) для заданных функций $\mu(x)$ и $\varphi(x)$. Определим оператор B следующим образом

$$(B\{\mu;\varphi\})(t) = \{u(0,t;\mu,\varphi); u(1,t;\mu,\varphi)\}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Из дополнительных условий (7)-(8) следует, что обратная задача (1)-(3), (7), (8) сводится к решению операторного уравнения

$$(B\{\mu;\varphi\})(t) = \{a(t); b(t)\}, \quad 0 \le t \le 1. \tag{9}$$

Будем рассматривать оператор B действующим из пространства $C^+[0,1] \times C^+[0,1]$ в пространство $L_2[0,1] \times L_2[0,1]$, где $C^+[0,1]$ пространство непрерывных неотрицательных на отрезке $[0,1]$ функций с равномерной метрикой. Докажем, что оператор B являются непрерывными. Получим для этого оценку устойчивости решения задачи (1)-(3) по коэффициентам $\mu(x)$ и $\varphi(x)$. Доказательство устойчивости опирается на следующие леммы [7].

Лемма 1. *Пусть для функции $v(x,t)$ непрерывной при $(x,t) \in \Pi = \{(x,t) : 0 \leq x \leq t \leq 1\}$ выполнено неравенство*

$$0 \leq v(x,t) \leq a + q \int_{0}^{t-x} v(s, t-x) ds, \ (x,t) \in \Pi, \qquad (10)$$

где a, q положительные постоянные. Тогда

$$v(x,t) \leq 2^{2q+1} a, \quad (x,t) \in \Pi.$$

Лемма 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\mu(x)$ неотрицательны и непрерывны на $[0,1]$, а функция $q(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1]$. Тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1)-(3) выполнена оценка*

$$0 \leq u(x,t) \leq \max(\varphi_1, q_1 \varphi_1 2^{2q_1+1}) \equiv u_0, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

где $q_1 = ||q(x)||_{C[0,1]}$ и $\varphi_1 = ||\varphi(x)||_{C[0,1]}$.

Получим оценку устойчивости решения задачи (1)-(3) по коэффициентам $\mu(x)$ и $\varphi(x)$.

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ неотрицательны и непрерывны на $[0,1]$, а функция $q(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1]$. Тогда*

$$|u(x,t;\mu_1,\varphi_1) - u(x,t;\mu_2,\varphi_2)| \leq \max(\varphi_0, q_1(u_0+\varphi_0)2^{2q_1+1}) \times$$

$$\times ||\mu_1 - \mu_2||_{C[0,1]} + \max(1, q_1 2^{2q_1+1}) ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C[0,1]}, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

где $\varphi_0 = \max(||\varphi_1(x)||_{C[0,1]}, ||\varphi_2(x)||_{C[0,1]})$.

Доказательство. Из формулы (4) получим

$$|u(x,t;\mu_1,\varphi_1) - u(x,t;\mu_2,\varphi_2)| \leq \varphi_0 ||\mu_1 - \mu_2||_{C[0,1]} +$$

$$+ ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C[0,1]}, \quad 0 \leq t \leq x \leq 1.$$

Из уравнения (6) следует, что

$$|u(x,t;\mu_1,\varphi_1) - u(x,t;\mu_2,\varphi_2)| \leq \Big|\int_0^{t-x} q(s)\exp\Big\{-\int_0^x \mu_1(\sigma)d\sigma\Big\}\times$$

$$\times\Big(u(s,t-x;\mu_1,\varphi_1)-u(s,t-x;\mu_2,\varphi_2)\Big)ds\Big|+$$

$$+\Big|\int_0^{t-x} q(s)\Big(\exp\Big\{-\int_0^x \mu_1(\sigma)d\sigma\Big\} - \exp\Big\{-\int_0^x \mu_2(\sigma)d\sigma\Big\}\Big)u(s,t-x;\mu_2,\varphi_2)ds\Big|+$$

$$+\Big|\int_{t-x}^1 q(s)\varphi_1(s-t+x)\Big(\exp\Big\{-\int_{s-t+x}^s \mu_1(\sigma)d\sigma-\int_0^x \mu_1(\sigma)d\sigma\Big\}-$$

$$-\exp\Big\{-\int_{s-t+x}^s \mu_2(\sigma)d\sigma-\int_0^x \mu_2(\sigma)d\sigma\Big\}\Big)ds\Big|+$$

$$+\Big|\int_{t-x}^1 q(s)\Big(\varphi_1(s-t+x) - \varphi_2(s-t+x)\Big)\exp\Big\{-\int_{s-t+x}^s \mu_2(\sigma)d\sigma-\int_0^x \mu_2(\sigma)d\sigma\Big\}ds\Big|,$$

$$0 \leq x \leq t \leq 1.$$

Положив $v(x,t) = |u(x,t;\mu_1,\varphi_1) - u(x,t;\mu_2,\varphi_2)|$ и использовав лемму 2, получим

$$v(x,t) \leq \int_0^{t-x} q_1 v(s,t-x)ds + q_1||\mu_1-\mu_2||_{C[0,1]}u_0+$$

$$+q_1\varphi_0||\mu_1-\mu_2||_{C[0,1]} + q_1||\varphi_1-\varphi_2||_{C[0,1]} \leq$$

$$\leq \int_0^{t-x} q_1 v(s,t-x)ds + q_1(u_0+\varphi_0)||\mu_1-\mu_2||_{C[0,1]}+$$

$$+q_1||\varphi_1-\varphi_2||_{C[0,1]}, \quad 0 \leq x \leq t \leq 1.$$

Использовав лемму 1, получим

$$v(x,t) \leq 2^{2q_1+1}\Big(q_1(u_0+\varphi_0)||\mu_1-\mu_2||_{C[0,1]} + q_1||\varphi_1-\varphi_2||_{C[0,1]}\Big),$$

$$0 \leq x \leq t \leq 1.$$

$$|u(x,t;\mu_1,\varphi_1) - u(x,t;\mu_2,\varphi_2)| \leq q_1(u_0+\varphi_0)2^{2q_1+1}||\mu_1-\mu_2||_{C[0,1]}+$$

$$+q_1 2^{2q_1+1}||\varphi_1-\varphi_2||_{C[0,1]}, \quad 0 \leq x \leq t \leq 1.$$

Следовательно

$$|u(x,t;\mu_1,\varphi_1)-u(x,t;\mu_2,\varphi_2)|\le \max(\varphi_0, q_1(u_0+\varphi_0)2^{2q_1+1})\times$$

$$\times||\mu_1-\mu_2||_{C[0,1]}+\max(1,q_1 2^{2q_1+1})||\varphi_1-\varphi_2||_{C[0,1]},\quad 0\le x,t\le 1.$$

Теорема доказана.

Из теоремы следует непрерывность оператора B.

Пусть операторное уравнение (9) имеет для функций $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ единственное непрерывное неотрицательное решение $\bar{\mu}(x),\bar{\varphi}(x)$. Однако, функции $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ нам неизвестны, а заданы функции $a_\delta(t)$ и $b_\delta(t)$ такие, что $||a_\delta-\bar{a}||^2_{L_2[0,1]}+||b_\delta-\bar{b}||^2_{L_2[0,1]}\le\delta^2$. Тогда приближенное решение операторного уравнения (9) может быть найдено с помощью минимизации функционала Тихонова

$$M^\alpha\{\mu;\varphi\}=||(B\{\mu;\varphi\})(t)-\{a_\delta(t);b_\delta(t)\}||^2_{L_2[0,1]\times L_2[0,1]}+$$
$$+\alpha(\delta)\Big(||\mu(x)||^2_{W_2^1[0,1]}+||\varphi(x)||^2_{\bar{W}_2^1[0,1]}\Big), \tag{11}$$

где $\alpha(\delta)$ должным образом зависит от δ [8].

Приведем результаты решения обратной задачи с использованием метода регуляризации (11). Схема расчетов была следующей. Задавались функции $q(x),\mu(x),\varphi(x)$ и с ними решалась задача (1)-(3). Далее вычислялись функции $a(t)$ и $b(t)$ и в них вносилась погрешность так, чтобы $||a_\delta-\bar{a}||^2_{L_2[0,1]}+||b_\delta-\bar{b}||^2_{L_2[0,1]}\le\delta^2$, $\delta=0.05$. С функциями $a_\delta(t)$ и $b_\delta(t)$ решалась обратная задача. Для минимизации функционала в методе Тихонова (11) использовался метод градиентного спуска. В качестве нормы $\bar{W}_2^1$ использовалась норма $||\varphi||_{\bar{W}_2^1}=\Big(\int\limits_0^1\frac{1}{10}\Big(\varphi^2(s)+\varphi'^2(s)\Big)ds\Big)^{\frac{1}{2}}$, а для пространства W_2^1 была взята норма $||\mu||_{W_2^1}=\Big(\int\limits_0^1\Big(\mu^2(s)+\mu'^2(s)\Big)ds\Big)^{\frac{1}{2}}$.

На рис. 1-2 изображены результаты решения обратной задачи при помощи метода регуляризации Тихонова (11) для случая $q(x)=1$, $\mu(x)=1-x/2$, $\varphi(x)=1+x$. На рисунке 1 изображены точное решение $\mu_T(x)=1-x/2$ и решение полученное с помощью метода регуляризации Тихонова (11) $\mu_R(x)$. На рисунке 2 изображены точное решение $\varphi_T(x)=1+x$ и решение полученное с помощью метода регуляризации Тихонова (11) $\varphi_R(x)$. Максимум модуля разности функций $\mu_R(x)$ и точного решения $\mu_T(x)$ составил $\max_{x\in[0,1]}|\mu_R(x)-\mu_T(x)|=0.037$ и максимум модуля разности функций $\varphi_R(x)$ и точного решения $\varphi_T(x)$ составил $\max_{x\in[0,1]}|\varphi_R(x)-\varphi_T(x)|=0.024$ при $\alpha(\delta)=0.002$.

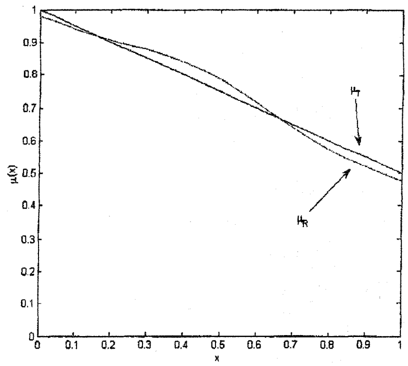

Рис. 1

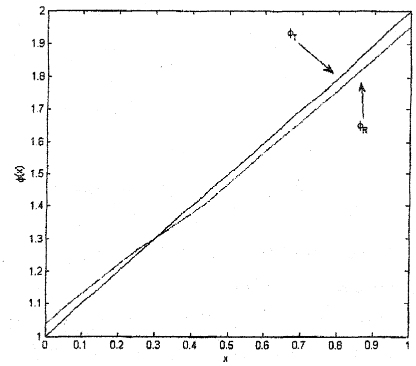

Рис. 2

На рис. 3-4 изображены результаты решения обратной задачи при помощи метода регуляризации Тихонова (11) для случая $q(x) = 1$, $\mu(x) = 1 + x/2$, $\varphi(x) = 1 - x^2$. На рисунке 3 изображены точное решение $\mu_T(x) = 1 + x/2$ и решение полученное с помощью метода регуляризации Тихонова (11) $\mu_R(x)$. На рисунке 4 изображены точное решение $\varphi_T(x) = 1 - x^2$ и решение полученное с помощью метода регуляризации Тихонова (11) $\varphi_R(x)$. Максимум модуля разности функций $\mu_R(x)$ и точного решения $\mu_T(x)$ составил $\max_{x\in[0,1]} |\mu_R(x) - \mu_T(x)| = 0.045$ и максимум модуля разности функций $\varphi_R(x)$ и точного решения $\varphi_T(x)$ составил $\max_{x\in[0,1]} |\varphi_R(x) - \varphi_T(x)| = 0.023$ при $\alpha(\delta) = 0.0025$.

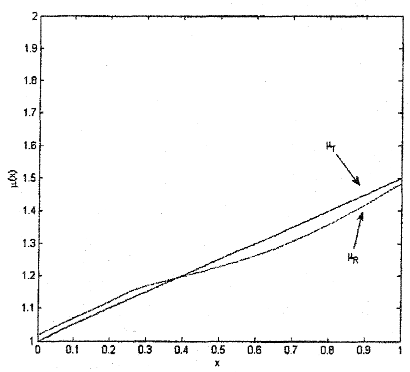

Рис. 3

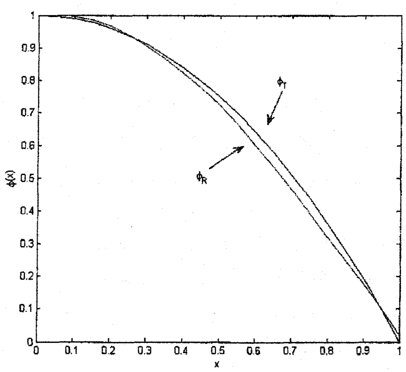

Рис. 4

Рассмотрим модель популяции с переменной скоростью роста объектов

$$u_t + (gu)_x = -\mu u, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0, \tag{12}$$

$$g(0)u(0,t) = \int\limits_0^1 q(s)u(s,t)ds, \quad t \ge 0, \tag{13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{14}$$

Здесь $u(x,t)$ – плотность объектов размера x в момент времени t, $g(x)$ – коэффициент скорости роста объектов, $\mu(x)$ – коэффициент скорости смертности объектов, $\varphi(x)$ – начальное распределение плотности объектов и $q(x)$ – относительный коэффициент скорости рождения объектов. Функции $g(x), \mu(x), \varphi(x)$ и $q(x)$ непрерывны и положительны.

Введем функцию

$$G(x) = \int\limits_0^x \frac{ds}{g(s)}, \quad 0 \le x \le 1. \tag{15}$$

Обозначим через $G^{-1}(x)$ функцию обратную $G(x)$, определенную на отрезке $[0, G(1)]$. Решение задачи (12)-(14) для заданных $g(x), \mu(x), q(x)$ и $\varphi(x)$ может быть найдено следующим образом (см, например [2]). Если $G(x) \ge t$, то

$$\begin{aligned} u(x,t) = \varphi(G^{-1}(G(x)-t))\frac{g(G^{-1}(G(x)-t))}{g(x)} \times \\ \times \exp\Big\{-\int\limits_{G^{-1}(G(x)-t)}^{x} \frac{\mu(\sigma)}{g(\sigma)}d\sigma\Big\}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le G(x). \end{aligned} \tag{16}$$

При $G(x) < t$ функция $u(x,t)$ является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{g(x)} \exp\Big\{-\int\limits_0^x \frac{\mu(\sigma)}{g(\sigma)}d\sigma\Big\} \times \\ \times \int\limits_0^1 q(s)u(s, t-G(x))ds, \ 0 \le x \le 1, \ t > G(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Используя формулу (16), это уравнение для $G(x) \leq t \leq G(1)$ можно переписать так

$$u(x,t) = \frac{1}{g(x)} \exp\Big\{-\int\limits_0^x \frac{\mu(\sigma)}{g(\sigma)} d\sigma\Big\} \int\limits_0^{G^{-1}(t-G(x))} q(s) u(s, t-G(x)) ds +$$
$$+\frac{1}{g(x)} \int\limits_{G^{-1}(t-G(x))}^{1} q(s)\varphi(G^{-1}(G(s)-t+G(x))) \frac{g(G^{-1}(G(s)-t+G(x)))}{g(s)} \times \tag{18}$$
$$\times \exp\Big\{-\int\limits_{G^{-1}(G(s)-t+G(x))}^{s} \frac{\mu(\sigma)}{g(\sigma)} d\sigma - \int\limits_0^x \frac{\mu(\sigma)}{g(\sigma)} d\sigma\Big\} ds,$$
$$0 \leq x \leq 1, \quad G(x) \leq t \leq G(1).$$

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функции $\mu(x), q(x)$ и $\varphi(x)$ заданы, а $g(x)$ неизвестна. Требуется определить эту функцию, если задана дополнительная информация о решении задачи (12)-(14)

$$u(x_0, t) = c(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{19}$$

где $c(t)$ известная положительная функция, x_0 фиксированная точка такая, что $x_0 \in [0,1]$ и $T > 0$.

Рассмотрим метод приближенного решения исследуемой обратной задачи основанный на использовании метода регуляризации Тихонова [8]. Обозначим через $u(x,t;g)$ решение задачи (12)-(14) для заданной функции $g(x)$. Из дополнительного условия (19) следует, что обратная задача (12)-(14),(19) сводится к решению операторного уравнения

$$(Ag)(t) = c(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{20}$$

где оператор $(Ag)(t) = u(x_0, t; g)$. Будем рассматривать оператор A, действующим из пространства непрерывных положительных на отрезке $[0,1]$ функций с равномерной метрикой в пространство $L_2[0,T]$.

Пусть операторное уравнение (20) имеет для функции $\bar{c}(t)$ единственное непрерывное положительное решение $\bar{g}(x)$. Однако, функция $\bar{c}(t)$ нам неизвестна, а задана функция $c_\delta(t)$ такая, что $||c_\delta - \bar{c}||_{L_2[0,T]} \leq \delta$. Тогда приближенное решение операторного уравнения (20) может быть найдено с помощью минимизации функционала Тихонова

$$M^\alpha(g) = ||(Ag)(t) - c_\delta(t)||^2_{L_2[0,T]} + \alpha(\delta)||g(x)||^2_{W_2^1[0,1]}, \tag{21}$$

где $\alpha(\delta)$ должным образом зависит от δ [8].

Приведем результаты решения обратной задачи с использованием метода регуляризации (21). Для обратной задачи (12)-(14),(19) схема расчетов была следующей. Задавались функции $g(x), q(x), \mu(x), \varphi(x)$ и с ними решалась задача (12)-(14). Далее вычислялась функция $c(t)$ при $x_0 = \frac{1}{2}$ и в нее вносилась погрешность так, чтобы $||c(t) - c_\delta(t)||_{L_2[0,1]} \leq \delta$, $\delta = 0.05$. С функцией $c_\delta(t)$ решалась обратная задача. Для минимизации функционала в методе Тихонова (21) использовался метод градиентного спуска.

На рис. 5 изображены результаты решения обратной задачи при помощи метода регуляризации Тихонова (21) для случая $g(x) = 1 + x/2$, $q(x) = 1$, $\mu(x) = 1$, $\varphi(x) = 1$. На рисунке изображены точное решение $g_T(x) = 1+x/2$ и решение полученное с помощью метода регуляризации Тихонова (21) $g_R(x)$. Максимум модуля разности функций $g_R(x)$ и точного решения $g_T(x)$ составил $\max_{x\in[0,1]} |g_R(x) - g_T(x)| = 0.042$ при $\alpha(\delta) = 0.0005$.

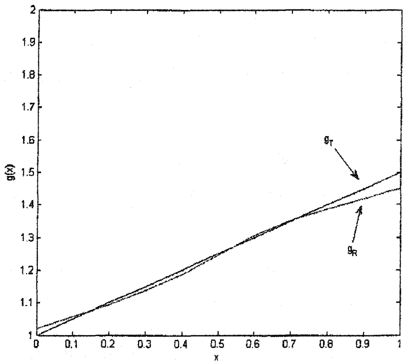

Рис. 5

На рис. 6 изображены результаты решения обратной задачи при помощи метода регуляризации Тихонова (21) для случая $g(x) = e^{-x/2}$, $q(x) = 1$, $\mu(x) = 1$, $\varphi(x) = 1$. На рисунке изображены точное решение $g_T(x) = e^{-x/2}$ и решение полученное с помощью метода регуляризации Тихонова (21) $g_R(x)$. Максимум модуля разности функций $g_R(x)$ и точного решения $g_T(x)$ составил $\max_{x\in[0,1]} |g_R(x) - g_T(x)| = 0.035$ при $\alpha(\delta) = 0.02$.

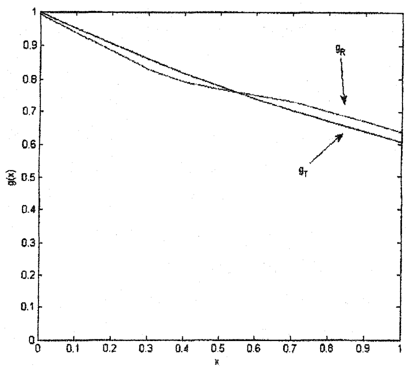

Рис. 6

Литература

1. *Murray J.D.* Biology. New York: Springer, 1993.
2. *Banks H.T., Kappel F.* Transformation semigroups and L^1-approximation for size structured population models // Semigroup Forum. 1989. 38. P.141-155.
3. *Banks H.T., Kappel F., Wang C.* Weak solutions and differentiability for size structured population models // Internat. Ser. Numer. Math. 1991. 100. P.35-50.
4. *Ackleh A.S., Deng K.* Monotone method for first order nonlocal hyperbolic initial-boundary value problems // Applic. Analys. 1997. 67. P.283-293.
5. *Sinko J.W., Streifer W.* A new model for age-sized structure for a population // Ecology. 1967. 48. P.910-918.
6. *Денисов А.М., Макеев А.С.* Итерационные методы решения обратной задачи для одной модели популяции // ЖВМиМФ. 2004. 44. №8. С.1480-1489.
7. *Макеев А.С.* Методы решения обратных задач для модели популяции // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 15. Выч. матем. и киберн. 2005. №3. С.3-16.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1974.