Межуев П.Н.

Расчет тарифных ставок имущественного страхования по накопленной статистике

1. Введение.

Теория расчета тарифных ставок на основе накопленной статистики является важной областью математики имущественного страхования.

Рассмотрим набор классов страховых рисков, объединенных в портфель. Будем считать, что внутри каждого из классов риск полностью однороден, то есть средние суммарные страховые выплаты по каждому из договоров, заключенных в этом классе совпадают. Об однородности всего портфеля, составленного из этих рисков, будем считать, что ничего не известно.

В простейшем виде постановка задачи вычисления тарифных ставок для каждого из классов можно описать следующим графиком (Рис.1).

По горизонтали: $P_{.j}$ – количество заключенных договоров в классе j.

По вертикали: $X_{.j}$ – среднее возмещение на договор в классе j.

Требуется для каждого класса j определить величину тарифной ставки μ_j (чисто рисковая премия).

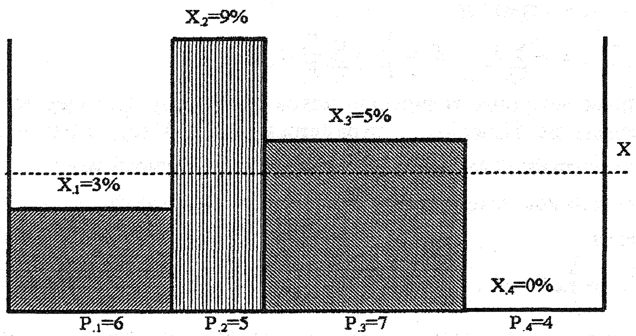

Рис. 1

Отметим следующие возможные подходы к решению задачи:

– можно полагать, что величина тарифной ставки $\mu_j = X_{.j}$, аргументируя это тем, что портфель полностью неоднороден, и поэтому отклонение индивидуальных показателей класса не являются случайными;

– можно считать, что портфель полностью однороден и наблюдаемые различия между классами – случайность. В этом случае $\mu_j = X_{..}$ – среднее возмещение на один договор по всему портфелю.

Однако, используя теорию правдоподобия, можно построить более гибкое решение, а также оценить однородность портфеля, исходя из статистических данных. Данная постановка задачи обобщает аналогичную постановку из [1], где средние оценки тарифных ставок по различным классам рисков предполагались одинаковыми. Работа была написана при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект N 99-01-00184.

2. Постановка задачи расчета тарифных ставок.

Рассмотрим $j = 1,..,N$ классов страховых рисков, объединенных в портфель, по которым в течении $t = 1,..,n$ лет ведется статистика.

Введем следующие обозначения:

P_{tj} – количество договоров страхования заключенных в t-м году по j-му классу,

Y_{tj} – суммарное возмещение по j-му классу в t-м году по всем искам,

$X_{tj} = \dfrac{Y_{tj}}{P_{tj}}$ – среднее страховое возмещение по одному договору.

Так же введем следующие величины:

суммарные и средние по времени

$$P_{.j} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \quad , \quad Y_{.j} = \sum_{i=1}^{n} Y_{ij} \quad , \quad X_{.j} = \frac{Y_{.j}}{P_{.j}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{ij}}{P_{.j}} X_{ij} \, ;$$

суммарные и средние по полному портфелю договоров

$$P_{i.} = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} \quad , \quad Y_{i.} = \sum_{j=1}^{N} Y_{ij} \quad , \quad X_{i.} = \frac{Y_{i.}}{P_{i.}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{P_{ij}}{P_{.j}} X_{ij} \, ;$$

полные суммарные и средние

$$P_{..} = \sum_{i,j} P_{ij} \quad , \quad Y_{..} = \sum_{i,j} Y_{ij} \quad , \quad X_{..} = \frac{Y_{..}}{P_{..}} = \sum_{i,j} \frac{P_{ij}}{P_{..}} X_{ij} \, .$$

Пусть случайная величина количества исков по одному договору из класса j имеет распределение Пуассона с параметром λ_j, а $V_j(x)$, $x \ge 0$ – функция распределения случайной величины ξ_j возмещения по одному иску.

Математическое ожидание и второй момент случайной величины ξ_j обозначим через

$$e_j = E[\xi_j] = \int_0^\infty x dV_j(x) \; , \; d_j = E[\xi_j^2] = \int_0^\infty x^2 dV_j(x) \, .$$

Соответственно условные математическое ожидание и дисперсия суммарных возмещений Y_{tj} имеют вид:

$$E[Y_{tj} | \lambda_j] = P_{tj} \lambda_j e_j \Rightarrow E[X_{tj} | \lambda_j] = \lambda_j e_j \overset{def}{=} \mu_j(\lambda_j) \, ,$$

$$Var[Y_{tj} | \lambda_j] = P_{tj} \lambda_j d_j \Rightarrow Var[X_{tj} | \lambda_j] = \frac{\lambda_j d_j}{P_{tj}} \overset{def}{=} \frac{\sigma_j^2(\lambda_j)}{P_{tj}} \, .$$

Требуется построить несмещенную оценку $\hat{\mu}_k$ величины тарифной ставки $\mu_k(\lambda_k)$, исходя из статистических данных, накопленных за n лет, где параметр λ_k для класса k будем считать случайной величиной.

3. Построение решения методом максимального правдоподобия.

Величину тарифной ставки $\mu_k(\lambda_k)$ будем оценивать линейной оценочной функцией следующего вида: $\hat{\mu}_k = \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{tj}^k X_{tj}$.

Введем обозначения:

$$m_k = E[\mu_k(\lambda_k)] \;,\quad v_k = E[\sigma_k^2(\lambda_k)] \;,\quad \omega_k = Var[\mu_k(\lambda_k)].$$

Заметим, что в [1] величины m_k, v_k, ω_k предполагались независящими от k.

Несмещенность оценки $\hat{\mu}_k$ выражается условием $E[\hat{\mu}_k] = m_k$.

Таким образом, можно поставить задачу минимизации:

$$\begin{cases} E\left[(\hat{\mu}_k - \mu_k(\lambda_k))^2\right] \to \min, \\ E[\hat{\mu}_k] = m_k; \end{cases}$$

Требуется определить коэффициенты α_{ij}^k при которых достигается минимум.

Для решения поставленной задачи запишем Лагранжиан

$$L(\alpha_{ij}^k, \beta_k) = \frac{1}{2} E\left[\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij}^k X_{ij} - \mu_k(\lambda_k)\right)^2\right] - \beta_k E\left[\sum_{i,j} \alpha_{ij}^k X_{ij} - \mu_k(\lambda_k)\right]$$

и приравняем к нулю его частные производные по всем переменным:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_k} = E\left[\sum_{i,j} \alpha_{ij}^k X_{ij} - m_k\right] = E\left[\sum_{i,j} \alpha_{ij}^k E[X_{ij} \mid \lambda_j] - m_k\right] = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^k m_j - m_k = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_{rs}^k} = E\left[\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij}^k X_{ij} - \mu_k(\lambda_k)\right) X_{rs}\right] - \beta_k m_s = 0.$$

Используя равенства $E[E[X|Y]] = E[X]$, $E[XY] = E[X]E[Y] + \delta_{XY} Var[X]$, где δ_{XY} – символ Кронекера, получим

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_{rs}^k} = E\left[\sum_{i,j} \alpha_{ij}^k E[X_{ij} X_{rs} | \lambda] - \mu_k(\lambda_k) E[X_{rs} | \lambda]\right] - \beta_k m_s =$$

$$= E\left[\sum_{i,j} \alpha_{ij}^k \left(\mu_j(\lambda_j)\mu_s(\lambda_s) + \delta_{js}\delta_{ir} \frac{\sigma_s^2(\lambda_s)}{P_{rs}}\right) - \mu_k(\lambda_k)\mu_s(\lambda_s)\right] - \beta_k m_s =$$

$$= \left(m_s \sum_{i,j} \alpha_{ij}^k m_j + \sum_{i,j} \alpha_{ij}^k \delta_{js} \omega_s + \alpha_{rs}^k \frac{v_s}{P_{rs}} - m_k m_s - \delta_{sk}\omega_s\right) - \beta_k m_s =$$

$$= \sum_i \alpha_{is}^k \omega_s + \alpha_{rs}^k \frac{v_s}{P_{rs}} - \beta_k m_s - \delta_{sk}\omega_s = 0.$$

Введем следующие обозначения: $\alpha_{.s}^k = \sum_i \alpha_{is}^k$, $a_{sk} = \alpha_{.s}^k - \delta_{sk}$.

Полученные уравнения запишутся в виде

$$\begin{cases} \omega_s(\alpha_{.s}^k - \delta_{sk})P_{rs} + v_s \alpha_{rs}^k - m_s \beta_k P_{rs} = 0 \\ \sum_j m_j(\alpha_{.j}^k - \delta_{kj}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_s a_{sk} P_{rs} + v_s \alpha_{rs}^k - m_s \beta_k P_{rs} = 0 \\ \sum_j m_j a_{jk} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

при всех $r = 1,\dots,n$, $s = 1,\dots,N$.

Просуммируем первое уравнение по r и найдем a_{sk}

$$a_{sk}(P_{.s}\omega_s + v_s) + \delta_{sk} v_s - m_s \beta_k P_{.s} = 0 \Rightarrow a_{sk} = \frac{m_s \beta_k P_{.s} - \delta_{sk} v_s}{P_{.s}\omega_s + v_s}.$$

Подставив a_{jk} во второе уравнение, получим

$$\sum_j m_j \frac{m_j\beta_k P_{.j}-\delta_{jk}\nu_j}{P_{.j}\omega_j+\nu_j}=\sum_j \frac{m_j^2\beta_k P_{.j}}{P_{.j}\omega_j+\nu_j}-\frac{m_k\nu_k}{P_{.k}\omega_k+\nu_k}=0\Rightarrow\frac{m_k\nu_k\beta_j}{P_{.k}\omega_k+\nu_k}=\frac{m_j\nu_j\beta_k}{P_{.j}\omega_j+\nu_j}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_j=\frac{\nu_k\beta_j}{\nu_j\beta_k}\frac{P_{.j}\omega_j+\nu_j}{P_{.k}\omega_k+\nu_k}m_k\Rightarrow m_j=\frac{\gamma_k}{\gamma_j}\frac{\beta_j}{\beta_k}m_k\ ,$$

где $\tilde{a}_k=\dfrac{i_k}{P_{.k}\grave{u}_k+i_k}$.

Таким образом,

$$\sum_j m_k\frac{\gamma_k\gamma_j}{\gamma_j}\frac{\beta_j}{\beta_k}\left(\frac{P_{.j}}{\nu_j}\frac{\gamma_k}{\gamma_j}\frac{\beta_j}{\beta_k}m_k-\delta_{jk}\right)=0\Rightarrow\sum_j\frac{1}{\gamma_j}\frac{P_{.j}}{\nu_j}\beta_j^2 m_k=\frac{\beta_k}{\gamma_k}. \qquad (2)$$

Из первого уравнения системы (1) выразим α_{rs}^k

$$\alpha_{rs}^k=P_{rs}\frac{m_s\beta_k-\omega_s a_{sk}}{\nu_s}=P_{rs}\frac{m_s\beta_k(P_{.s}\omega_s+\nu_s)-\omega_s(m_s\beta_k P_{.s}-\delta_{sk}\nu_s)}{\nu_s(P_{.s}\omega_s+\nu_s)}=P_{rs}\frac{m_s\beta_k+\delta_{sk}\omega_s}{P_{.s}\omega_s+\nu_s}$$

Из уравнения (2) выразим m_k, подставим его в полученное уравнение и, учитывая, что $\hat{\mu}_k=\sum_{i,j}\alpha_{ij}^k X_{ij}$, получим

$$\hat{\mu}_k=\sum_{i,j}P_{ij}X_{ij}\frac{m_j\beta_k+\delta_{jk}\omega_j}{P_{.j}\omega_j+\nu_j}=\beta_k\sum_j\frac{P_{.j}m_jX_{.j}}{P_{.j}\omega_j+\nu_j}+\frac{P_{.k}\omega_k}{P_{.k}\omega_k+\nu_k}X_{.k}=$$

$$=\beta_k\sum_j\frac{1}{\gamma_j}\frac{P_{.j}\beta_j}{P_{.j}\omega_j+\nu_j}X_{.j}\Big/\sum_s\frac{1}{\gamma_s}\frac{P_{.s}}{\nu_s}\beta_s^2+(1-\gamma_k)X_{.k}=$$

$$=\sum_j\frac{P_{.j}X_{.j}/\nu_j}{\sum_s\frac{1}{\gamma_s}\frac{P_{.s}}{\nu_s}\frac{\beta_s\beta_s}{\beta_j\beta_k}}+(1-\gamma_k)X_{.k}=\sum_j\frac{P_{.j}X_{.j}/\nu_j}{\sum_s\frac{\gamma_s}{\gamma_j\gamma_k}\frac{P_{.s}}{\nu_s}\frac{m_s^2}{m_jm_k}}+(1-\gamma_k)X_{.k}=$$

$$=\gamma_k m_k\frac{\sum_j\frac{P_{.j}}{\nu_j}X_{.j}\gamma_j m_j}{\sum_s\frac{P_{.s}}{\nu_s}\gamma_s m_s^2}+(1-\gamma_k)X_{.k}$$

Таким образом, окончательно получили

$$\hat{\mu}_k=\gamma_k m_k\frac{\sum_{j=1}^N\bar{\gamma}_j m_j X_{.j}}{\sum_{s=1}^N\bar{\gamma}_s m_s^2}+(1-\gamma_k)X_{.k}\ ,\text{ где }\tilde{a}_k=\frac{i_k}{P_{.k}\grave{u}_k+i_k}\ ,\ \tilde{\bar{a}}_k=\frac{P_{.k}}{i_k}\gamma_k.$$

Следует отметить, что если $m_k=m$, $\nu_k=\nu$, $\omega_k=\omega$ $\forall k$, то выражение для $\hat{\mu}_k$ преобразуется в результат, полученный в [1].

Величины m_k, ν_k, ω_k должны быть оценены каким-либо способом на основе имеющейся статистики по страховым случаям. Для величины m_k разумнее всего в качестве оценки взять величину реально действующей тарифной ставки в k-ом классе рисков.

4. Оценки для дисперсий по годам и классам риска.

Рассмотрим следующие статистики:

$$V_s = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}\left(X_{rs}-X_{.s}\right)^2\frac{P_{rs}}{P_{..}} = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}X_{rs}^2\frac{P_{rs}}{P_{..}} - \frac{1}{n-1}X_{.s}^2\frac{P_{.s}}{P_{..}},$$

$$W_s = X_{.s}^2.$$

Покажем, что с помощью этих статистик можно построить несмещенные оценки для дисперсий по годам ω_s и классам риска v_s. Для этого выпишем условные математические ожидания величин V_s и W_s.

$$E\left[V_s|\lambda\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}\frac{P_{rs}}{P_{..}}\left(\mu_s^2(\lambda_s)+\frac{\sigma_s^2(\lambda_s)}{P_{rs}}\right) - \frac{1}{n-1}\frac{P_{.s}}{P_{..}}\left(\mu_s^2(\lambda_s)+\frac{\sigma_s^2(\lambda_s)}{P_{.s}}\right) = \frac{\sigma_s^2(\lambda_s)}{P_{..}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[V_s\right] = \frac{v_s}{P_{..}} \Rightarrow \hat{v}_s = V_s P_{..},$$

$$E\left[W_s|\lambda\right] = \mu_s^2(\lambda_s)+\frac{\sigma_s^2(\lambda_s)}{P_{.s}} \Rightarrow E\left[W_s\right] = m_s^2+\omega_s+\frac{P_{..}}{P_{.s}}V_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\omega}_s = W_s - \frac{P_{..}}{P_{.s}}V_s - \hat{m}_s^2;$$

Таким образом, получены требуемые несмещенные оценки дисперсий.

Литература.

1. Э. Штрауб. «Математика имущественного страхования».