А.И. Машечкин, И.И. Поспелова

СВОЙСТВА ГОЛОСОВАНИЯ С ПРАВОМ ВЕТО*

Введение. Выборы представляют собой наиболее яркий пример коллективного принятия решений. В современной жизни каждый человек, хотя бы раз, но сталкивался с процессом выборов: от выборов старосты класса и до выборов президента страны. Интерес к этому процессу проявлялся ещё с незапамятных времён. Начиная с политической философии Просвещения, установление правил голосования являлось главной этической проблемой. Исследования, направленные на выяснение корректности того или иного порядка проведения голосования начались во второй половине XVIII века.

Существует много различных правил голосования и выборов (выбор по большинству голосов, право решающего голоса у одного из избирателей, открытое или тайное голосование и т.д.). В данной статье рассматривается голосование с правом вето. При таком голосовании каждый избиратель накладывает вето (запрет на избрание) на одного из кандидатов. Кандидат, на которого к концу выборов не наложили вето, считается избранным. Исследуются варианты последовательного и одновременного применения вето, а также проанализирована ситуация неполностью определённых предпочтений голосующих на модельном примере трёх групп избирателей.

Постановка задачи. Для формального исследования процедуры выборов используется математический аппарат теории игр (см. [1]).Основной моделью для анализа поведения избирателей (выборщиков) является игра в нормальной форме. Дадим её определение (см. [2]).

Определение 1. Пусть N – фиксированное конечное множество-модель некоторого сообщества, членов которого будем обозначать индексом i = 1,2,…,n. Игрой в нормальной форме называется совокупность, которая содержит множество N и для каждого i из N содержит:

- множество стратегий X_i, элементы которого обозначаются через x_i,
- функцию выигрыша u_i, являющуюся отображением из $X_N = X_1 \times \ldots \times X_n$ в R. Элемент $x = (x_i)_{i \in N}$ из множества X_N называется исходом игры.

* Работа выполнена по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-693.2008.1).

Игроки i независимо и одновременно выбирают любые стратегии $x_i \in X_i$. После того, как каждый игрок выбрал свою стратегию, определяется исход x и выигрыши $u_i(x)$ игроков $i = 1,2,\ldots,n$.

В игре, соответствующей голосованию, функции выигрыша представимы в виде $u_i(x) = U_i(p(x_1, x_2, x_3))$, где p – функция голосования, которая является отображением исхода игры – выбора каждого из игроков – на множество кандидатов, U_i – отображение множества кандидатов на числовую ось. Для рассматриваемого правила голосования путём ветования выбор каждого игрока состоит в отводе одного из кандидатов (т.е. кандидат избран, если ни кем не выбран).Через $U_i(m)$ обозначается выигрыш, который получит i-тый игрок при избрании кандидата m, т.е. насколько i-й группе избирателей выгоден кандидат m. Игроки стремятся к максимизации своей функции выигрыша.

Рассмотрим задачу выбора председателя совета директоров компании. Пусть в выборах участвуют четыре кандидата – три от компании и один кандидат со стороны. Голосуют представители самих кандидатов. Каждый является лучшим для своего представителя. Представитель от кандидата 4 в голосовании не участвует.

Кандидатов будем обозначать цифрами 1, 2, 3, 4. Каждая цифра соответствует номеру представителя соответствующего кандидата в голосовании (кроме 4).

Данная модель выборов представима в виде игры в нормальной форме $\langle X_i, u_i, i \in N \rangle$ (см. [1]), где $X_i = \{1,2,3,4\}$ – множество стратегий игрока i, заключающихся в выборе кандидата, на которого накладывается вето (другими словами, этот кандидат выбывает из выборов), $N = \{1, 2, 3\}$ – множество игроков, т.е. избирателей.

Для каждого голосующего функции выигрыша не будем задавать явно, а зададим системой предпочтений, т.е. предположим, что известны соотношения между значениями функций выигрыша в случае избрания каждого из кандидатов. Эти соотношения будем представлять следующим образом:

$$U_1(1) > U_1(a^1) > U_1(b^1) > U_1(c^1), \qquad a^1, b^1, c^1 \in \{2,3,4\};$$
$$U_2(2) > U_2(a^2) > U_2(b^2) > U_2(c^2), \qquad a^2, b^2, c^2 \in \{1,3,4\};$$
$$U_3(3) > U_3(a^3) > U_3(b^3) > U_3(c^3), \qquad a^3, b^3, c^3 \in \{1,2,4\}.$$

Задача: выяснить, может ли первый игрок гарантировать избрание кандидата 1.

Но для начала надо исследовать и предложить совету директоров ряд возможных правил проведения голосования.

Модель игры с закрытым голосованием. Рассмотрим следующее правило выбора, соответствующее игре в нормально форме без предположения об информированности игроков о ходах друг друга.

Все игроки накладывают вето одновременно, т.е. о выборе друг друга они никакой информации не имеют. Кандидат считается избранным, если на всех, кроме него, было наложено вето. Если остаются не отведёнными несколько кандидатов (более одного), то проводится второй тур и т.д.

Для исследования игры с рассматриваемым правилом предположим, что в первом туре все игроки будут накладывать вето на своих наихудших кандидатов, чтобы обеспечить гарантированный выигрыш. Во втором туре ветуются наихудшие из оставшихся и т.п. Это предположение соответствует отсутствию информации о предпочтениях игроков. Однако, в процессе игры (после нескольких туров) игроки могут по ее результатам вычислить соотношения функций выигрыша и выработать более сложную стратегию. Не будем отметать и такую возможность.

Случай, когда у трёх игроков наихудшие кандидаты разные, тривиален и «разыгрывается» в один тур, в результате которого избирается кандидат, не являющийся наихудшим ни для одного из игроков. Менее очевидным является случай, когда у двух игроков наихудшим является один и тот же кандидат. Здесь результат зависит от правила выбора в случае нескольких «вето».

1. Рассмотрим логически наиболее понятное правило, когда кандидаты отводятся по принципу большинства, т.е. на каждом туре из игры выкидывают кандидата, на которого наложили вето больше всего игроков. Покажем, что в такой игре возможно возникновение тупиковой ситуации.

Пусть имеются следующие предпочтения голосующих:

$$U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(4),$$
$$U_2(2) > U_2(3) > U_2(1) > U_2(4),$$
$$U_3(3) > U_3(1) > U_3(4) > U_3(2).$$

Тогда в первом туре будут заветованы кандидаты 2 и 4, и из голосования будет удалён кандидат 4 как заветованный двумя голосами. Во втором туре игроки делают выбор, исходя из следующих соотношений:

$$U_1(1) > U_1(2) > U_1(3),$$
$$U_2(2) > U_2(3) > U_2(1),$$
$$U_3(3) > U_3(1) > U_3(2).$$

Так что все ветуют разных игроков и не понятно, кого исключить из голосования. Поэтому на третьем туре игроки должны делать выбор по этим же предпочтениям.

К данному моменту они имеют полную информацию о соотношении функций выигрыша друг друга (это определяется через условие о том, что каждый кандидат – лучший для своего представителя). Тем не менее, возникает зацикливание, которое логически не разрешимо, поскольку наилучшей стратегией информированного о предпочтениях партнеров игрока в рассматриваемом примере будет вето на своего кандидата (чтобы был избран второй по его предпочтениям), но и здесь игроки выступят одновременно.

Аналогичная ситуация может возникнуть, когда у 3-х игроков одинаковые наихудшие кандидаты.

Стандартный вариант для правила большинства – отдать преимущество выбора в случае равенства голосов какому-то определённому игроку – нарушает исходную симметрию первых трёх кандидатов, т.е. не соответствует постановке задачи.

2. Предположим, что на каждом туре «выкидываются» все кандидаты, на которых накладывается вето. А в случае, когда могут быть «заветованы» все кандидаты, будет отводиться тот, запрет на избрание которого наложили минимум двое игроков.

Тогда для предыдущего примера на первом шаге будут заветованы кандидаты 2 и 4. На втором туре останется голосование с предпочтениями

$$U_1(1) > U_1(3),$$
$$U_2(2) > U_2(1),$$
$$U_3(3) > U_3(1),$$

и будет отведён кандидат 1 двумя голосами, т.е. избран кандидат 3.

Однако если немного подкорректировать предыдущий пример, поменяв местами для 3-го игрока предпочтения относительно кандидатов 2 и 4,

$$U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(4),$$
$$U_2(2) > U_2(3) > U_2(1) > U_2(4),$$
$$U_3(3) > U_3(1) > U_3(2) > U_3(4),$$

то увидим, что и это правило оказывается несостоятельным. Действительно, в первом туре вето будет наложено на кандидата 4. Во втором туре возникает зацикливание, так как все игроки имеют разных кандидатов на соответствующих позициях.

Таким образом тайное голосование с правом вето не позволяет сформулировать простые и интуитивно понятные правила принятия решений без введения асимметрии среди голосующих. Но наиболее прозрачным способом введения асимметрии является задание порядка ходов игроков при ветовании, что характерно для открытого голосования. Поэтому в остальной части работы рассмотрим открытое голосование.

Модель игры с открытым голосование с фиксированным порядком ходов. Голосование происходит по очереди (по порядку номеров игроков). Игрок i накладывает вето (запрет на избрание) на одного из кандидатов. Игрок i+1, когда очередь доходит до него, знает, какие кандидаты уже вычеркнуты из игры, и накладывает вето на одного из оставшихся. То есть, вето может быть наложено на каждого кандидата максимум один раз.

Игровая модель для данной ситуации относится к играм с фиксированным порядком ходов (см. [3]). В таких играх стратегии игроков уже являются функциями от выборов x_i партнёров, сделавших свой ход ранее, т.е. если перейти к игре в нормальной форме, то в качестве X_i для i из N можно рассматривать следующие отображения: $X_1 = \{1,2,3,4\}$, $X_2 = \{1,2,3,4\} \Rightarrow \{1,2,3,4\} \setminus \{x_1\}$, $X_3 = \{1,2,3,4\} \mathrm{x} \{1,2,3,4\} \Rightarrow \{1,2,3,4\} \setminus \{x_1, x_2\}$.

Будем изучать игру с фиксированным порядком ходов для рассматриваемого правила голосования в двух постановках: наличия и отсутствия неопределенности в предпочтениях игроков, т.е. в собственных функциях выигрыша.

1. Игра без неопределённости в предпочтениях игроков. Соответствующая игра 3-х лиц была рассмотрена Э. Муленом в книге «Теория игр с примерами из математической экономики» [2]. В ней была рассмотрена модель, где сообщество A={1,2,3} выбирает кандидата из множества N={1, 2, 3, 4} при следующих фиксированных соотношениях функций выигрыша игроков:

$$U_1(1) > U_1(2) > U_1(4) > U_1(3),$$
$$U_2(2) > U_2(1) > U_2(3) > U_2(4),$$
$$U_3(3) > U_3(2) > U_3(1) > U_3(4).$$

Доказано, что, не зная предпочтений других участников, 1-й игрок ветует наихудшего для себя кандидата 3, чем обеспечит избрание кандидата 2. А в предположении полной информированности о функциях выигрыша других игроков (при сложном поведении) 1-й игрок обеспечит избрание кандидата 1, ветуя кандидата 2.

Далее рассмотрим ситуацию полной информированности игроков о предпочтениях остальных голосующих в общем виде, предполагая, что предпочтения игроков строгие (случай нестрогих предпочтений соответствует рассмотрениям следующего раздела 2).

Результаты, по сути, различаются для двух вариантов: большей или меньшей благожелательности к кандидату 1 со стороны участника, голосующего вторым, по сравнению с кандидатом от третьего голосующего участника. А именно, предпочтения между остальными кандидатами могут устанавливаться произвольно, единственное, что в первом варианте для 2-го игрока кандидат 1 лучше кандидата 3, во втором варианте для 2-го игрока кандидат 1 хуже кандидата 3. Таким образом, получаем множество различных игр, т.е. наборов предпочтений:

$$U_1(1) > U_1(a^1) > U_1(b^1) > U_1(c^1),\ a^1, b^1, c^1 \in \{2,3,4\}; \quad (\mathbf{I}): U_2(1)>U_2(3)$$
$$U_2(2) > U_2(a^2) > U_2(b^2) > U_2(c^2),\ a^2, b^2, c^2 \in \{1,3,4\};$$
$$U_3(3) > U_3(a^3) > U_3(b^3) > U_3(c^3),\ a^3, b^3, c^3 \in \{1,2,4\}.$$
$(\mathbf{II})$: $U_2(3)>U_2(1)$

Задача: Определить условия, при которых 1-й игрок может обеспечить избрание кандидата 1 в каждом из этих случаев.

Так как задача рассматривается относительно игрока, который ходит первым, то нам неважно ранжирование его предпочтений. Для определённости везде будем считать предпочтения 1-го игрока заданными в следующем порядке: 1, 2, 3, 4.

Результаты для задачи без неопределённости в предпочтениях

Утверждение 1.1. Для избрания кандидата 1 в предположении (**I**), т.е. $U_2(1)>U_2(3)$, необходимо и достаточно, чтобы он не был наихудшим для 3-го игрока.

Доказательство.

Достаточность нетрудно проверить рассмотрением всех возможных вариантов предпочтений игроков, задающих конкретную игру. Для удобства обозначения ходов игроков жирным шрифтом будем выделять кандидатов, на которых соответствующие игроки накладывают вето при стратегии первого, обеспечивающей избрание кандидата 1.

Пусть условие **Утверждения 1.1** выполнено. Обеспечивает ли оно избрание кандидата 1?

Начнём с исследования игры со следующими соотношениями между функциями выигрыша.

Игра 1:

$$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4),$$
$$U_2(2) > U_2(4) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3}),$$
$$U_3(3) > U_3(2) > U_3(1) > U_3(\mathbf{4}).$$

Покажем, что при ветовании 1-м игроком кандидата 2 (выделен жирным шрифтом) голосование остальных будет соответствовать ветованию* наихудших для них кандидатов. Действительно, пусть 1-й игрок ветует

* Напомним, что ветуемый кандидат выделяется жирным шрифтом в строке предпочтений ветующего игрока

кандидата 2. 2-му игроку остаётся наложить вето на кандидата 3, потому что в противном случае именно этот, самый худший для него кандидат, окажется избранным (не будучи заветован 3-м игроком). А в ситуации, когда заветованы кандидаты 2 и 3 , 3-й игрок наложит вето на кандидата 4 (так как у 3-го игрока кандидат 4 – самый худший по предпочтениям). В итоге, получаем, что стратегия заветовать кандидата 2 для 1-го игрока обеспечивает избрание кандидата 1 в этом примере функций предпочтения.

Далее схематично изложим разбор примеров для всех функций предпочтения 2-го и 3-го игроков. Там, где стратегия 1-го игрока – не единственная, будем приводить две возможные схемы в два столбика, выделяя жирным шрифтом разных кандидатов для различных стратегий.

Рассуждения для следующих примеров игр 2-11 полностью аналогичны проведённым выше для игры 1: 2-й и 3-й игроки ветуют наихудших из оставшихся незаветованных кандидатов. Заметим, что в этом случае информированность 2-го и 3-го игроков о предпочтениях друг друга не важна для 1-го игрока (может им не использоваться).

Игра 2:

$U_1(1) > U_1(2) > U_1(\mathbf{3}) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(1) > U_2(\mathbf{4}) > U_2(3)$, $U_2(2) > U_2(1) > U_2(4) > U_2(\mathbf{3})$,
$U_3(3) > U_3(4) > U_3(1) > U_3(\mathbf{2})$;

Игра 3:

$U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(4) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3})$,
$U_3(3) > U_3(4) > U_3(1) > U_3(\mathbf{2})$;

Игра 4:

$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4)$,
$U_2(2) > U_2(1) > U_2(4) > U_2(\mathbf{3})$,
$U_3(3) > U_3(2) > U_3(1) > U_3(\mathbf{4})$;

Игра 5:

$U_1(1) > U_1(2) > U_1(\mathbf{3}) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(1) > U_2(3) > U_2(\mathbf{4})$, $U_2(2) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3}) > U_2(4)$,
$U_3(3) > U_3(4) > U_3(1) > U_3(\mathbf{2})$;

Игра 6:

$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(4) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3})$,
$U_3(3) > U_3(1) > U_3(\mathbf{4}) > U_3(2)$, $U_3(3) > U_3(1) > U_3(4) > U_3(\mathbf{2})$;

Игра 7:

$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(4) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3})$,
$U_3(3) > U_3(1) > U_3(2) > U_3(\mathbf{4})$, $U_3(3) > U_3(1) > U_3(\mathbf{2}) > U_3(4)$;

Игра 8:

$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(1) > U_2(4) > U_2(\mathbf{3})$,
$U_3(3) > U_3(1) > U_3(\mathbf{4}) > U_3(2)$, $U_3(3) > U_3(1) > U_3(4) > U_3(\mathbf{2})$;

Игра 9:

$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3}) > U_2(4)$,
$U_3(3) > U_3(1) > U_3(\mathbf{4}) > U_3(2)$, $U_3(3) > U_3(1) > U_3(4) > U_3(\mathbf{2})$;

Игра 10:

$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3}) > U_2(4)$,
$U_3(3) > U_3(1) > U_3(2) > U_3(\mathbf{4})$, $U_3(3) > U_3(1) > U_3(\mathbf{2}) > U_3(4)$;

Игра 11:

$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4)$, $U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(\mathbf{4})$,
$U_2(2) > U_2(1) > U_2(4) > U_2(\mathbf{3})$,
$U_3(3) > U_3(1) > U_3(2) > U_3(\mathbf{4})$, $U_3(3) > U_3(1) > U_3(\mathbf{2}) > U_3(4)$.

Однако в следующей игре 2-й голосующий отводит не худшего для себя кандидата, пользуясь информированностью о предпочтениях 3-го и прогнозируя его выбор (а иначе кандидат 1 не может быть избран).

Игра 12:

$$U_1(1) > U_1(\mathbf{2}) > U_1(3) > U_1(4),$$
$$U_2(2) > U_2(1) > U_2(\mathbf{3}) > U_2(4),$$
$$U_3(3) > U_3(2) > U_3(1) > U_3(\mathbf{4}).$$

Стратегия 1-ого игрока заключается в наложении вето таким образом, что 2-му игроку становится наиболее выгодным избрание кандидата 1.

Итак, разобраны все возможные в условиях **Утверждения 1.1** конфигурации. В каждой результатом игры является избрание кандидата 1. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть условие **Утверждения 1.1** не выполнено. Построим пример, который доказывает, что в этом случае избрание кандидата 1 не обеспечено.

Игра 13:

$$U_1(1) > U_1(2) > U_1(3) > U_1(4),$$
$$U_2(2) > U_2(4) > U_2(1) > U_2(3),$$
$$U_3(3) > U_3(2) > U_3(4) > U_3(1).$$

Все возможные варианты развития игры 13 следующие:

- если x_1=2, то x_2=3 и x_3=1 - избирается кандидат 4,
- в остальных случаях: x_1=1,4 или 3 получим соответственно x_2=3 или 1, а x_3=1 или 4 (кто остался), т.е. избирается кандидат 2.

Ни в одном из вариантов кандидат 1 не избирается.

Что и требовалось доказать.

В дальнейшем будем опускать доказательства, так как все они проходят по аналогичной схеме.

Утверждение 1.2. Для избрания кандидата 1 в предположении (**II**), т.е. $U_2(1)<U_2(3)$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно:

1. кандидат 1 не был наихудшим для 2-го игрока и

2. для 3-го игрока кандидат 2 являлся наименее предпочтительным.

На основании анализа полученных результатов можно видеть, что из 36 вариантов соотношений между выигрышами 2-го и 3-го игроков только в 14 побеждает кандидат 1, причем, в 12 случаях в предположении (**I**) и в двух – в предположении (**II**). Таким образом, при рассмотренных правилах голосования 1-му игроку лучше, чтобы 2-й ход был у участника, более расположенного к его кандидату (в этом случае итог голосования не зависит от отношения 2-го и 3-го игроков к кандидатам друг друга). Поэтому для 1-го игрока хорошо было бы иметь возможность установить порядок ходов при голосовании.

Из утверждений 1.1 и 1.2 вытекает следующее

Утверждение 1.3. Если 1-й игрок формирует порядок ходов при голосовании, то для избрания кандидата 1 необходимо и достаточно, чтобы существовал игрок (голосующий участник), для которого кандидат 1 был предпочтительнее кандидата от другого голосующего участника, а для другого игрока кандидат 1 не был наихудшим.

В условиях утверждения 1.3 кандидат 1 побеждает в 15 случаях.

2. Постановка задачи для игроков с неполностью определёнными предпочтениями. Отметим, что в реальной ситуации трудно предпочесть одного кандидата другому, если это не сам игрок (в нашем случае кандидат, которого представляет голосующий) или же если кандидат представляет интересы нескольких групп (например, одной из них более важен опыт кандидата, а другой его «связи»). В таком случае в предпочтениях игрока может присутствовать неопределённость в собственных интересах. Неопределённость предполагает невозможность игрока указать более предпочтительного для себя кандидата в одной из пар. Обозначается как $U^*_i(a) <> U^*_i(c)$ (к ситуации с неполностью определёнными предпочтениями можно отнести и неоднозначность функции выигрыша, т.е. существование у неё одинаковых значений).

Подобная неопределённость в предпочтениях голосующего может быть вызвана, например, наличием векторной оценки кандидатов. Предположим, что каждый кандидат оценивается по двум критериям V и W, а каждая из компонент V и W вектор-функции выигрыша аналогична функции выигрыша из игры без неопределённости в предпочтениях. Тогда наличие двух критериев оценки кандидатов может не позволить игроку однозначно определить свои предпочтения.

Данная модель представима в виде двухкритериальной игры в нормальной форме $\langle X_i, u_i^*, i \in N \rangle$ с $X_i = \{1,2,3,4\}$ – множеством стратегий игрока i, $N = \{1,2,3\}$ – множеством избирателей и функциями выигрыша $u^*_i(x) = U^*_i(p(x_1,x_2,x_3)) = (V_i(p(x_1,x_2,x_3)), W_i(p(x_1,x_2,x_3)))$, где $p(x_1,x_2,x_3)$ – функция голосования, определяющая правила избрания кандидата в зависимости от выбора (по правилу вето) каждого из игроков, а V_i и W_i – критерии оценки выбранного кандидата игроком i. Переход от указанной игры в нормальной форме к рассматриваемой игре с фиксированным порядком ходов производится независимо от функций выигрыша участников (так же, как для постановки из раздела 1).

Для исходной постановки естественно, что собственный кандидат у каждого из голосующих строго лучше других. Поскольку у 1-го игрока остальные предпочтения не важны, то исследуем случаи, когда невозможность сравнения присутствует только у второго и третьего игроков (причем собственный кандидат лучше строго). Как и прежде хотим выяснить, может ли 1-й игрок в такой игре обеспечить избрание кандидата 1, т.е. найдём условия, гарантирующие 1-му наилучший исход выборов при любом возможном значении неопределенности. Относительно 2-го игрока при наличии у 3-го неопределенности сделаем предположение, что он придерживается осторожного поведения – не рискует в ситуациях, когда он не уверен в исходе игры.

Отличающиеся по сути результаты в этой игре также получаются для двух вариантов:

$U^*_1(1) > U^*_1(a^1) > U^*_1(b^1) > U^*_1(c^1),\ a^1, b^1, c^1 \in \{2,3,4\};$ (I): $U^*_2(1) > U^*_2(3)$

$U^*_2(2) > U^*_2(a^2)\ ?\ U^*_2(b^2)\ ?\ U^*_2(c^2),\ a^2, b^2, c^2 \in \{1,3,4\};$

$U^*_3(3) > U^*_3(a^3)\ ?\ U^*_3(b^3)\ ?\ U^*_3(c^3),\ a^3, b^3, c^3 \in \{1,2,4\}.$ (II): $U^*_2(3) > U^*_2(1)$

или

$U^*_2(3) <> U^*_2(1)$

Здесь на месте любого из знаков “?” может стоять “$<>$”, обозначающее отсутствие предпочтительности между кандидатами или неопределенность предпочтений. При этом в ситуации типа $U_i(a) > U_i(b) > U_i(c) <> U_i(d)$ считаем, что для данного игрока и кандидат c, и кандидат d являются самыми невыгодными, а в ситуации, когда задана неопределённость типа $U_i(a) > U_i(b) <> U_i(c) > U_i(d)$, полагаем, что для i-го игрока кандидат a предпочтительнее кандидатов c и b, но кандидат d хуже их всех.

Результаты для задачи с неполностью определёнными предпочтениями

Утверждение 2.1. При возможной неопределенности в предпочтениях игроков между чужими кандидатами, для избрания кандидата 1 в предположении (**I**), т.е. $U_2(1)>U_2(3)$, необходимо и достаточно, чтобы кандидат 1 не был наихудшим для 3-его игрока, ни как единственный, ни в случае неопределённости (т.е. если $U^*_3(a) > U^*_3(b) > U^*_3(c) <> U^*_3(d)$, то c и $d \neq 1$).

*Данное условие обобщает условие, которое было в **Утверждении 1.1** на случай неполностью определённых предпочтений.*

Таким образом, предположение (**I**) само по себе является, как и в случае без неопределенностей из раздела 1, выгодным для 1-го игрока.

Утверждение 2.2. При возможной неопределенности в предпочтениях игроков между чужими кандидатами, для избрания кандидата 1 в предположении (**II**), т.е. $U_2(1)<U_2(3)$ или же $U_2(1)<>U_2(3)$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно:

1. кандидат 1 не был наихудшим ни для 2-го, ни для 3-го игроков, причем как в строгом смысле (единственности), так и в нестрогом смысле (т.е. не может быть неопределенности в двух местах и, если $U^*_i(a) > U^*_i(b) > U^*_i(c) <> U^*_i(d)$, то c и $d \neq 1$, $i=2,3$), и
2. для 3-го игрока кандидат 2 был наименее предпочтительным (строго или нет).

*Как и для игры с полностью определёнными предпочтениями в предположении (**II**), здесь требуются более жёсткие условия. Не достаточно только 1, но дополнительно должно быть выполнено условие 2.*

Объединяя в одно предположения (I) и (II) в условиях, когда 1-й игрок может выбирать, кто из голосующих делает следующий ход, получим, как следствие утверждений 2.1 и 2.2,

Утверждение 2.3. В случае возможной неопределенности в предпочтениях игроков между чужими кандидатами, для того чтобы 1-й игрок мог обеспечить избрание кандидата 1 при условии, что он формирует порядок ходов 2-го и 3-го при голосовании, необходимо и достаточно, чтобы для обоих этих игроков кандидат 1 не был наихудшим (как строго, так и не строго), а для одного из них был строго лучше, чем кандидат от другого игрока.

Заключение. В данной работе были рассмотрены два варианта выборов по правилу ветования: тайное и открытое голосование. Для первого варианта была показана его непригодность к поставленной задаче.

Для выборов с открытым голосованием были исследованы две модели: в условиях определённых и неполностью определённых предпочтений игроков. Последняя была формализована в виде игры с несколькими критериями. Для каждой из моделей, в зависимости от соотношения между предпочтениями игроков, выявлены необходимые и достаточные условия избрания кандидата игрока, делающего первый ход. Из полученных условий, в частности, видно, что для 1-го игрока гораздо больше шансов обеспечить избрание своего кандидата, если у него есть возможность дать второй ход тому из партнеров, кто лучше относится к его кандидату.

Литература

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005 г.
2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М: Мир, 1985.
3. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.