**Меченов А.С.**

# Вариационные задачи для построения псевдорешений линейных интегральных уравнений

В работах [1], [2] рассматривалась задача оценивания псевдорешения (параметров) линейных функциональных уравнений первого рода типа систем линейных алгебраических уравнений с различными видами детерминированных и случайных ошибок в исходной информации. Рассмотрим следующий более сложный тип линейных функциональных уравнений [3] - линейные интегральные уравнения. Известно, что задача вычисления решения линейного интегрального уравнения первого рода относится к некорректно поставленным задачам [4], тогда как решение линейного интегрального уравнения второго рода вычисляется корректным образом [5]. Данная работа посвящена решению проблемы вычисления псевдорешений таких уравнений, имеющих неслучайные пассивные или активные ошибки ядра и неслучайные пассивные ошибки правой части. Аналогично [1], рассмотрим сначала корректную задачу.

## 1- О псевдорешениях линейного интегрального уравнения второго рода.

**Предположение 1.** *Будем исходить из следующего линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода* [5]:

$$\zeta - \lambda K\zeta = \vartheta \equiv \zeta(x) - \lambda\int_a^b \kappa(x,s)\zeta(s)ds = \vartheta(x), x \in [a,b], \tag{1}$$

*с невырожденным достаточно гладким без особенностей ядром. Это соотношение будем считать выдержанным точно. Далее предполагаем, что константа $\lambda$ известна точно и не принадлежит спектру интегрального оператора с ядром $\kappa(x,s)$.*

### a - *Псевдорешение при детерминированных пассивных ошибках.*

Рассмотрим уравнение (1) в неслучайных пассивных ошибках измерений правой части и ядра.

**Предположение 2**. *Будем исходить из следующей линейной модели пассивных наблюдений для линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода* (1) *с неслучайной пассивной ошибкой измерений ядра и правой части принадлежащей* $L_2$

$$\begin{gathered} y = \zeta - \lambda K\zeta + e \equiv y(x) = \zeta(x) - \lambda\int_a^b \kappa(x,s)\zeta(s)ds + e(x), x \in [a,b], e(x) \in L_2[a,b], \\ k(x,s) = \kappa(x,s) + c(x,s), c(x,s) \in L_2\{[a,b]\times[a,b]\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Известно, что в том случае, когда однократно измерена с ошибкой только правая часть (2) - $\tilde{y}$, то псевдорешение вычисляется из стандартной вариационной задачи (аналога метода наименьших квадратов)

$$z = arg \inf_{\zeta} \|\zeta - \lambda K\zeta - \tilde{y}\|^2_{L_2} .$$

Рассмотрим сначала задачу построения псевдорешения в том случае, когда и ядро и правая часть измерены с ошибкой.

**Задача 1.** *Зная одну реализацию приближенной правой части* $\tilde{y}$ *и приближенного ядра* $\tilde{K}$ *модели* (2), *вычислить псевдорешение таким образом, чтобы сумма квадратов норм уклонений приближенных исходных данных от искомых для уравнения* (1) $\zeta - \lambda K\zeta = \vartheta$ *была бы минимальна:*

$$z = Arg \inf_{\zeta} \left\{ \inf_{K,\vartheta:\zeta-\lambda K\zeta=\vartheta} \left[ \|\tilde{y} - \vartheta\|^2_{L_2} + \left\|\lambda\tilde{K} - \lambda K\right\|^2_{L_2} \right] \right\}. \tag{3}$$

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия Задачи 1. Тогда вариационная задача* (3) *для построения псевдорешения преобразуется в задачу*

$$z = arg \left\{ \inf_{\zeta} \frac{\left\|\zeta - \lambda\tilde{K}\zeta - \tilde{y}\right\|^2_{L_2}}{1 + \|\zeta\|^2_{L_2}} \equiv S^2 \right\} \tag{4}$$

*и псевдорешение* (3) $z$ *уравнения* (2) *вычисляется из уравнения:*

$$\left(\left(I - \lambda\tilde{K}\right)^* \left(I - \lambda\tilde{K}\right) - S^2 I\right) z = \left(I - \lambda\tilde{K}\right)^* \tilde{y} .$$

**Доказательство.** Переходя от интеграла к суммам Дарбу, т.е. проводя аппроксимацию (не теряя общности, на равномерных сетках), вместо уравнения (1) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathrm{I}_t \zeta_h - \lambda \mathrm{K}_{th} \zeta_h = \vartheta_t , \tag{1'}$$

где $\mathrm{K}_{th}, \mathrm{I}_t$ - матрицы такие, что [6]

$$\sqrt{th}\,\kappa(x_t, s_h) = \mathrm{K}_{th} + O(t,h), t = h = x_i - x_{i-1}, s_i = x_i, i = \overline{1,n}; \mathrm{I}_t = \sqrt{t}\mathrm{I};$$

и разбиение отрезка $[a,b]$ по $x$ и $s$ идентично, $\vartheta_t$ - вектор такой, что

$$\sqrt{t}\vartheta(x_t) = \vartheta_t + O(t), \zeta(s_h) = \zeta_h + O(h);$$

$\zeta_t \equiv \zeta_h$ - соответственно вектора решения на сетке $t$ и сетке $h$. Считая ошибки аппроксимации много меньшими ошибок измерений [7] и поэтому, считая их частью ошибок исходных данных, рассмотрим вариационную задачу вычисления псевдорешения с приближенной известной правой частью и матрицей $\mathrm{y}_t, \tilde{\mathrm{K}}_{th}$ системы линейных алгебраических уравнений (1') (аппроксимированных также как и (1'))

$$\mathbf{z}_h = arg \min_{\zeta_h}\left\{ \min_{\{\mathbf{K}_{th},\vartheta_t:\mathbf{I}_t\zeta_h-\lambda\mathbf{K}_{th}\zeta_h=\vartheta_t\}}\left[\left\|\tilde{\mathbf{y}}_t-\vartheta_t\right\|_f^2+\left\|\lambda\tilde{\mathbf{K}}_{th}-\lambda\mathbf{K}_{th}\right\|_f^2\right]\right\}.$$

Её решение получено в [2] и оно минимизирует функционал:

$$S_h^2 = \min_{\zeta_h}\frac{\left\|\tilde{\mathbf{y}}_t-\mathbf{I}_t\zeta_h+\lambda\tilde{\mathbf{K}}_{th}\zeta_h\right\|_f^2}{1+\left\|\zeta_h\right\|_f^2}.$$

Дифференцируя его, получим, что для вычисления оценки решения необходимо решить уравнение:

$$\left(\left(\mathbf{I}_t-\lambda\tilde{\mathbf{K}}_{th}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{I}_t-\lambda\tilde{\mathbf{K}}_{th}\right)-\frac{\left\|\mathbf{I}_t\zeta_h-\lambda\tilde{\mathbf{K}}_{th}\zeta_h-\tilde{\mathbf{y}}_t\right\|_f^2}{\left(1+\left\|\zeta_h\right\|_f^2\right)}\mathbf{I}\right)\zeta_h=\left(\mathbf{I}_t-\lambda\tilde{\mathbf{K}}_{th}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}}_t.$$

Переходя к пределу при $t\to 0$, $h\to 0$, то есть переходя от сумм Дарбу снова к интегралам, запишем полученное выражение в функциональном виде, т.е. как решение вариационной задачи (4).

**Замечание 1.** В том случае, когда $\inf_{\zeta}\left\|\zeta-\lambda\tilde{K}\zeta-\tilde{y}\right\|_{L_2}^2=0$, вариационная задача (4) имеет вид

$$z = arg \inf_{\zeta}\left\|\zeta-\lambda\tilde{K}\zeta-\tilde{y}\right\|_{L_2}^2.$$

Данный способ применим для получения псевдорешения линейных интегральных уравнений второго рода с неточно измеренным ядром и правой частью численными методами.

**b** - ***Псевдорешение при детерминированных активных ошибках.***

Рассмотрим методы вычисления псевдорешения при неслучайных активных погрешностях, возникающих в процессе реализации точно задаваемого ядра, и пассивных погрешностях, возникающих при измерении правой части.

**Предположение 3**. *Будем исходить из следующей линейной модели активных наблюдений для линейного интегрального уравнения второго рода* (1)

$$\inf_{\zeta}\left\|\zeta-\lambda\tilde{K}\zeta-\tilde{y}\right\|_{L_2}^2=0 \qquad (5)$$

*где* $j(x,s)\in L_2\{[a,b]\times[a,b]\}$ *ошибки реализации точно задаваемого ядра* $\tilde{K}$, $\left\|\tilde{K}-K\right\|=\mu$.

Ядра, задаваемые точно, но реализуемые с ошибкой (активный эксперимент [1]), ранее не рассматривались. Выпишем формальную формулировку построения псевдорешения.

**Задача 2.** *Зная приближенную правую часть* $q$, *норму ее ошибки* $\|\tilde{e}\|_{L_2} = \sigma$, *точно задаваемое ядро* $\kappa(x,s)$ *и норму ошибки его реализации* $\|\tilde{J}\|_{L_2} = \rho$ *модели* (5), *вычислить псевдорешение*.

Ввиду того, что полная ошибка правой части $u = \tilde{q} - \zeta + \lambda K\zeta = -\lambda J\zeta + e$ зависит от искомого решения, то задача минимизации не имеет решения стандартным методом, т.е. как $z_\rho = Arg \inf\limits_{\zeta} \|\tilde{q} - \zeta + \lambda K\zeta\|^2_{L_2}$. Для ее решения необходимо рассматривать эквивалент статистического подхода [1]. Воспользовавшись результатом [1], построим минимизируемый функционал способом эквивалентным методу максимума правдоподобия, реализовав его для конечно-разностного случая.

Аппроксимация линейного интегрального уравнения (5) аналогично предыдущему приводит к модели:

$$\begin{gathered}
\sqrt{t}\tilde{q}_{x_i} = \sqrt{t}\zeta_{x_i} - \lambda\sqrt{t}\sum_{j=1}^{n} h\left(\kappa(x_i,s_j) + \tilde{J}(x_i,s_j)\right)\zeta(s_j) + \sqrt{t}e_{x_i}, i = \overline{1,n}; \\
\sum_{i=1}^{n} \tilde{e}^2(x_i)t + O(t) = \sigma^2, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{J}^2(x_i,s_j)th + O(t,h) = \rho^2.
\end{gathered} \tag{5'}$$

Построим на дискретных сетках функционал аналогичный тому, что возникает при оценивании параметров методом максимума правдоподобия [8] (для простоты будем минимизировать минус удвоенный логарифм функции правдоподобия, без несущественной константы [1])

$$\mathbf{z}_h = arg \inf_{\zeta_h}\left\{ n\frac{\left|\tilde{\mathbf{q}}_t - \mathbf{I}\zeta_h + \lambda \mathbf{K}_{th}\zeta_h\right|^2}{\sigma^2 + \lambda^2\rho^2|\zeta_h|^2/n} + n\ln\left(\sigma^2 + \lambda^2\rho^2|\zeta_h|^2/n\right)\right\}.$$

Вычисленное таким образом на дискретной сетке псевдорешение учитывает активный характер ошибок ядра.

Рассмотрим теперь линейные интегральные уравнения первого рода, процесс решения которых, требует применения метода регуляризации.

**2- О регуляризованном псевдорешении линейного интегрального уравнения первого рода с измеренной с ошибками правой частью.**

**Предположение 4.** *Будем исходить из следующего линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода*:

$$K\zeta = \vartheta \equiv \int_a^b \kappa(x,s)\zeta(s)ds = \vartheta(x), x \in [c,d], \tag{6}$$

*с невырожденным достаточно гладким без особенностей ядром, обеспечивающим условие единственности решения. Это соотношение будем считать выдержанным точно.*

Интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$K\zeta = \vartheta \equiv \int_a^x \kappa(x,s)\zeta(s)ds = \vartheta(x), x \in [a,b]$$

будем рассматривать как уравнение Фредгольма, соответственно дополняя ядро нулем в области $s>x$.

Проблема вычисления решения этого уравнения относится к числу некорректных по Адамару проблем. Основным в подходах к решению этой задачи при известной с ошибкой правой частью является то, что приближенное решение в принципе не вычисляется без информации о норме ошибки правой части [4], [9] или о норме решения [12].

Изложим эти подходы в том случае, когда правая часть измеряется с ошибкой, с тем чтобы в дальнейшем сравнивать их с полученными результатами также и для ядра измеренного или заданного с ошибкой. Итак, будем предполагать, что только правая часть уравнения (6) подвержена неслучайным ошибкам наблюдений.

**Предположение 5.** *Будем исходить из следующей линейной модели пассивных наблюдений для уравнения* (6) *с неслучайной пассивной ошибкой измерений правой части*

$$y(x) = \int_a^b \kappa(x,s)\zeta(s)ds + e(x), x \in [c,d], e(x) \in \ell_2[c,d], \tag{7}$$

*где известную измеренную с ошибкой функцию* $y(x)$ *будем считать принадлежащей пространству* $\ell_2[c,d]$.

Изложим необходимую для дальнейшего суть метода регуляризации [4], [11] и постановку соответствующих вариационных задач [9], [11], [12].

***а - Регуляризованное псевдорешение.***

Рассмотрим метод, использующий известную норму ошибок правой части для вычисления псевдорешения (метод невязки [9]).

**Предположение 6.** *Пусть множество допустимых псевдорешений* $V$ *уравнения* (7) *задается неравенством*

$$V = \left\{\zeta : \|y - K\zeta\|_{\ell_2}^2 \le \sigma^2\right\}, \tag{8}$$

*где величина нормы ошибки σ заранее известна.*

Задача построения нормального псевдорешения как аргумента минимума функционала [13]

$$\Gamma[\zeta]=\|\zeta\|_{L_2}^2,$$

на множестве допустимых псевдорешений $U$ имеет вид

$$z_0=\arg\inf_{\zeta:\|y-K\zeta\|_{L_2}^2\le\sigma^2}\|\zeta\|_{L_2}^2,$$

но такое псевдорешение обладает только слабой сходимостью к точному при $\sigma\to 0$. Поэтому расстояние приближения $z(s)$ от неизвестной функции $\zeta(s)$ будем измерять в пространстве $W_2^{(1)}[a,b]$. Отбор регуляризованных псевдорешений (то есть сильно сходящихся к точному решению при $\sigma\to 0$) опирается на выбор множества достаточно гладких псевдорешений [4] (множества в пространстве $W_2^{(1)}[a,b]$ [10]).

**Задача 3.** *Зная приближенную правую часть* $\tilde{y},\|\tilde{y}-\vartheta\|=\sigma$, *точно заданное невырожденное ядро K уравнения* (7), *значение σ, вычислить регуляризованное псевдорешение как аргумент минимума стабилизирующего функционала* [4]

$$\Omega[\zeta]=\|\zeta\|_{W_2^{(1)}}^2,$$

*на множестве допустимых псевдорешений* $U$ (8)

$$z_\sigma=\arg\inf_{\zeta:\|y-K\zeta\|_{L_2}^2\le\sigma^2}\|\zeta\|_{W_2^{(1)}}^2. \tag{9}$$

(такой подход последовательно развивался в работах [9], [11], [14]). Доказательство того факта, что полученное таким образом регуляризованное псевдорешение устойчиво сходится к точному решению при σ→0 и что этот способ является квазиоптимальным имеется в [11].

Выпишем необходимый в дальнейшем метод решения и уравнение Эйлера. Поскольку инфинум достигается на границе области [14], то неравенство в (9) можно заменить на равенство. Далее, применяя метод неопределенного множителя Лагранжа, перейдем к задаче

$$\{z_\sigma;\lambda\}=\arg\inf_{\zeta,\lambda}\left\{M^\lambda[K,\zeta,\tilde{y}]=\|\zeta\|_{W_2^{(1)}}^2+\lambda\left(\|\tilde{y}-K\zeta\|_{L_2}^2-\sigma^2\right)\right\}.$$

Необходимым условием минимума функционала $M^\lambda[\zeta]$ будет равенство нулю его первой вариации по $\zeta$ и по $\lambda$: $\Delta M^\lambda[\zeta]=0$, что приводит к уравнению Эйлера:

Необходимым условием минимума функционала $M^{\lambda}[\zeta]$ будет равенство нулю его первой вариации по $\zeta$ и по $\lambda$: $\Delta M^{\lambda}[\zeta]$=0, что приводит к уравнению Эйлера:

$$\begin{cases} \left(\lambda K^{*}K + L\right)\zeta_{\lambda} = \lambda K^{*}\tilde{y} \\ \left\|\tilde{y} - K\zeta_{\lambda}\right\|_{L_2}^{2} = \sigma^{2} \end{cases}, \tag{10}$$

где $L$ - оператор Штурма-Лиувилля с граничными условиями типа равенства нулю искомого решения и (или) его производных:

$$\zeta^{(i)}(a) = \zeta^{(i)}(b) = 0, i = \overline{0, l-1}.$$

Если $\inf r(\lambda) = r(\infty) < \sigma$, то имеется по меньшей мере одно решение задачи (9) [11] (в противном случае оно вычисляется при $\lambda \to \infty$ [17]).

***b* - Регуляризованное квазирешение.**

Рассмотрим также метод, использующий известную норму решения для вычисления псевдорешения (метод квазирешения [12]).

**Предположение 7.** *Пусть множество допустимых квазирешений $V$ уравнения* (7) *задается неравенством*

$$V = \left\{\zeta : \left\|\zeta\right\|_{W_2^{(1)}}^{2} \le \gamma^{2}\right\},$$

*где $\gamma$ - априори известное значение нормы точного решения.*

**Задача 4.** *Зная одну реализацию приближенной правой части* $\tilde{y}, \left\|\tilde{y} - \vartheta\right\| = \sigma$, *точно заданное невырожденное ядро $K$ уравнения* (7), *значение $\gamma$, вычислить регуляризованное квазирешение как аргумент минимума функционала невязки* $\left\|\tilde{y} - K\zeta\right\|_{L_2}^{2}$ *на множестве* $V$ :

$$z_{\gamma} = \arg \inf_{\zeta : \left\|\zeta\right\|_{W_2^{(1)}}^{2} \le \gamma^{2}} \left\|\tilde{y} - K\zeta\right\|_{L_2}^{2}.$$

Решение этой задачи аналогично вышеизложенному и приводит только к изменению уравнения для вычисления множителя Лагранжа. Однако такое квазирешение в принципе не связано с нормой ошибки правой части $\sigma$.

Поскольку в [20], [2] построено нормальное псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений, в котором учтены и ошибки матрицы, то полученный результат можно перенести на задачу построения регуляризованного псевдорешения и регуляризованного квазирешения линейных интегральных уравнений первого рода с ядром и правой частью, измеренными с ошибкой.

**3- Регуляризованные псевдорешения и квазирешения при неслучайных пассивных измерениях ядра и правой части.**

Так как на практике помимо ошибок измерения правой части, есть еще или пассивные ошибки измерения ядра или ошибки реализации задаваемого ядра, то прежде всего надо различать эти две задачи. Будем исходить из модели чисто пассивных неслучайных наблюдений (то есть будем предполагать, что ядро и правая часть подвержена ошибкам наблюдений). Этому вопросу уделялось достаточно много внимания [11], [14], [15].

**Предположение 8**. *Будем исходить из следующей линейной модели пассивных наблюдений* [16] *для линейного интегрального уравнения первого рода* (7) *с неслучайной ошибкой измерений ядра и правой части принадлежащей* $L_2$

$$
\begin{gathered}
y = K\zeta + e \equiv \int_a^b \kappa(x,s)\zeta(s)ds + e(x), x \in [c,d], e(x) \in L_2[c,d], \\
k(x,s) = \kappa(x,s) + c(x,s), s \in [a,b], c(x,s) \in L_2\{[c,d]\times[a,b]\}.
\end{gathered} \tag{11}
$$

***a* - *Регуляризованное псевдорешение.***

Построим метод, использующий известную норму неслучайных пассивных ошибок правой части и ядра для вычисления псевдорешения (метод расстояний [2]). Для этого сначала заново определим множество допустимых псевдорешений.

**Предположение 9.** *Пусть множество допустимых псевдорешений* $V$ *уравнения* (11) *задается неравенством*

$$
V = \left\{\zeta : \left\{ \inf_{\vartheta, K: K\zeta = \vartheta} \left[ \|y - \vartheta\|_{L_2}^2 + \|K - K\|_{L_2}^2 \right] \right\} \le \sigma^2 + \mu^2 \right\}, \tag{12}
$$

*где величины норм ошибок* $\sigma, \mu$ *заранее известны.*

**Задача 5.** *Зная по одной реализации приближенной правой части* $\tilde{y}, \|\tilde{y} - \vartheta\| = \sigma$ *и приближенного невырожденного ядра* $\tilde{K}, \|\tilde{K} - K\| = \mu$, *значения* $\sigma$, $\mu$; *вычислить регуляризованное псевдорешение модели* (11):

$$
z_\mu = \arg \inf_{\zeta \subset V} \|\zeta\|_{W_2^{(1)}}^2 \equiv \arg \inf_{\left\{\zeta : \inf\limits_{\{K, \vartheta : K\zeta = \vartheta\}} \left[ \|\tilde{y} - \vartheta\|_{L_2}^2 + \|\tilde{K} - K\|_{L_2}^2 \right] \le \sigma^2 + \mu^2 \right\}} \|\zeta\|_{W_2^{(1)}}^2 .
$$

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия Задачи 5. Тогда вариационная задача для построения регуляризованного псевдорешения преобразуется в задачу:*

$$z_\mu = \arg \inf_{\zeta: \frac{\|\tilde{K}\zeta - \tilde{y}\|^2_{L_2}}{1+\|\zeta\|^2_{L_2}} = \sigma^2+\mu^2} \|\zeta\|^2_{W_2^{(1)}} \tag{13}$$

*и регуляризованное псевдорешение уравнения* (11) *удовлетворяет уравнению Эйлера:*

$$\begin{cases} \left(\lambda\tilde{K}^*\tilde{K} + \left(1+\|\zeta_\lambda\|^2_{L_2}\right)L - \lambda\dfrac{\|\tilde{K}\zeta_\lambda - \tilde{y}\|^2_{L_2}}{1+\|\zeta_\lambda\|^2_{L_2}} I\right)\zeta_\lambda = \lambda\tilde{K}^*\tilde{y}, \\ \|\tilde{K}\zeta_\lambda - \tilde{y}\|^2_{L_2} = \left(\sigma^2+\mu^2\right)\left(1+\|\zeta_\lambda\|^2_{L_2}\right). \end{cases} \tag{14}$$

**Доказательство.** Переходя от интеграла к суммам Дарбу как в п 1. (т.е. проводя аппроксимацию), вместо уравнения (6) получим уравнение

$$\mathrm{K}_{th}\zeta_h = \vartheta_t. \tag{6'}$$

Считая ошибки аппроксимации много меньшими ошибок измерений [6] и поэтому пренебрегая ими, рассмотрим задачу

$$\mathrm{z}_{h\mu} = \arg \min_{\left\{\zeta_h: \left\{\min\limits_{\{\mathrm{K}_{th},\vartheta_t:\mathrm{K}_{th}\zeta_h=\vartheta_t\}} \|\tilde{\mathrm{y}}_t - \vartheta_t\|^2_t + \|\tilde{\mathrm{K}}_{th} - \mathrm{K}_{th}\|^2_t\right\} \le \sigma^2+\mu^2\right\}} \|\zeta_h\|^2_{W^{(1)}_{2,h}}.$$

Её решение получено в [2], [20]. С учетом того, что искомое значение псевдорешения достигается на границе множества, оно запишется в виде:

$$\mathrm{z}_{h\mu} = \arg \min_{\left\{\zeta_h: \frac{\|\tilde{\mathrm{y}}_t - \tilde{\mathrm{K}}_{th}\zeta_h\|^2_t}{1+\|\zeta_h\|^2_t} = \sigma^2+\mu^2\right\}} \|\zeta_h\|^2_{W^{(1)}_{2,h}}.$$

Переходя к пределу при $t\to 0$, $h\to 0$, то есть переходя от сумм Дарбу снова к интегралам, можно записать полученное выражение в виде интегральном. Решая эту вариационную задачу методом Лагранжа, имеем

$$\{z_\mu;\lambda\} = \arg \inf_{\zeta\lambda}\left\{\|\zeta\|^2_{W_2^{(1)}} + \lambda\left(\frac{\|\tilde{y} - \tilde{K}\zeta\|^2_{L_2}}{1+\|\zeta\|^2_{L_2}} - \left(\sigma^2+\mu^2\right)\right)\right\}.$$

Дифференцируя, получим, что для вычисления регуляризованного псевдорешения необходимо решить уравнение Эйлера (14) совместно с уравнением для вычис-

**Доказательство.** Зададимся последовательностью $\delta_k=\{\sigma_k,\mu_k\}$ такой, что $\|\tilde{y}_k-\vartheta\|_{L_2}=\sigma_k,\|\tilde{K}_k-K\|_{L_2}=\mu_k$ [19]. Пусть $\bar{\zeta}$ - точное решение. Учитывая определение элемента $z_{\delta_k}$, получим

$$\|z_{\delta_k}\|^2_{W_2^{(1)}}+\lambda_k\left(\frac{\|\tilde{y}_k-\tilde{K}_k z_{\delta_k}\|^2_{L_2}}{1+\|z_{\delta_k}\|^2_{L_2}}-\left(\sigma_k^2+\mu_k^2\right)\right)\le$$

$$\le\|\bar{\zeta}\|^2_{W_2^{(1)}}+\lambda_k\left(\frac{\|\tilde{y}_k-\tilde{K}_k\bar{\zeta}\|^2_{L_2}}{1+\|\bar{\zeta}\|^2_{L_2}}-\left(\sigma_k^2+\mu_k^2\right)\right).$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\|\tilde{K}_k\bar{\zeta}-\tilde{y}_k\|_{L_2}\le\sigma_k+\mu_k\|\bar{\zeta}\|_{L_2},$$

$$\|\tilde{K}_k z_{\delta_k}-\tilde{y}_k\|^2_{L_2}=\left(\sigma_k^2+\mu_k^2\right)\left(1+\|z_{\delta_k}\|^2_{L_2}\right),$$

имеем

$$0\le\lambda_k\frac{\left(\mu_k-\sigma_k\|\bar{\zeta}\|_{L_2}\right)^2}{1+\|\bar{\zeta}\|^2_{L_2}}\le\left(\|\bar{\zeta}\|^2_{W_2^{(1)}}-\|z_{\delta_k}\|^2_{W_2^{(1)}}\right)\left(\|\bar{\zeta}\|^2_{W_2^{(1)}}+\|z_{\delta_k}\|^2_{W_2^{(1)}}\right).$$

Откуда получим, что последовательность $z_{\delta_k},k=1,2,\ldots.$ ограничена сверху

$$\|z_{\delta_k}\|^2_{W_2^{(1)}}\le\|\bar{\zeta}\|^2_{W_2^{(1)}},k=1,2,\ldots. \tag{15}$$

Отсюда следует, что из последовательности $z_{\delta_k}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем считать, что $z_{\delta_k}\xrightarrow{сл}\hat{z}$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в неравенстве

$$\|Kz_{\delta_k}-\vartheta\|^2_{L_2}\le2\left(\sigma_k^2+\mu_k^2\|z_{\delta_k}\|^2_{L_2}\right)+\mu_k^2+\sigma_k^2\|z_{\delta_k}\|^2_{L_2}\le$$

$$\le2\left(\sigma_k^2+\mu_k^2\|z_{\delta_k}\|^2_{W_2^{(1)}}\right)+\mu_k^2+\sigma_k^2\|z_{\delta_k}\|^2_{W_2^{(1)}}\le2\left(\sigma_k^2+\mu_k^2\|\bar{\zeta}\|^2_{W_2^{(1)}}\right)+\mu_k^2+\sigma_k^2\|\bar{\zeta}\|^2_{W_2^{(1)}}$$

получим, что $\lim\limits_{\delta_k \to 0} \left\| K\hat{z}_{\delta_k} - \vartheta \right\|_{L_2} = \left\| K\hat{z} - \vartheta \right\|_{L_2} = 0$ и $\hat{z}$ является решением уравнения (7).

Тогда из (15) следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} \left\| z_{\delta_k} \right\|_{W_2^{(1)}} = \left\| \hat{z} \right\|_{W_2^{(1)}}$. Так как в гильбертовом пространстве $W_2^{(1)}$ из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость, то $\lim\limits_{k \to \infty} z_{\delta_k} = \hat{z}$ и в силу единственности $\hat{z} = \bar{\zeta}$.

**Замечание 2.**

**a.** Уравнение Эйлера для этой задачи отличается от уравнения Эйлера (10) прежде всего тем, что по отношению к оператору Штурма-Лиувилля $Lz = z - z''$ в стабилизирующем операторе этого уравнения

$$L_\delta z = \left(1 + \|z_\lambda\|^2\right) L - \lambda\left(\sigma^2 + \mu^2\right) I = \left(\left(1 + \|z_\lambda\|^2\right) - \lambda\left(\sigma^2 + \mu^2\right)\right) z - \left(1 + \|z_\lambda\|^2\right) z''$$

сглаживающая часть становится более весомой, а смещающая подавляется. Это согласуется со здравым смыслом: поскольку ядро несет в себе ошибку, то есть менее гладко чем точное, то для получения более качественного (гладкого) решения и следует увеличивать влияние сглаживающей части.

**b.** Кроме этого, уравнение для вычисления параметра регуляризации (множителя Лагранжа) отличается от ранее предлагавшихся [11], [14], [15], [19].Предложенные ранее авторами [11], [14], [15] методики и множество других относились к задаче с пассивными ошибками ядра и эти методики носили эвристический характер. Они не являлись итогом решения вариационных задач на минимизацию квадратичных функционалов на компактных множествах. В частности, в 1969 году, при обсуждении такой задачи с Яголой А.Г. автором была предложена достаточно очевидно похожая на неравенство $\left\| \widetilde{K}\zeta - \widetilde{y} \right\|_{\ell_2} \le \sigma + \mu \left\| \zeta \right\|_{\ell_2}$ формула вычисления параметра регуляризации уравнения Эйлера типа (10) из условия $\left\| \widetilde{K}\zeta_\lambda - \widetilde{y} \right\|_{\ell_2} = \sigma + \mu \left\| \zeta_\lambda \right\|_{\ell_2}$, которое конечно не следует ни из какой вариационной задачи, но было проверено на практике, и, как было показано в дальнейшем [15], после некоторых модификаций позволяет построить необходимую асимптотику, что и помогло решить ряд физических задач. Однако при этом постановка вариационной задачи (приводящая к построению регуляризованного псевдорешения) для ядра и правой части измеренных с ошибкой, не была разработана. Ее решение для систем линейных алгебраических уравнений было найдено только в [2]. Сравним полученный результат с тем, что предлагается в формуле принципа обобщенной невязки [14], [15], суть которого в решении следующего уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \left(\widetilde{K}^* \widetilde{K} + \alpha L\right)\zeta_\alpha = \widetilde{K}^* \widetilde{y}, \\ \left\| \widetilde{K}\zeta_\alpha - \widetilde{y} \right\|_{\ell_2} = \sigma + \mu \left\| \zeta_\alpha \right\|_{\ell_2} + \chi, \end{cases} \tag{16}$$

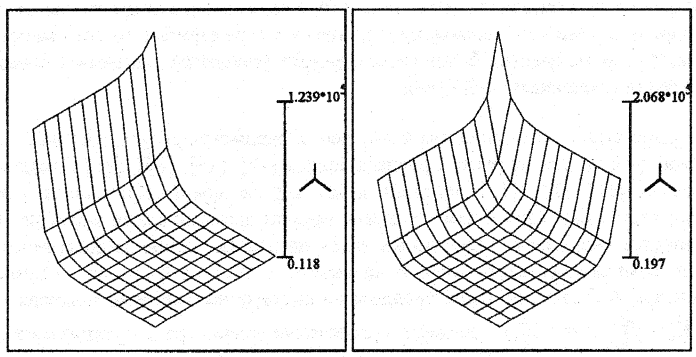
где $\chi$ - мера несовместности уравнения (11). Здесь для достижения той же цели (повышения гладкости решения) увеличивается значение параметра регуляризации $\alpha$ добавлением в уравнение типа (10) для его вычисления помимо $\mu\|\zeta_\alpha\|_{L_2}$ еще и меры несовместности. Знание ее не требуется для вычисления регуляризованного псевдорешения, так как выполняется следующее неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sigma+\mu\|\zeta_\lambda\|_{L_2}\right)^2=\sigma^2+\mu^2\|\zeta_\lambda\|_{L_2}^2+2\sigma\mu\|\zeta_\lambda\|_{L_2}\le$$
$$\le\sigma^2+\mu^2\|\zeta_\lambda\|_{L_2}^2+\mu^2+\sigma^2\|\zeta_\lambda\|_{L_2}^2=\left(\sigma^2+\mu^2\right)\left(1+\|\zeta_\lambda\|_{L_2}^2\right)=\left\|\tilde{K}\zeta_\lambda-\tilde{y}\right\|_{L_2}^2,$$

то

$$\sigma+\mu\|\zeta_\lambda\|_{L_2}\le\left\|\tilde{K}\zeta_\lambda-\tilde{y}\right\|_{L_2},$$

где равенство достигается только при $\mu=\sigma\|\zeta_\lambda\|_{L_2}$. Хотя величины $\|\zeta_\lambda\|_{L_2}$ и $\|\zeta_\alpha\|_{L_2}$ различаются, поскольку вычисляются из различных уравнений Эйлера (14) и (16), тем не менее некоторое представление о поведении обобщенной невязки и невязки псевдорешения в функции только $\sigma,\mu$ дает следующий рисунок.




sgr rps

Рис. 1. График квадрата обобщенной невязки (square general residues) (меру несовместности полагаем равной нулю):

$$\text{sgr}=sgr\left(\sigma\in\left[2^{-5},2^5\right],\mu\in\left[2^{-5},2^5\right],\|\zeta_\alpha\|_{L_2}=10=const\right)=\left(\sigma+\mu\|\zeta_\alpha\|_{L_2}\right)^2$$

и квадрата невязки псевдорешения (residues pseudo solution):

$$\text{rps}=rps\left(\sigma\in\left[2^{-5},2^5\right],\mu\in\left[2^{-5},2^5\right],\|\zeta_\lambda\|_{L_2}^2=100=const\right)=\left(\sigma^2+\mu^2\right)\left(1+\|\zeta_\lambda\|_{L_2}^2\right).$$

c. Величина норм ошибок - наиболее слабое звено в теории регуляризации, суммирование же квадратов норм двух ошибок уменьшает вероятность совершить ошибку при их оценке. Как известно [18], метод невязки несколько завышает значение параметра по отношению к оптимальному значению параметра.

**d.** В принципе несложно рассмотреть случай, когда в уравнении (11) имеется дополнительно и чисто регрессионная часть (например, в виде искомой константы), аналогично тому как это сделано в [2].

**e.** Доказательство теоремы можно построить также с помощью спектрального разложения Шмидта [4] и использования бесконечномерных матриц.

**f.** Данный подход применим к нелинейным интегральным уравнениям первого рода и к другим видам операторных уравнений.

***b - Регуляризованное квазирешение.***

Построим метод решения, использующий известную норму решения при неслучайных пассивных ошибках измерений правой части и ядра (обобщение метода регуляризованных квазирешений).

**Задача 6.** *Зная одну реализацию приближенной правой части* $\tilde{y}$ *и приближенного ядра* $\tilde{K}$ *модели* (11), *значение* $\gamma$, *ограничивающее множество допустимых квазирешений, вычислить регуляризованное квазирешение:*

$$z_\gamma = arg \inf_{\left\{\zeta:\|\zeta\|^2_{W_2^{(1)}}\le\gamma^2\right\}} \inf_{\{K,\vartheta:K\zeta=\vartheta\}}\left[\|\tilde{y}-\vartheta\|^2_{L_2}+\|\tilde{K}-K\|^2_{L_2}\right]. \qquad (17)$$

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия Задачи 6. Тогда вариационная задача для построения регуляризованного квазирешения преобразуется в*

$$z_\gamma = arg \inf_{\zeta:\|\zeta\|^2_{W_2^{(1)}}=\gamma^2} \frac{\|\tilde{K}\zeta-\tilde{y}\|^2_{L_2}}{1+\|\zeta\|^2_{L_2}}. \qquad (18)$$

*и регуляризованное квазирешение является устойчивым приближением к точному решению* (7).

**Доказательство.** Опять переходя от интеграла к суммам Дарбу, проведем те же вычисления, что и в теореме 2, и переходя от дискретной задачи к непрерывной имеем уравнение (18). Применяя метод Лагранжа с множителем $\alpha$, получим функционал

$$\{z_\gamma;\alpha\} = arg \inf_{\zeta,\alpha} \frac{\|\tilde{K}\zeta-\tilde{y}\|^2_{L_2}}{1+\|\zeta\|^2_{L_2}}+\alpha\left(\|\zeta\|^2_{W_2^{(1)}}-\gamma^2\right)$$

и, дифференцируя его, соответствующее уравнение Эйлера. Доказательство устойчивости регуляризованного квазирешения аналогично теореме 3.

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия Задач 5 и 6. Данные методы построения регуляризованного псевдорешения и квазирешения квазиоптимальны.*

Доказательство этих фактов мало чем отличается от доказательства Теоремы 65а [11] стр. 132.

**4- Об учете неслучайных активных ошибок в ядре.**

Построим методы вычисления решения при неслучайных активных погрешностях, возникающих при реализации заданного ядра, и пассивных ошибках - при измерении правой части.

**Предположение 10**. *Будем исходить из следующей линейной модели активных наблюдений для линейного интегрального уравнения первого рода* (6)

$$q = K\zeta + J\zeta + e \equiv \int_a^b \kappa(x,s)\zeta(s)ds + \int_a^b j(x,s)\zeta(s)ds + e(x), x \in [c,d], \tag{19}$$

*где* $j(x,s)$ *- ошибки реализации точно задаваемого в эксперименте ядра.*

Ядра, задаваемые точно, но реализуемые с ошибкой (активный эксперимент [1], [20]), ранее (насколько известно автору) не рассматривались. Рассмотрим формулировки построения регуляризованного псевдорешения на базе невязки и регуляризованного квазирешения.

***а - Регуляризованное псевдорешение.***

Построим метод вычисления регуляризованного псевдорешения при известной норме неслучайных активных погрешностей, возникающих при реализации заданного ядра, и известной норме пассивных ошибок измерения правой части (метод функционала правдоподобия).

**Задача 7.** *Зная приближенную правую часть* $q, \left\|\tilde{q} - K\zeta - \tilde{J}\zeta\right\| = \sigma$, *точно задаваемое невырожденное ядро и ошибку его реализации* $\left\|\tilde{J}\right\| = \rho$ *модели* (19), *значения ??* $\rho$*??вычислить регуляризованное псевдорешение.*

Ввиду того, что полная ошибка правой части $u = \tilde{q} - \zeta + \lambda K\zeta = -\lambda J\zeta + e$ зависит от искомого решения, то задача минимизации не имеет решения стандартным методом, т.е. как

$$\inf_{\left\{\zeta: \left\|\tilde{q} - K\zeta\right\|^2_{L_2} \le \left\|\tilde{J}\zeta + \tilde{e}\right\|^2_{L_2}\right\}} \left\|\zeta\right\|^2_{W_2^{(1)}}.$$

Видно, что так задаваемая граница множества не описывает компактного множества и задача минимизации не имеет решения в рамках стандартных методов. Для ее решения рассмотрим эквивалент статистического подхода [1]. Воспользовавшись результатом [1], построим функционал эквивалентный возникающему в методе максимума правдоподобия, реализовав его для конечно-разностного случая.

Аппроксимация линейного интегрального уравнения (19) аналогично предыдущему приводит к следующей модели:

$$\begin{gathered}\sqrt{t}\tilde{q}_{x_i} = \sqrt{t}\sum_{j=1}^{n} h\left(\kappa\left(x_i, s_j\right) + \tilde{j}\left(x_i, s_j\right)\right)\zeta\left(s_j\right) + \sqrt{t}e_{x_i}, i = \overline{1,n};\\ \sum_{i=1}^{n}\tilde{e}^2\left(x_i\right)t + O(t) = \sigma^2, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\tilde{j}^2\left(x_i, s_j\right)th + \Theta(t,h) = \rho^2.\end{gathered} \tag{20}$$

для которой и поставим задачу вычисления регуляризованного псевдорешения

$$\zeta_{\rho,h} = arg \inf_{\left\{\zeta_h : n\frac{\left|\tilde{q}_t - K_{th}\zeta_h\right|^2}{\sigma^2 + \rho^2\left|\zeta_h\right|^2/m} + n\ln\left(\sigma^2/n + \rho^2\left|\zeta_h\right|^2/nm\right) \le \varpi^2\right\}} \left\|\zeta_h\right\|^2_{W_{2,h}^{(1)}}, \tag{21}$$

где значение $\varpi$ равно

$$\varpi^2 = n\frac{\left(\sigma + \rho\left|\overline{\zeta}_h\right|\right)^2}{\sigma^2 + \rho^2\left|\overline{\zeta}_h\right|^2 / m} + n\ln\left(\sigma^2 / n + \rho^2\left|\overline{\zeta}_h\right|^2 / nm\right).$$

Ввиду того, что величина $\varpi$ достаточно сложна для вычисления (зависит также и от нормы точного решения), то построение квазирешения в данном случае может быть предпочтительнее.

***b* - Регуляризованное квазирешение.**

Построим метод вычисления регуляризованного квазирешения при известной норме неслучайных активных погрешностей, возникающих при реализации заданного ядра, известной норме пассивных ошибок измерения правой части и известной норме решения (метод функционала правдоподобия).

**Задача 8.** *Зная приближенную правую часть* $q$, $\left\|\tilde{q} - K\zeta - \tilde{J}\zeta\right\| = \sigma$, *точно задаваемое невырожденное ядро и ошибку его реализации* $\left\|\tilde{J}\right\| = \rho$ *модели* (19), *значения* $\sigma, \rho, \gamma$; *вычислить регуляризованное квазирешение.*

Ввиду того, что полная ошибка правой части $u = \tilde{q} - \zeta + \lambda K\zeta = -\lambda J\zeta + e$ зависит от искомого решения, то норма невязки в пространстве $L_2$ не адекватно отображает положение вещей и задача минимизации не имеет решения стандартным методом, т.е. в виде

$$\inf_{\left\{\zeta : \left\|\zeta\right\|^2_{W_2^{(1)}} \le \gamma^2\right\}} \left\|\tilde{q} - K\zeta\right\|^2_{L_2}.$$

Поэтому для правильного описания нормы ошибки необходимо применять эквивалент статистического подхода [1]. Воспользовавшись (20), построим задачу вычисления регуляризованного квазирешения:

$$\zeta_{h,\gamma} = arg \inf_{\left\{\zeta_h: \|\zeta_h\|^2 \le \gamma^2\right\}} \frac{\left|\widetilde{q}_t - K_{th}\zeta_h\right|^2}{\sigma^2 + \rho^2\left|\zeta_h\right|^2 / m} + ln\left(\sigma^2 + \rho^2\left|\zeta_h\right|^2 / m\right) . \qquad (22)$$

Данный подход несколько проще для реализации чем (21).

Основным результатом данной работы является разработка вариационных задач построения псевдорешения линейных интегральных уравнений второго рода, а также регуляризованного псевдорешения и регуляризованного квазирешения линейных интегральных уравнений первого рода в тех случаях, когда ядро и правая часть измеряются с пассивной ошибкой или ядро задается с активной ошибкой, а правая часть измеряется с пассивной ошибкой.

## Литература


1. Меченов А.С. О подходе максимального правдоподобия к оценке параметров линейных функциональных соотношений. // Численные методы в математической физике. Изд-во Московского университета. 1996. С. 153-159.

2. Меченов А.С. О частично приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 31, N6, 1991. с. 790-799.

3. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. М.: Изд-во Советская энциклопедия. 1985.

4. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР, т. 151, N3, 1963. с. 501-504.

5. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.

6. Меченов А.С. О разностной аппроксимации метода регуляризации // Обработка и интерпретация физических экспериментов, Вып. 6. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. С. 105-112.

7. Меченов А.С. Численное решение линейных интегральных уравнений первого рода методом регуляризации. // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВИНИТИ. 1977. 120 с.

8. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.

9. Морозов В.А. О выборе параметра регуляризации при решении функциональных уравнений методом регуляризации // Докл. АН СССР, т. 175, N6, 1967, с. 1225-1228..

10.Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ. 1950.

11.Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 217 с.

12.Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Матем. сборник, т. 61, N2, 1963. С. 187-199.

13.Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивых методах их решения // Докл. АН СССР, т. 163, N3, 1965. с. 591-594.

14.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 320 с.

15.Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.С., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. 302 с.

16.Петров А.П. О статистическом подходе к некорректным задачам математической физики// Труды всесоюзной школы молодых ученых "Методы решения некорректных задач и их применения" (г. Ростов-Великий, 9-18 октября 1973 г.).- М.: Изд-во МГУ. 1974. С. 177-181.

17.Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука. 1981.

18.Тихонов А.Н., Шевченко В.Г., Заикин П.Н., Ишханов Б.С., Меченов А.С. О расчете сечения фотоядерных реакций по экспериментальной информации // Вестник Московского университета, серия физ., астроном., т. 14, N3, 1973, с. 317-325.

19.Морозов В.А., Гребенников А.И. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М: Изд-во Моск. ун-та, 1992, 320 с.

20.Меченов А.С. Регуляризованный метод наименьших квадратов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988, 96 с.