В.В. Морозов, К.В. Хижняк

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА СТОИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО АМЕРИКАНСКОГО АЛЬТЕРНАТИВНОГО ОПЦИОНА НА ДВА АКТИВА*

1. Введение

Бесконечный альтернативный американский колл-опцион представляет собой ценную бумагу, держатель которой имеет право ее предъявления в любой момент времени с целью приобретения по фиксированной цене исполнения одного из двух активов, имеющего наибольшую стоимость. Опционы подобного типа с конечным сроком действия изучались в [1]. Верхняя оценка стоимости такого опциона получена в [2], а затем уточнена в [3].

В данной статье рассматривается опцион, цена исполнения которого зависит от выбранного актива. Такого рода опционы возникают при оценке альтернативных инвестиционных проектов, когда объемы инвестирования в проекты различны. Изучается множество немедленного исполнения опциона. Верхняя оценка строится на основе интегральной формулы для стоимости опциона.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка r не зависит от времени t, а стоимости активов $S_i(t)$, $i=1,2$, удовлетворяют уравнениям геометрического броуновского движения

$$dS_i(t)=S_i(t)(\alpha_i dt+\sigma_i dz_i(t)), \tag{1}$$

где α_i – средняя доходность, $\sigma_i>0$ – волатильность i-го актива, а $z_i(t)$, $i=1,2$, – стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции ρ. Пусть $\delta_i>0$ – интенсивность выплат дивидендов по i-му активу. Предположим, что получаемые по активу дивиденды немедленно реинвестируются, т.е. на них покупается актив того же типа. Будем также считать выполненным условие риск-нейтральности: $r=\alpha_i+\delta_i$, $i=1,2$.

Пусть в начальный момент времени 0 выпускается опцион на покупку единицы актива одного из двух типов по цене исполнения $K_i\ge 0$,

* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ «Поддержка научных школ», проект НШ-693.2008.1, и гранта РФФИ, проект 11-01-00778а.

если приобретен i-й актив. Опцион можно предъявить в любой момент $t \geq 0$. Платёж по нему равен $f(S(t)) = \max_{i=1,2}(S_i(t) - K_i)_+$, где $a_+ = \max(a, 0)$ для любого числа a и $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$.

Обозначим через $S = (S_1, S_2) = S(0)$ вектор начальных стоимостей активов. Стоимость опциона $F(S)$ в начальный момент времени может быть определена как верхняя грань средних приведенных платежей, взятая по всем решающим правилам предъявления:

$$F(S) = \sup_{\tau} \mathrm{E}\big[\exp(-r\tau) f(S(\tau)) \mid S(0) = S\big], \tag{2}$$

где E – символ математического ожидания, а τ – решающее правило предъявления опциона (марковский момент) [4]. Если для некоторой траектории процесса $S(t)$ решающее правило принимает значение ∞, то в этом случае значение платежа $f(S(\tau))$ предполагается равным нулю. Оптимальное решающее правило имеет вид $\tau^0 = \min\{t \mid F(S(t)) = f(S(t))\}$ [4]. Инвестор, использующий правило τ^0, предъявляет опцион в момент первого достижения процессом $S(t)$ множества $\mathcal{E} = \{S \in \mathbb{R}_+^2 \mid F(S) = f(S)\}$, называемого множеством немедленного исполнения опциона.

В п.3 изучаются свойства множества $\mathcal{E}$. В частности, показано, что $\mathcal{E}$ представимо в виде объединения двух непересекающихся выпуклых подмножеств, границы которых задаются неубывающими выпуклыми функциями, имеющими асимптоты. Найдены явные формулы для коэффициентов асимптот. В п.4 аппроксимация $\mathcal{E}$ многоугольными множествами позволила получить верхнюю оценку для стоимости $F(S)$.

3. Множество немедленного исполнения

Для альтернативного колл-опциона основные свойства множества $\mathcal{E}$ были получены в [1] при $K_1 = K_2$ и конечном сроке действия опциона. В утверждениях 1-3, приводимых без доказательств, эти свойства обобщаются для бесконечного опциона в случае $K_1 \neq K_2$.

Утверждение 1. *Пусть Δ – положительная константа, а функция платежа удовлетворяет следующим условиям:*

1) Для любой точки $S \in \mathcal{E}$, такой, что $S_1 \geq \Delta$, и любого числа $\lambda \geq 1$ справедливо равенство $f(\lambda(S_1 - \Delta) + \Delta, \lambda S_2) = \lambda f(S) + c$, где константа c не зависит от S, но может зависеть от λ.

2) Неравенство $f(\lambda(S_1 - \Delta) + \Delta, \lambda S_2) \leq \lambda f(S) + c$ выполняется для любой точки $S \in \mathbb{R}_+^2$ и любого числа $\lambda \geq 1$.

Тогда если точка $S \in \mathcal{E}$ и $S_1 \geq \Delta$, то при любом числе $\lambda \geq 1$ луч вида $(\Delta, 0) + \lambda(S_1 - \Delta, S_2)$, $\lambda \geq 1$, принадлежит множеству $\mathcal{E}$.

Для альтернативного опциона предположим без потери общности, что $\Delta = K_1 - K_2 > 0$. Тогда функция платежа $f(S) = \max_{i=1,2}(S_i - K_i)_+$ удовлетворяет условиям утверждения 1 при $c = (\lambda - 1)K_2$.

Утверждение 2. *Если точка $S \in \mathbb{R}_+^2$ удовлетворяет уравнению $S_1 - K_1 = S_2 - K_2$, то для альтернативного колл-опциона $S \notin \mathcal{E}$.*

Из этого утверждения вытекает, что множество $\mathcal{E}$ представимо в виде объединения двух непересекающихся подмножеств: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_1 = \{S \in \mathcal{E} | \, S_1 - K_1 > S_2 - K_2\}$, а $\mathcal{E}_2 = \{S \in \mathcal{E} | \, S_1 - K_1 < S_2 - K_2\}$.

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ – множество немедленного исполнения альтернативного колл-опциона. Тогда*

а) Каждое из множеств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ выпукло.

б) Если $S \in \mathcal{E}_1$ ($S \in \mathcal{E}_2$), то точка $(S_1, \lambda S_2) \in \mathcal{E}_1$ ($(\lambda S_1, S_2) \in \mathcal{E}_2$) для любого числа $\lambda \in [0,1]$.

Из утверждения 3 следует, что границу множества $\mathcal{E}_1$ внутри $\mathbb{R}_+^2$ можно задать неубывающей выпуклой функцией $S_1 = G_1(S_2)$. Аналогичная функция $S_2 = G_2(S_1)$ задает границу множества $\mathcal{E}_2$. Заметим, что

$$G_i(0) = S_i^* = \frac{\beta_i K_i}{\beta_i - 1}, \quad \beta_i = \frac{-\tilde{\alpha}_i + \sqrt{(\tilde{\alpha}_i)^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

где S_i^* – порог, определяющий оптимальное решающее правило предъявления американского опциона на i-й актив. Заметим, что $S_i^* > rK_i / \delta_i$, поскольку $\beta_i > 1$ и является корнем квадратного уравнения

$$\frac{\sigma_i^2}{2} \beta(\beta - 1) + \alpha_i \beta - r = 0.$$

Из утверждения 1 нетрудно вывести, что график функции G_i имеет асимптоту вида $S_i = c_i S_{3-i} + w_i$, где $c_i \geq 1$, $i = 1,2$. Выпуклая функция G_i почти всюду дифференцируема и всюду в области определения имеет правую производную, которую обозначим через G_i'. Чтобы найти параметры асимптот c_i, w_i, а также производные $G_i'(0)$, нам потребуется интегральная формула для стоимости опциона [1]

$$F(S) = \sum_{i=1}^{2} \int_0^\infty \exp(-rt) \int_{M_i} (\delta_i S_i \exp(\tilde{\alpha}_i t + \sigma_i \sqrt{t} x_i) - rK_i) \psi(x) \, dx dt, \qquad (3)$$

в которой при $x = (x_1, x_2)$

$$M_i = \left\{ x \mid S_i \exp(\tilde{\alpha}_i t + \sigma_i \sqrt{t} x_i) \ge G_i(S_{3-i} \exp(\tilde{\alpha}_{3-i} t + \sigma_{3-i} \sqrt{t} x_{3-i})) \right\},\ i = 1,2,\ \text{а}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)} \right)$$

– двумерная нормальная плотность. Правую часть в (3) представим в виде комбинации интегралов:

$$F(S) = \delta_1 J_{11} - rJ_{10} + \delta_2 J_{21} - rJ_{20}, \tag{4}$$

где

$$J_{ij} = (jS_i + (1-j)K_i) \int_0^\infty \exp(-rt) \int_{M_i} \exp(j(\tilde{\alpha}_i t + \sigma_i \sqrt{t} x_i)) \psi(x) dx dt,\ i = 1,2,\ j = 0,1.$$

После замены переменных в интеграле J_{ij}

$$x_i - \rho x_{3-i} + j\sigma_i \sqrt{t}(1-\rho^2) = y\sqrt{1-\rho^2}, \qquad x_{3-i} - j\rho\sigma_i \sqrt{t} = u$$

область интегрирования в новых переменных y и u будет задаваться неравенством $y \ge -d_{ij}$, где

$$d_{ij} = \frac{-\ln(G_i(S_{3-i} \exp((\tilde{\alpha}_{3-i} + j\rho\sigma_1\sigma_2)t + \rho\sigma_{3-i}\sqrt{t}u)) / S_i) + (\tilde{\alpha}_i + j\sigma_i^2)t + \rho\sigma_i \sqrt{t}u}{\sigma_i \sqrt{t} \sqrt{1-\rho^2}}.$$

Тогда, используя тождество $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ для функции $\Phi(y)$ нормального распределения и плотность $\varphi(y) = \Phi'(y) = \exp(-y^2/2)/\sqrt{2\pi}$, получим

$$J_{ij} = (jS_i + (1-j)K_i) \int_0^\infty \exp(-(j\delta_i + (1-j)r)t) \int_{-\infty}^\infty \Phi(d_{ij}) \varphi(u) du dt. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть G_i – функции, задающие границы множеств $\mathcal{E}_i$ альтернативного колл-опциона. Тогда $G_i'(0) = 0$, i=1,2.*

Доказательство проводится аналогично [2], где оно заключалось в следующем. В формулу (4) подставлялось соотношение $S_1 = G_1(S_2)$ и обе части полученного уравнения дифференцировались по переменной S_2, которая затем устремлялась к нулю. После вычисления пределов и интегралов из уравнения следовало, что $G_1'(0) = 0$. Здесь мы дополним доказательство из [2] обоснованием возможности предельных переходов под знаками интегралов. Покажем, например, что $J_{21}'(0) \overset{def}{=} \lim_{S_2 \to 0+} J_{21}'(S_2) = 0$.

Имеем:

$$J'_{21}(S_2)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \exp(-\delta_2 t)\Phi(d_{21})\varphi(u)dudt+S_2\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \exp(-\delta_2 t)\varphi(d_{21})d'_{21}\varphi(u)dudt, \quad (6)$$

где

$$d_{21}=\frac{-\ln(G_2(G_1(S_2)\exp((\tilde\alpha_1+\rho\sigma_1\sigma_2)t+\rho\sigma_1\sqrt{t}u))/S_2)+(\tilde\alpha_2+\sigma_2^2)t+\rho\sigma_2\sqrt{t}u}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d'_{21}=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}\left[-\frac{G'_2(\cdot)G'_1(S_2)\exp((\tilde\alpha_1+\rho\sigma_1\sigma_2)t+\rho\sigma_1\sqrt{t}u)}{G_2(\cdot)}+\frac{1}{S_2}\right].$$

При фиксированных t и u предельные значения подынтегральных функций в (6) равны нулю, поскольку при $S_2\to 0+$ функции $\Phi(d_{21})$ и $\varphi(d_{21})$ стремятся к нулю. В первом интеграле в (6) подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту $\exp(-\delta_2 t)\varphi(u)$. Поэтому интеграл сходится по S_2 равномерно и в пределе равен нулю. Во втором интеграле в (6) производная $G'_2(\cdot)$ неотрицательна и ограничена сверху константой c_2. Следовательно, достаточно доказать равномерную сходимость интеграла

$$I=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{S_2\exp(-\delta_2 t)\varphi(d_{21})\exp((\tilde\alpha_1+\rho\sigma_1\sigma_2)t+\sigma_1\sqrt{t}u)}{G_2(\cdot)\sqrt{t}}\varphi(u)dudt.$$

Положим $A=-\ln G_2(\cdot)+(\tilde\alpha_2+\sigma_2^2)t+\rho\sigma_2\sqrt{t}u$, $B=\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}$. Тогда

$$S_2\varphi(d_{21})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\ln S_2-\frac{(A+\ln S_2)^2}{2B^2}\right)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{B^2}{2}-A\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 t(1-\rho^2)+\ln G_2(\cdot)-(\tilde\alpha_2+\sigma_2^2)t-\rho\sigma_2\sqrt{t}u\right).$$

Поэтому подынтегральная функция в I мажорируется интегрируемой функцией

$$\frac{D}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 t(1-\rho^2)+(\tilde\alpha_1+\rho\sigma_1\sigma_2-\delta_2-\tilde\alpha_2-\sigma_2^2)t+(\sigma_1-\rho\sigma_2)\sqrt{t}u-\frac{1}{2}u^2\right)=$$

$$=\frac{D}{\sqrt{t}}\exp\left(-\delta_1 t-\frac{1}{2}\left((\sigma_1-\rho\sigma_2)\sqrt{t}-u\right)^2\right),$$

где D – положительная константа. Аналогично доказывается равномерная сходимость других интегралов $J'_{ij}(S_2)$. ■

Введем обозначения

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2,\ \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\sigma^2}{2},\ \hat{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2,$$

$$\theta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \sqrt{(\tilde{\alpha})^2 + 2\delta_2\sigma^2}}{\sigma^2},\ \gamma_{1,2} = \frac{-\hat{\alpha} \pm \sqrt{(\hat{\alpha})^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Нам потребуются следующие тождества и интегралы:

$$\tilde{\alpha} - \sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 = \hat{\alpha} - \sigma^2,\quad (\tilde{\alpha} + \sigma^2)^2 + 2\delta_1\sigma^2 = (\tilde{\alpha})^2 + 2\delta_2\sigma^2,\ (\hat{\alpha})^2 + 2r\sigma^2 =$$
$$= (\tilde{\alpha} + (i-1)\sigma^2 + (-1)^i(\sigma_i^2 - \rho\sigma_1\sigma_2))^2 + 2(\delta_{3-i} + \alpha_i - \sigma_i^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)\sigma^2,\ i = 1,2;$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-\delta t + c\sqrt{t}u)}{\sqrt{t}} \varphi\left(au + b\sqrt{t} + \frac{d}{\sqrt{t}} \right)\varphi(u)dudt = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\exp\left(-\frac{d\left(b + ac + \sqrt{\eta}\right)}{a^2+1} \right),$$

где $\eta = (a + ac)^2 + (-c^2 + 2\delta)(a^2+1) > 0,$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta\exp(-\delta t)\Phi\left(au + b\sqrt{t} + \frac{c}{\sqrt{t}} \right)\varphi(u)dudt =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(a^2+1)\delta}} - 1 \right)\exp\left(-\frac{d\left(b + \sqrt{b^2 + 2(a^2+1)\delta}\right)}{a^2+1} \right)\quad (c > 0,\ \delta > 0).$$

Теорема 2. *Параметры c_i и w_i, определяющие асимптоты функций G_i, $i = 1,2$, задаются формулами:*

$$c_1 = \left(\frac{\theta_1}{\theta_1 - 1} \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2}} \left(\frac{1-\theta_2}{-\theta_2} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1-\theta_2}},\ c_2 = \left(\frac{\theta_1}{\theta_1 - 1} \right)^{\frac{1-\theta_1}{\theta_1-\theta_2}} \left(\frac{1-\theta_2}{-\theta_2} \right)^{\frac{1-\theta_2}{\theta_1-\theta_2}},$$

$$w_i = \frac{\sigma^2\left[-(-1)^i\left(\gamma_i(c_1c_2)^{\gamma_1-\gamma_2} - \gamma_{3-i} \right)K_i - (\gamma_1 - \gamma_2)(c_1c_2)^{-(-1)^i\gamma_i}K_{3-i} \right]}{2\delta_i\left((c_1c_2)^{\gamma_1-\gamma_2} - 1 \right)},\ i = 1,2.$$

Замечание. При $K_1 = K_2 = 0$ формулы для коэффициентов c_i получены в [5], где доказано, что в этом случае $G_1(S_2) = c_1S_2$, $G_2(S_1) = c_2S_1$.

Доказательство. Положим $S_1 = G_1(S_2)$ и устремим S_2 к бесконечности. Выпишем разложения вида $d_{ij} \approx h_{ij} - k_{ij}/S_2$:

$$d_{10} \approx \frac{\hat{\alpha}t + (\rho\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{w_1}{c_1S_2}\frac{\exp(-\tilde{\alpha}_2 t - \sigma_2\sqrt{t}u) - 1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{11} \approx \frac{(\tilde{\alpha} + \sigma^2)t + (\rho\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{w_1}{c_1S_2}\frac{\exp(-(\tilde{\alpha}_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)t - \sigma_2\sqrt{t}u) - 1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{20} \approx -\frac{\ln(c_1c_2) + \hat{\alpha}t + (\sigma_1 - \rho\sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{c_2w_1 + w_2\exp(-\tilde{\alpha}_1 t - \sigma_1\sqrt{t}u)}{c_1c_2S_2\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{21} \approx -\frac{\ln(c_1c_2) + \tilde{\alpha}t + (\sigma_1 - \rho\sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{c_2w_1 + w_2\exp(-(\tilde{\alpha}_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)t - \sigma_1\sqrt{t}u)}{c_1c_2S_2\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Отсюда $\Phi(d_{ij}) \approx \Phi(h_{ij}) - (k_{ij}/S_2)\varphi(h_{ij})$. Определим интегралы

$$H_{ij} = \int_0^\infty \delta_i \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-\delta_i t - j((\tilde{\alpha}_{3-i} + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \sigma_{3-i}\sqrt{t}u))}{\sigma_i\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}\varphi(h_{i1})\varphi(u)dudt,$$

$$I_{ij} = \int_0^\infty (j\delta_i + (1-j)r)\exp(-(j\delta_i + (1-j)r)t)\int_{-\infty}^\infty \Phi(h_{ij})\varphi(u)dudt,\ i = 1,2,\ j = 0,1.$$

Используя введенные тождества и формулы для интегралов, находим

$$I_{10} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2},\ I_{11} = \frac{1-\theta_2}{\theta_1 - \theta_2},\ I_{20} = \frac{\gamma_1(c_1c_2)^{\gamma_2}}{\gamma_1 - \gamma_2},\ I_{21} = \frac{\theta_1(c_1c_2)^{\theta_2}}{\theta_1 - \theta_2},\ H_{10} = \frac{2\delta_1}{\sigma^2(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$H_{11} = \frac{2\delta_1}{\sigma^2(\gamma_1 - \gamma_2)},\ H_{20} = \frac{2\delta_2(c_1c_2)^{\theta_2}}{\sigma^2(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{2\delta_2 I_{21}}{\sigma^2\theta_1},\ H_{21} = \frac{2\delta_2(c_1c_2)^{1+\gamma_2}}{\sigma^2(\gamma_1 - \gamma_2)}.$$

Подставим $S_1 = G_1(S_2)$ в уравнение (4), разделим его на S_2 и обе части уравнения разложим до первого порядка относительно $1/S_2$. В результате получим равенство

$$c_1(1 - I_{11}) + \frac{1}{S_2}\left(\left(1 - I_{11} + H_{11} - H_{10} + \frac{H_{20}}{c_1}\right)w_1 + \frac{H_{21}}{c_1c_2}w_2\right) =$$

$$= I_{21} + \frac{1}{S_2}\left(K_1(1 - I_{10}) - K_2I_{20}\right) + o\left(\frac{1}{S_2}\right). \tag{7}$$

Отсюда следует уравнение $c_1(1 - I_{11}) = I_{21}$ и

$$H_{20} = \frac{2\delta_2 I_{21}}{\sigma^2\theta_1} = \frac{2\delta_2 c_1(1 - I_{11})}{\sigma^2\theta_1}.$$

Поэтому

$$1 - I_{11} - H_{10} + \frac{H_{20}}{c_1} = \frac{\sigma^2(\theta_1 - 1)\theta_1 + 2(\delta_2 - \delta_1)\theta_1 - 2\delta_2}{\sigma^2\theta_1(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\sigma^2\theta_1^2 + 2\tilde{\alpha}\theta_1 - 2\delta_2}{\sigma^2\theta_1(\theta_1 - \theta_2)} = 0.$$

Из (7) находим

$$c_1(1-I_{11})=I_{21},\ \ H_{11}w_1+\frac{H_{21}w_2}{c_1c_2}=K_1(1-I_{10})-K_2I_{20}$$

или

$$(\theta_1-1)c_1=\theta_1(c_1c_2)^{\theta_2},\ 2\delta_1w_1+2\delta_2(c_1c_2)^{\gamma_2}w_2=\gamma_1\sigma^2(K_1-K_2(c_1c_2)^{\gamma_2}). \qquad (8)$$

Если положить $S_2=G_2(S_1)$, устремить S_1 к бесконечности и повторить рассуждения, то можно вывести аналогичные уравнения. Они получаются из (6) перестановками индексов 1 и 2 и заменами $\theta_1\leftrightarrow 1-\theta_2,\ \gamma_1\leftrightarrow-\gamma_2$:

$$-\theta_2c_2=(1-\theta_2)(c_1c_2)^{1-\theta_1},\ 2\delta_1(c_1c_2)^{-\gamma_1}w_1+2\delta_2w_2=-\gamma_2\sigma^2(K_2-K_1(c_1c_2)^{-\gamma_1}). \quad (9)$$

Из системы уравнений (8), (9) находим параметры $c_i, w_i,\ i=1,2.$ ■

4. Верхняя оценка стоимости опциона

Из построений следует, что функция $\bar{G}_i(S_{3-i})=\max(S_i^*, c_iS_{3-i}+w_i)$ не превосходит функцию $G_i(S_{3-i}),\ i=1,2.$ Поэтому если в определении множества M_i функцию G_i заменить на $\bar{G}_i$, то получим множество $\bar{M}_i$, содержащее M_i. Поскольку $S_i^*>rK_i/\delta_i$, в точках множества $\bar{M}_i$ подынтегральная функция в (3) принимает положительные значения. Заменяя в (3) M_i на $\bar{M}_i$, находим верхнюю оценку стоимости опциона $\bar{F}(S)$. Пусть интегралы $\bar{J}_{ij}$ получены заменой в интегралах J_{ij} (см. (5)) в формулах для d_{ij} функций G_i на $\bar{G}_i$. Тогда $\bar{F}(S)=\delta_1\bar{J}_{11}-r\bar{J}_{10}+\delta_2\bar{J}_{21}-r\bar{J}_{20}$.

5. Пример

Возьмем следующие значения параметров:

$$r=0{,}05;\ \delta_1=\delta_2=0{,}01;\ \sigma_1=0{,}2;\ \sigma_2=0{,}1;\ \rho=0{,}5;\ K_1=3,\ K_2=2.$$

Тогда $c_1=c_2\approx1{,}83;\ w_1\approx8{,}82;\ w_2\approx3{,}35;\ S_1^*\approx21{,}95,\ S_2^*\approx11{,}22.$ В табл. представлены оценки для стоимости $F(S)$ рассматриваемого опциона при нескольких значениях начальных стоимостей активов. В первой строке указана верхняя оценка $\bar{F}(S)$, во второй строке содержится нижняя оценка $F_0(S)$, полученная по методу, предложенному в [6].

Таблица

Оценки	$S_1=10,\ S_2=7$	$S_1=22,\ S_2=7$	$S_1=3,\ S_2=2$	$S_1=2,\ S_2=1$
$\bar{F}(S)$	9,01	19,30	2,347	1,373
$F_0(S)$	8,87	19,04	2,1689	1,214

Литература

1. Broadie M., Detemple J. The valuation of American options on multiple assets// Mathematical Finance. 1997. V. 7. P. 241-285.
2. Vasin A.A., Morozov V.V. Investment decisions under uncertainty and evaluation of American options// International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 2006. V. 15. N. 3. P. 323-336.
3. Хижняк К.В. Оценка бесконечного американского опциона на максимум рискового и безрискового активов// Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2011. № 3. С. 23-30.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Факты. Модели. Т.3. Теория. – М.: ФАЗИС, 1998.
5. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Martingale approach to pricing American options// AUSTIN Bulletin. 1994. V. 24. P. 195-200.
6. Морозов В.В., Муравей Д.Л. Нижняя оценка стоимости бесконечного американского альтернативного опциона на два актива// Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова/ Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2010. № 36. С. 99-106.