# Раздел II. Информатика

*В.В. Морозов, В.А. Бабин*

## ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ В МОДЕЛИ МЕРТОНА*

### 1. Введение

Мертон в [1] исследовал модель оптимального потребления при управлении финансовым портфелем. Как заметили в [2] Сети и Таксар, построенная в [1] оптимальная стратегия допускает два нежелательных для инвестора события: отрицательную стоимость портфеля (техническое разорение) и отрицательное потребление (внешнее финансирование). В настоящей статье дается оценка сверху для вероятности наступления какого-либо из этих событий в модификации модели Мертона, предложенной Лю [3]. С моделями оптимального потребления, учитывающими разорение, можно ознакомиться по монографии Сети [4].

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка $r > 0$ не зависит от времени, а стоимость рискового актива $S(t)$ удовлетворяет уравнению геометрического броуновского движения

$$dS(t) = S(t)(\alpha dt + \sigma dz(t)),$$

где $\alpha$ – средняя доходность, $\sigma > 0$ – волатильность актива, а $z(t)$ – стандартный винеровский процесс, $z(0) = 0$.

Предположим, что портфель инвестора содержит два актива: рисковый и безрисковый. Пусть $\pi(t)$ – доля рискового актива в стоимости портфеля $w(t)$, а $C(t)$ – интенсивность потребления в момент $t \in [0,T]$. Полезность потребления за отрезок времени $[t, t+dt]$ равна $U(C(t))dt$, где $U(C) = ((1-\gamma)/\gamma)(C/(1-\gamma)+\eta)^{\gamma}$ – гиперболическая функция полезности, $0 < \gamma < 1$, $\eta > 0$. Стратегией инвестора назовем пару измеримых функций $(\pi(\cdot), C(\cdot)) : R \times [0,T] \to R^2$, удовлетворяющую при всех $t \in [0,T]$ следующим условиям:

$$|w\pi(w,t)| + |C(w,t)| \le D_1(1+|w|), \ \forall w \in R, \tag{1}$$

$$|w_1\pi(w_1,t) - w_2\pi(w_2,t)| + |C(w_1,t) - C(w_2,t)| \le D_2(|w_1 - w_2|), \ \forall w_1, w_2 \in R, \tag{2}$$

где $D_1, D_2$ – положительные константы.

---

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00353 а.

Пусть $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ – фильтрация[1], порожденная процессом $z(t)$. Для любой стратегии $(\pi(\cdot),C(\cdot))$ существует единственный непрерывный $\{F_t\}$-согласованный процесс $w(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$dw(t)=w(t)[((\alpha-r)\pi(w(t),t)+r)dt+\sigma dz(t)]-C(w(t),t)dt,\ w(0)=w_0 \quad (3)$$

(см. [1,5]). Процесс $w(t)$ определяет по стратегии $(\pi(\cdot),C(\cdot))$ процессы $\pi(t)=\pi(w(t),t)$ и $C(t)=C(w(t),t)$. Стратегию $(\pi(\cdot),C(\cdot))$ назовем допустимой, если с вероятностью 1 выполнены неравенства

$$C(t)\ge-(1-\gamma)\eta,\ t\in[0,T],\ w(T)\ge-(1-\gamma)\eta. \quad (4)$$

Множество всех допустимых стратегий инвестора обозначим через $\Gamma$.

Поставим задачу оптимального потребления [3]. Для любой начальной стоимости портфеля $w>0$ требуется найти

$$J(w,0)=\max_{(\pi(\cdot),C(\cdot))\in\Gamma}\mathrm{E}_0[\int_0^T e^{-\beta t}U(C(t))dt+Pe^{-\beta T}U(w(T))].$$

где $\mathrm{E}_0$ – символ математического ожидания при условии $w=w(0)$, $\beta$ – ставка дисконтирования, $P=(1-\Delta)/\Delta$, а $\Delta\in(0,1)$ – коэффициент важности непрерывного потребления. Отметим, что в [1] взято $\Delta=1$ и терминальное потребление отсутствовало. Более общая задача состоит в нахождении функции

$$J(w,t)=\max_{(\pi(\cdot),C(\cdot))\in\Gamma_t}\mathrm{E}_t[\int_t^T e^{-\beta(s-t)}U(C(s))ds+Pe^{-\beta(T-t)}U(w(T))],$$

где $\Gamma_t$ – сужение множества стратегий $\Gamma$ на отрезок $[t,T]$, а $w=w(t)$.

В п.3 найдена оптимальная стратегия инвестора. В п.4 при ее использовании дана оценка сверху вероятности осуществления события $A\cup B$, где $A$ – событие разорения инвестора, а $B$ – событие отрицательного потребления в некоторый момент времени $t\in[0,T]$.

## 3. Оптимальная стратегия инвестора

Пусть функция $J(w,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $w$ и непрерывно дифференцируема по $t$. Тогда она удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби- Беллмана (см. [1,3])

$$\beta J=\max_{C\ge-(1-\gamma)\eta,\ \pi}[U(C)+(((\alpha-r)\pi+r)w-C)J_w+J_t+0.5\sigma^2\pi^2w^2J_{ww}] \quad (5)$$

с терминальным условием $J(w,T)=PU(w)$. Здесь $J_w, J_t$ и $J_{ww}$ – частные производные функции $J(w,t)$. Предположим, что решение уравнения (5) – возрастающая и вогнутая по $w$ функция $J(w,t)$. Тогда оптимальная стратегия инвестора определяется из условий первого порядка

$$\pi^*(w,t)=-\frac{(\alpha-r)J_w(w,t)}{\sigma^2wJ_{ww}(w,t)},\ C^*(w,t)=(1-\gamma)J_w^{1/(\gamma-1)}(w,t)-(1-\gamma)\eta. \quad (6)$$

[1] Понятия, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями, см. в [5].

После подстановки функций $\pi^*(\cdot)$ и $C^*(\cdot)$ в (5) получим уравнение

$$\beta J = \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma} J_w^{\gamma/(\gamma-1)} + [(1-\gamma)\eta + rw]J_w + J_t - \frac{(\alpha-r)^2 J_w^2}{2\sigma^2 J_{ww}}. \qquad (7)$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$J(w,t) = ((1-\gamma)/\gamma) f(t)(w/(1-\gamma)+g(t))^{\gamma}.$$

Подставляя это выражение в (7) и сокращая на $(w/(1-\gamma)+g(t))^{\gamma-1}$, приравняем коэффициенты при $w$ и свободные члены левой и правой частей. В результате получим задачу Коши для функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$\frac{\beta}{\gamma} f(t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} f^{\gamma/(\gamma-1)}(t) + \nu f(t) + \frac{1}{\gamma} f'(t),\ f(T) = P,\ \text{где } \nu = r + \frac{(\alpha-r)^2}{2(1-\gamma)\sigma^2},$$

$$\frac{\beta(1-\gamma)}{\gamma} f(t)g(t) = \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma} f^{\gamma/(\gamma-1)}(t)g(t) + (1-\gamma)\eta f(t) +$$

$$+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2} f(t)g(t) + \frac{1-\gamma}{\gamma} f'(t)g(t) + (1-\gamma)f(t)g'(t),\ \mathrm{g}(T) = \eta. \qquad (8)$$

Отсюда $f(t) = \left(\mu^{-1}(1-(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu(T-t)})\right)^{1-\gamma}$, где $\mu = (1-\gamma)^{-1}(\beta - \gamma\nu) \neq 0.$

Если $\mu = 0,$ то $f(t) = \left(P^{1/(1-\gamma)} + T - t\right)^{1-\gamma}$. После подстановки $f(t)$ в (8) получим уравнение $0 = \eta - rg(t) + g'(t),\ g(T) = \eta,$ решение которого равно $g(t) = \eta r^{-1}\left(1-(1-r)e^{-r(T-t)}\right).$ Отметим, что в [1] $P = 0,\ g(T) = 0$ и поэтому $g(t) = \eta r^{-1}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)$. Из (6) имеем:

$$\pi^*(w,t) = \frac{(\alpha-r)}{\sigma^2 w}\left(\frac{w}{1-\gamma} + g(t)\right),\ C^*(w,t) = (1-\gamma) f^{1/(\gamma-1)}(t)\left(\frac{w}{1-\gamma} + g(t)\right) - (1-\gamma)\eta.$$

Поскольку функции $f(t)$ и $g(t)$ ограничены на отрезке $[0,T]$, найденная стратегия $(\pi^*(\cdot),\ C^*(\cdot))$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Осталось проверить условие (4).

Обозначим через $w^*(t)$ процесс, определяемый из (3) по стратегии (6). Как и в [1], введем вспомогательный процесс $X(t) = w^*(t) + (1-\gamma)g(t)$. Тогда процессы $\pi^*(t)$ и $C^*(t)$ можно записать в виде

$$\pi^*(t) = -\frac{(\alpha-r)J_w(w^*(t),t)}{\sigma^2 w^*(t) J_{ww}(w^*(t),t)} = \frac{(\alpha-r)}{\sigma^2 w^*(t)}\left(\frac{w^*(t)}{1-\gamma} + g(t)\right) = \frac{(\alpha-r)X(t)}{(1-\gamma)\sigma^2 w^*(t)},$$

$$C^*(t) = (1-\gamma)(J_w^{1/(\gamma-1)}(w^*(t),t) - \eta) = \frac{\mu X(t)}{1-(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu(T-t)}} - (1-\gamma)\eta.$$

Подставим $\pi^*(t)$ и $C^*(t)$ в уравнение (3) для $w^*(t)$:

$$dw^*(t)=X(t)\left(\frac{(\alpha-r)^2}{(1-\gamma)\sigma^2}dt-\frac{\mu}{1-(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu(T-t)}}dt+\frac{\alpha-r}{(1-\gamma)\sigma}dz(t)\right)+$$
$$+(rw^*(t)+(1-\gamma)\eta)dt.$$
Поскольку $w^*(t)=X(t)-(1-\gamma)g(t)$, $X(t)$ удовлетворяет уравнению
$$dX(t)=X(t)\left(r+\frac{(\alpha-r)^2}{(1-\gamma)\sigma^2}-\frac{\mu}{1-(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu(T-t)}}\right)dt+\frac{\alpha-r}{(1-\gamma)\sigma}X(t)dz(t),$$
из которого находим
$$X(t)=X(0)\exp\left(\left(\nu-\mu-\frac{(\alpha-r)^2\gamma}{2(1-\gamma)^2\sigma^2}\right)t+\frac{\alpha-r}{(1-\gamma)\sigma}z(t)\right)\cdot\frac{1-(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu(T-t)}}{1-(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu T}}.$$
Отметим, что при $P=0$ формула для $X(t)$ совпадает с аналогичной формулой, найденной Мертоном (см. [1]). Нетрудно видеть, что процесс $X(t)$ с вероятностью 1 принимает положительные значения. Следовательно, для процесса $C^*(t)$ и случайной величины $w^*(T)$ ограничение (4) выполнено. Поэтому стратегия $(\pi^*(\cdot),C^*(\cdot))\in\Gamma$.

## 4. Оценка вероятности разорения

Введем следующие обозначения:
$$\alpha_1=\nu-\mu-\frac{(\alpha-r)^2\gamma}{2(1-\gamma)^2\sigma^2},\ \sigma_1=\frac{|\alpha-r|}{(1-\gamma)\sigma},\ x_1(t)=\alpha_1 t+\sigma_1 z(t),\ t\in[0,T],$$
$$\psi(t,a,b)=\frac{1-(1-ab^{1/(1-\gamma)})e^{-a(T-t)}}{a},\ b>0,\ a\neq 0,\ \psi(t,0,b)=b^{1/(1-\gamma)}+T-t,\ b>0,$$
$$\vartheta(t,a,b)=\ln\psi(t,a,b),\ \theta(t)=\ln\frac{\psi(t,r,1)}{\psi(t,\mu,P)},\ d_0=\frac{(1-\gamma)\eta\psi(0,\mu,P)}{X(0)}.$$
Тогда
$$X(t)=e^{x_1(t)}\frac{X(0)\psi(t,\mu,P)}{\psi(0,\mu,P)},\ C^*(t)=e^{x_1(t)}\frac{X(0)}{\psi(0,\mu,P)}-(1-\gamma)\eta,\ g(t)=\eta\psi(t,r,1).$$

Теперь событие разорения можно записать как
$$A=\{\exists t\in[0,T]:w^*(t)\le 0\}=\left\{\exists t\in[0,T]:e^{x_1(t)}\le d_0\frac{\psi(t,r,1)}{\psi(t,\mu,P)}\right\},$$
а событие отрицательного потребления как
$$B=\{\exists t\in[0,T]:C^*(t)<0\}=\{\exists t\in[0,T]:e^{x_1(t)}<d_0\}.$$
По теореме 13.1.1 из [6] вероятность касания траекторией процесса $x_1(t)$ уровня $\ln d_0$ равна нулю. Поэтому события $B$ и $\overline{B}=\{\exists t\in[0,T]:e^{x_1(t)}\le d_0\}$ отличаются на множество меры нуль, и в дальнейшем вместо $B$ будем

использовать событие $\overline{B}$. Требуется оценить сверху вероятность события $A\cup\overline{B}$. Сначала рассмотрим свойства введенных функций.

Нетрудно проверить, что при $t<T$ функция $\psi(t,a,b)$ убывает по $a$ и возрастает по $b$. Действительно, $\psi'_b(t,a,b)=b^{\gamma/(1-\gamma)}e^{-a(T-t)}/(1-\gamma)>0$, а

$$\psi'_a(t,a,b)=\frac{(1+a(T-t))e^{-a(T-t)}-1-a^2b^{1/(1-\gamma)}(T-t)e^{-a(T-t)}}{a^2}<0,\ a\neq 0.$$

Если $P=1$, то при $\mu<r$ $(\mu>r)$ для всех $t\in[0,T]$ выполнено неравенство $\psi(t,\mu,1)>\psi(t,r,1)$ $(\psi(t,\mu,1)<\psi(t,r,1))$. При $P\neq 1$ взаимное расположение графиков функций $\psi(t,r,1)$ и $\psi(t,\mu,P)$ по переменной $t$ дается следующим утверждением.

**Лемма.** *Если* $0<P<1$ $(P>1)$, *то в случае* $\psi(0,r,1)>\psi(0,\mu,P)$ $(\psi(0,r,1)<\psi(0,\mu,P))$, *в частности, при* $\mu\geq r$ $(\mu\leq r)$, *выполнено неравенство* $\psi(t,r,1)>\psi(t,\mu,P)$ $(\psi(t,r,1)<\psi(t,\mu,P))$ *при всех* $t\in[0,T]$, *а в случае* $\psi(0,r,1)\leq\psi(0,\mu,P)$ $(\psi(0,r,1)\geq\psi(0,\mu,P))$ *графики функций* $\psi(t,r,1)$ *и* $\psi(t,\mu,P)$ *имеют единственную точку пересечения* $t_0\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть $0<P<1$ и $\psi(0,r,1)>\psi(0,\mu,P)$. Заметим, что при этом $\psi(T,r,1)=1>\psi(T,\mu,P)=P^{1/(1-\gamma)}$. Если $r\leq\mu$, то, используя монотонность функции $\psi(t,a,b)$ по переменным $a$ и $b$, получим неравенства $\psi(t,r,1)\geq\psi(t,\mu,1)>\psi(t,\mu,P)$ для всех $t\in[0,T]$. Рассмотрим случай $r>\mu$. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда графики функций $\psi(t,r,1)$ и $\psi(t,\mu,P)$ пересекаются в некоторой точке $t_0\in[0,T]$. Поскольку $r<1$, справедливы неравенства

$$\psi'_t(0,r,1)=-(1-r)e^{-rT}>-(1-\mu)e^{-\mu T}\geq-(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu T}=\psi'_t(0,\mu,P).$$

Отсюда следует, что разность производных $\psi'_t(t,r,1)-\psi'_t(t,\mu,P)$ обращается в нуль по меньшей мере в двух точках $t_1\in(0,t_0)$ и $t_2\in[t_0,T]$, что невозможно. Если $0<P<1$ и $\psi(0,r,1)\leq\psi(0,\mu,P)$, то графики функций $\psi(t,r,1)$ и $\psi(t,\mu,P)$ пересекаются в некоторой точке $t_0\in[0,T]$. Как и выше, нетрудно доказать, что такая точка единственна. Аналогичное доказательство проводится при $P>1$. ■

Найдем производные функции $\vartheta(t,a,b)$ по переменной $t$ :

$$\vartheta'_t(t,a,b)=\psi'_t(t,a,b)/\psi(t,a,b)=-(1-ab^{1/(1-\gamma)})e^{-a(T-t)}/\psi(t,a,b),$$

$$\vartheta''_{tt}(t,a,b)=\psi'_t(t,a,b)/\psi^2(t,a,b)=a/\psi(t,a,b)-1/\psi^2(t,a,b).$$

Нетрудно видеть , что при $ab^{1/(1-\gamma)}<1$ функция $\vartheta(t,a,b)$ убывает и строго вогнута, а при $ab^{1/(1-\gamma)}>1$ она возрастает и строго выпукла по $t\in[0,T]$.

**Утверждение 1.** *Если* $P\neq 1$, *то функция* $\theta(t)$ *либо не имеет нулей на отрезке* $[0,T]$, *либо имеет единственный нуль. При* $\mu P^{1/(1-\gamma)}\geq 1$ *она* *убывает и строго вогнута. Если* $0<P<1$ *и* $\mu \le r$, *то на отрезке* $[0,T]$ *функция* $\theta^{+}(t)=\max[\theta(t),0]$ *выпукла. Если* $P>1$ и $\mu \ge 2/\psi(t_0,r,1)$, *где* $t_0 \in (0,T)$ *– нуль функции* $\theta(t)$, *то функция* $\theta(t)$ *строго вогнута на отрезке* $[0,t_0]$.

Доказательство. Утверждение относительно нуля функции $\theta(t)$ следует из леммы. Поскольку $r<1$, функция $\vartheta(t,r,1)$ убывает и строго вогнута. При $\mu P^{1/(1-\gamma)}>1$ функция $\vartheta(t,\mu,P)$ возрастает и строго выпукла, а при $\mu P^{1/(1-\gamma)}=1$ она постоянна. Поэтому если $\mu P^{1/(1-\gamma)}\ge 1$, то функция $\theta(t)=\vartheta(t,r,1)-\vartheta(t,\mu,P)$ убывает и строго вогнута на отрезке $[0,T]$.

Пусть $0<P<1$ и $\mu \le r$. Функция $\psi_t'(t,a,1)=-(1-a)e^{-a(T-t)}$ возрастает по $a<1$ при любом $t\in[0,T]$. Отсюда

$$\psi_t'(t,r,1)\ge \psi_t'(t,\mu,1)=-(1-\mu)e^{-\mu(T-t)}\ge -(1-\mu P^{1/(1-\gamma)})e^{-\mu(T-t)}=\psi_t'(t,\mu,P).$$

Возьмем $t\in[0,T]$, для которого $\theta(t)>0$ или $\psi(t,r,1)>\psi(t,\mu,P)$. Имеем:

$$\theta''(t)=\frac{\psi_t'(t,r,1)}{\psi^2(t,r,1)}-\frac{\psi_t'(t,\mu,P)}{\psi^2(t,\mu,P)}>\frac{\psi_t'(t,r,1)-\psi_t'(t,\mu,P)}{\psi^2(t,\mu,P)}>0.$$

Следовательно, функция $\theta^{+}(t)$ выпукла на отрезке $[0,T]$.

Пусть $P>1$ и $\mu\ge 2/\psi(t_0,r,1)$. Поскольку $\psi(t_0,r,1)\le 1/r$, $\mu\ge 2r$. Отсюда при $t\in(0,t_0)$ $\psi(t,r,1)>\psi(t,\mu,P)$ и

$$\theta''(t)=\frac{r}{\psi(t,r,1)}-\frac{1}{\psi^2(t,r,1)}-\frac{\mu}{\psi(t,\mu,P)}+\frac{1}{\psi^2(t,\mu,P)}<$$

$$<\left(\frac{1}{\psi(t,r,1)}-\frac{1}{\psi(t,\mu,P)}\right)\left(\mu-\frac{1}{\psi(t,r,1)}-\frac{1}{\psi(t,\mu,P)}\right)<$$

$$<\left(\frac{1}{\psi(t,r,1)}-\frac{1}{\psi(t,\mu,P)}\right)\left(\mu-\frac{2}{\psi(t_0,r,1)}\right)\le 0. \ \blacksquare$$

Отметим, что в случаях, не указанных в утверждении 1, выпуклость или вогнутость функции $\theta(t)$ можно установить, находя численно минимум и максимум ее второй производной на отрезке $[0,T]$.

Построим функцию $\xi(t)=ct+d$, удовлетворяющую следующему свойству: $\xi(t)\ge\theta^{+}(t)+\ln d_0$ для всех $t\in[0,T]$, где равенство достигается на максимально возможном множестве точек. Приведем примеры функций $\xi(t)$ в зависимости от вида функций $\theta(t)$.

1) Функция $\theta(t)$ неотрицательна и вогнута на $[0,T]$. Тогда $\xi(t)$ положим равной касательной к графику функции $\theta(t)+\ln d_0$ в точке $T/2$.
2) Функция $\theta(t)$ отрицательна на $[0,T]$. Тогда $\xi(t)\equiv\ln d_0$.
3) Функция $\theta^{+}(t)$ выпукла на $[0,T]$. Тогда

$$\xi(t)=(\theta^{+}(T)-\theta^{+}(0))t/T+\theta^{+}(0)+\ln d_0,\ t\in[0,T]. \qquad (9)$$

4) $P>1$ и функция $\theta(t)$ вогнута на отрезке $[0,t_0]$, $\theta(t_0)=0$ (см. рис. 1). Тогда используем формулу (9) с $\theta^{+}(T)=0,\ \theta^{+}(0)=\theta(0)$, если $-\theta(0)/T\geq\theta'(0)$. В противном случае $\xi(t)=\theta'(t^{*})(t-T)+\ln d_0$ – касательная к графику функции $\theta(t)+\ln d_0$, проведенная в точке $t^{*}\in(0,t_0)$, определяемой из уравнения $\theta'(t^{*})(t^{*}-T)=\theta(t^{*})$.

Вероятность события $A\cup\overline{B}$ оценивается сверху вероятностью $Q$ первого достижения нуля процессом $x_2(t)=x_1(t)-\xi(t)=(\alpha_1-c)t+\sigma_1 z(t)-d$ за время $T$, которая задается формулой (см., например, [7])

$$Q=\Phi\left(\frac{d-(\alpha_1-c)T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right)+\exp\left(\frac{2(\alpha_1-c)d}{\sigma_1^2}\right)\Phi\left(\frac{d+(\alpha_1-c)T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right),$$

где $\Phi$ – функция распределения стандартного нормального закона.

## 5. Примеры

Возьмем следующие значения параметров:

$r=0.03,\ \alpha$=0.02, $\beta=0.06,\ \gamma$=0.5, $\sigma$=0.4, $w=15,\ T$=4, $\eta=10,\ P=1.1.$

Здесь $\theta(t)$ – убывающая вогнутая функция с нулем в точке $t_0=2.243$, $\xi(t)$ находится по формуле (9) (рис. 1), а $Q=0.000247$. Если взять $T=8$, то вероятность $Q=0.3875$ резко возрастает. В этом случае $\xi(t)$ – касательная к графику функции $\theta(t)$ в точке $t^{*}=0.5487$. Но положив при этом $w=30$ (или $\eta=5$), получаем $Q=0.0186$. Пусть в исходных данных $P=2$. Тогда $\xi(t)\equiv\ln d_0=-0.2173$ и $Q=0.6623$ – вероятность отрицательного потребления. Однако увеличение $w$ (или уменьшение $\eta$) в два раза приводит к $Q=0.0136$.

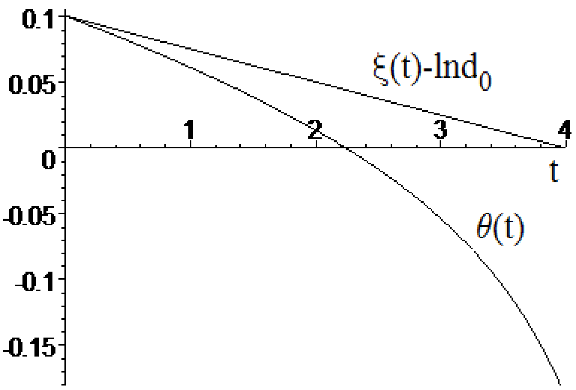


Рисунок 1.

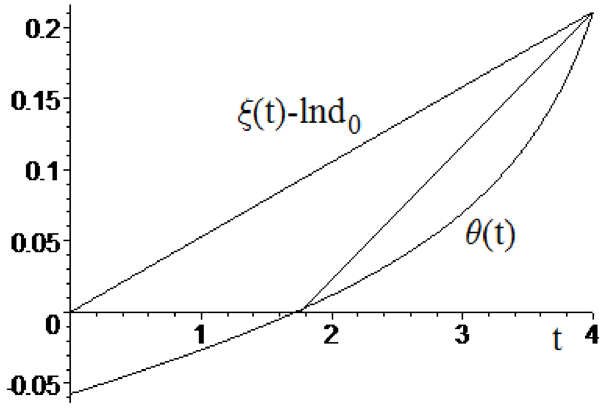


Рисунок 2.

Пусть теперь в исходных данных $\beta=0.01,\ P=0.9,\ \sigma=0.2$. Здесь $\theta(t)$ – возрастающая выпуклая функция с нулем $t_0=1.785$ (рис. 2), а

$Q = 0.0452$. Оценку $Q$ можно улучшить следующим приемом. Положим $d_1 = \ln d_0$. Поскольку $\xi(t) \ge \theta(T)(t-t_0)^+ / (T-t_0) + d_1 \ge \theta^+(t) + d_1$, справедливо неравенство $Q \ge Q^*$, где $Q^*$ – вероятность пересечения нуля за время $T$ процессом $x_3(t) = \alpha_1 t + \sigma_1 z(t) - d_1 - \theta(T)(t-t_0)^+ / (T-t_0)$. При этом $Q^*$ оценивает сверху вероятность события $A \cup \overline{B}$. Для $Q^*$ справедлива формула

$$Q^* = Q_1 + \int_0^\infty f_1(y) G_1(y) dy, \; Q_1 = \Phi\left(\frac{d_1 - \alpha_1 t_0}{\sigma_1 \sqrt{t_0}}\right) + \exp\left(\frac{2\alpha_1 d_1}{\sigma_1^2}\right) \Phi\left(\frac{d_1 + \alpha_1 t_0}{\sigma_1 \sqrt{t_0}}\right),$$

где $Q_1$ обозначает вероятность достижения нуля за время $t_0$ процессом $x_4(t) = \alpha_1 t + \sigma_1 z(t) - d_1$, $f_1(y)/(1-Q_1)$, $y \ge 0$, – плотность распределения случайной величины $x_4(t_0)$ при условии, что за время $t_0$ процесс $x_4(t)$ нуля не достигнет (см. [7]), а $G_1(y)$ – вероятность достижения нуля за время $T - t_0$ процессом $x_5(t) = \alpha_2 t + \sigma_1 z(t) + y$, $\alpha_2 = \alpha_1 - \theta(T)/(T-t_0)$. Здесь

$$f_1(y) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{t_0}} \left[ \varphi\left(\frac{-y - d_1 + \alpha_1 t_0}{\sigma_1 \sqrt{t_0}}\right) - \exp\left(\frac{2\alpha_1 d_1}{\sigma_1^2}\right) \varphi\left(\frac{-y + d_1 + \alpha_1 t_0}{\sigma_1 \sqrt{t_0}}\right) \right],$$

$$G_1(y) = \Phi\left(\frac{-y - \alpha_2 (T - t_0)}{\sigma_1 \sqrt{T - t_0}}\right) + \exp\left(-\frac{2\alpha_2 y}{\sigma_1^2}\right) \Phi\left(\frac{-y + \alpha_2 (T - t_0)}{\sigma_1 \sqrt{T - t_0}}\right).$$

В рассматриваемом случае $Q^* = 0.0375$.

## Литература


1. Merton R.C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model// Journal of Economic Theory. 1971. V. 3. № 4. P. 373−413.

2. Sethi S.P., Taksar M. A note on Merton’s « Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model»// Journal of Economic Theory. 1988. V. 46. № 2. P. 395−401.

3. Liu Jun. Portfolio Selection in stochastic environments. Oxford: Oxford University Press, 2006.

4. Sethi S.P. Optimal consumption and investment with bankruptcy. Norwell, Massachussets: Kluver Academic Publisher, 1997.

5. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003.

6. Питербарг В.И. Двадцать лекций о гауссовских процесах. М.: Издательство МЦНМО, 2015.

7. Ширяев А. Н. О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением// Современные проблемы математики. Т. 8. М.: МИАН, 2007.