Морозов В.В., Обижаева А.А., Сапожникова Д.А.

Оптимизационная задача оценки инвестиционного проекта

Рассматривается дискретная модель инвестиционного проекта производства продукции. Учитываются факторы возможного сбоя и последующего восстановления производственного процесса. Проект продается, если текущие затраты на ремонт превышают некоторую предельную величину. Находится оптимальное значение предельной величины стоимости ремонта.
Статья написана при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 99-01-00184.

1. Постановка задачи.

Пусть инвестиционный проект обеспечивает в моменты времени $t=0,\Delta t,2\Delta t...$ прибыль интенсивности $P(t)$. Это означает, что за промежуток времени $[t,t+\Delta t]$ прибыль от проекта составит величину $P(t)\Delta t$. Предположим, что величина $P(t)$ меняется по закону:

$$P(t+\Delta t)=P(t)\cdot\exp(\tilde{\alpha}\Delta t+Y(t+\Delta t)), \qquad (1)$$

где $Y(t), t=\Delta t,2\Delta t,...$ – независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2\Delta t$.

Пусть в некоторый момент времени t производство функционирует. Тогда за время Δt в производстве может произойти сбой с вероятностью $1-e^{-\mu\Delta t}$. В случае сбоя в момент времени $t+\Delta t$ начинается ремонт, который может быть окончен за время Δt с вероятностью $1-e^{-\beta\Delta t}$. Здесь β и μ — положительные параметры. Аналогичные предположения использованы и в [1].

Пусть R – затраты на ремонт в единицу времени, а ρ — непрерывная ставка банковского процента. Если ремонт производится в течение k промежутков времени Δt, то текущие затраты на него, приведенные на начало ремонта, задаются формулой:

$$R\Delta t\cdot\sum_{i=0}^{k-1}e^{-i\rho\Delta t}=R\Delta t\cdot\frac{1-e^{-k\rho\Delta t}}{1-e^{-\rho\Delta t}}.$$

Предположим, что в случае когда затраты на ремонт превышают величину x, то проект завершается с выплатой C. При этом либо $C>0$, если речь идет о продаже проекта по цене C (например, какого-то оставшегося оборудования), либо $C<0$, что означает затраты $-C$ на его ликвидацию. Максимальное число m отрезков времени, в течение которых текущие затраты на ремонт не превышают x, определяется формулой:

$$m=\max\left\{k:R\Delta t\cdot\frac{1-e^{-k\rho\Delta t}}{1-e^{-\rho\Delta t}}\le x\right\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}e^{-m\Delta t}=\left(1-x\frac{\rho}{R}\right)^{1/\rho}. \qquad (2)$$

Вероятность ремонта в течение m отрезков времени равна $e^{-m\beta\Delta t}$. Отсюда и из (2) следует, что вероятность того, что расходы на ремонт превысят величину $\frac{R}{\rho}$, при малых Δt близка к нулю. Предположим, что x – переменная величина, удовлетворяющая ограничениям $0 \le x \le R/\rho$. Случай $x = 0$ означает, что при возникновении сбоя в производстве проект немедленно завершается.

Интенсивность прибыли в нулевой момент времени $P(0) = P$ предполагается известной. Обозначим через $V(P)$ математическое ожидание приведенной величины потока прибыли с учетом расходов на ремонт и завершение проекта. В п 2. находится явное выражение для $V(P)$. Отметим, что рассматриваемая дискретная модель динамики прибыли $P(t)$ аппроксимирует непрерывную модель, задаваемую стохастическим уравнением геометрического броуновского движения $dP(t) = P(t)(\alpha dt + \sigma dW(t))$, где $\alpha = \tilde{\alpha} + 0.5\sigma^2$, а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс с независимыми нормальными приращениями, математическим ожиданием $E[W(t)] = 0$ и дисперсией $Var[W(t)] = \sigma^2 t$. Поэтому полученные ниже результаты справедливы и для непрерывной модели, если в них Δt устремить к нулю.

В п. 3 рассматривается оценка проекта $F(P)$ – NPV проекта с учетом возможной отсрочки его реализации и затрат на инвестирование I, производимых в начале реализации проекта (см. [2], где рассмотрена непрерывная модель без учета факторов сбоя в производстве). Отметим, что до начала реализации проекта инвестор может в любой момент продать право на инвестирование другому лицу. Поэтому говорят, что $F(P)$ — стоимость (американского) опциона на реализацию проекта. При нахождении предполагается, что инвестор применяет следующее решающее правило с порогом P^*: если $P < P^*$, то проект начинается в момент t^*, когда впервые $P(t^*) \ge P^*$; если $P \ge P^*$, то инвестирование осуществляется немедленно. В [2] в рамках указанной непрерывной модели показано, что $F(P) = AP^s$,

где $s = \dfrac{-\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2}$,

а параметр A и оптимальное значение P^* (максимизирующее $F(P)$) находится из системы

$$F(P^*) = V(P^*) - I; \quad F'(P^*) = V'(P^*). \tag{3}$$

Эти результаты справедливы и для рассматриваемой дискретной модели проекта. Получена явная зависимость коэффициента A от величины предельных затрат на ремонт x и найдено оптимальное значение x, максимизирующее функцию $A(x)$ на отрезке $\left[0, R/\rho\right]$.

2. Оценка инвестиционного проекта V(P)

Утверждение 1. В сделанных предположениях оценка проекта $V(P)$ линейна, то есть $V(P) = aP + b$.

Доказательство. При любом $x \in \left[0, R/\rho\right]$ в случае сбоя в производстве вероятность того, что текущие затраты на ремонт превысят величину x, положительна (см. п.1). Поэтому любая реализация проекта характеризуется конечной последовательностью целых чисел $k_1, k_2, ..., k_{2l+1}$, где $k_1 = 0$ соответствует началу проекта, $k_{2j}\Delta t,\ j = 1,2,...,l$ – моменты поломок, $k_{2j+1}\Delta t,\ j = 1,2,...,l-1$ – моменты возобновления производства, а $k_{2l+1}\Delta t$ – момент завершения производства. Для каждой такой последовательности прибыль от проекта линейна по P. Осредняя ее по всем указанным конечным последовательностям, получим доказательство утверждения.

Найдем теперь явный вид коэффициентов a и b. Воспользуемся методом динамического программирования и составим уравнение Беллмана – Гамильтона – Якоби:

$$V(P) = P\Delta t + e^{-\rho\Delta t} e^{-\mu\Delta t} \mathrm{E} V(P(\Delta t)) + P_1 + P_2, \qquad (4)$$

где P_1 – прибыль от проекта в случае сбоя в производстве на первом отрезке Δt, последующего ремонта и завершения проекта без возобновления производства, P_2 – прибыль от проекта в случае аналогичного сбоя в производстве и его дальнейшего возобновления в результате ремонта. Имеем

$$P_1 = e^{-\rho\Delta t}(1 - e^{-\mu\Delta t}) e^{-m\beta\Delta t} \left(C e^{-m\rho\Delta t} - R\Delta t \sum_{i=0}^{m-1} e^{-i\rho\Delta t} \right) \approx \mu\Delta t \left(1 - \frac{x\rho}{R}\right)^{\beta/\rho} \left(C\left(1 - \frac{x\rho}{R}\right) - x \right)$$

Здесь и далее знак $\approx$ означает, что в выражении отбрасываются члены более высокого порядка относительно Δt. Запишем выражение для P_2 в виде

$$P_2 = e^{-\rho\Delta t}\left(1 - e^{-\mu\Delta t}\right) \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - e^{-\beta\Delta t}\right) e^{-k\beta\Delta t} \left[-R\Delta t \sum_{i=0}^{k} e^{-i\rho\Delta t} + \mathrm{E}\left(V(P((k+2)\Delta t))\right) e^{-(k+1)\rho\Delta t} \right] \right\} =$$

$$= e^{-\rho\Delta t}\left(1 - e^{-\mu\Delta t}\right)\left(1 - e^{-\beta\Delta t}\right)\left(1 - e^{-\rho\Delta t}\right)^{-1} \left[-R\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} e^{-k\beta\Delta t}\left(1 - e^{-(k+1)\rho\Delta t}\right) \right] + e^{-2\rho\Delta t}\left(1 - e^{-\mu\Delta t}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - e^{-\beta\Delta t}\right) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{E}\left(V(P((k+2)\Delta t))\right) e^{-k(\rho+\beta)\Delta t} = P_3 + P_4$$

Подсчитаем сумму P_3:

$$P_3 = e^{-\rho\Delta t}(1-e^{-\mu\Delta t})(1-e^{-\beta\Delta t})(1-e^{-\rho\Delta t})^{-1}\cdot R\Delta t\left[e^{-\rho\Delta t}\sum_{k=0}^{m-1} e^{-k(\beta+\rho)\Delta t} - \sum_{k=0}^{m-1} e^{-k\beta\Delta t}\right] =$$

$$= e^{-\rho\Delta t}(1-e^{-\mu\Delta t})(1-e^{-\beta\Delta t})(1-e^{-\rho\Delta t})^{-1}\cdot R\Delta t\left[e^{-\rho\Delta t}\frac{1-e^{-m(\rho+\beta)\Delta t}}{1-e^{-(\rho+\beta)\Delta t}} - \frac{1-e^{-m\beta\Delta t}}{1-e^{-\beta\Delta t}}\right] \approx$$

$$\approx \frac{\mu\beta}{\rho} R\Delta t\left[\frac{1-\left(1-\frac{x\rho}{R}\right)^{\frac{\beta+\rho}{\rho}}}{\beta+\rho} - \frac{1-\left(1-\frac{x\rho}{R}\right)^{\frac{\beta}{\rho}}}{\beta}\right] =$$

$$\frac{\mu}{\rho} R\Delta t\left[\left(1-\frac{x\rho}{R}\right)^{\frac{\beta}{\rho}} - \frac{\beta}{\beta+\rho}\left(1-\frac{x\rho}{R}\right)^{\frac{\beta+\rho}{\rho}} - \frac{\rho}{\beta+\rho}\right].$$

Для подсчета суммы P_4 воспользуемся приближенным равенством:

$$\mathrm{E}\left[V(P(k\Delta t))\right] \approx V'(P)k\Delta t P\alpha + V(P).$$

Имеем

$$P_4 = e^{-2\rho\Delta t}(1-e^{-\mu\Delta t})(1-e^{-\beta\Delta t})\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{E}\left[V(P(k+2)\Delta t))\right]\cdot e^{-k(\beta+\rho)\Delta t} \approx$$

$$\approx e^{2\beta\Delta t}(1-e^{-\mu\Delta t})(1-e^{-\beta\Delta t})\sum_{k=0}^{m-1} V'(P)P(k+2)\Delta t\alpha\cdot e^{-(k+2)(\rho+\beta)\Delta t} +$$

$$+ e^{-2\rho\Delta t}(1-e^{-\mu\Delta t})(1-e^{-\beta\Delta t})\sum_{k=0}^{m-1} e^{-k(\rho+\beta)\Delta t}V(P) \approx$$

$$\approx \frac{\mu\beta}{\rho+\beta}\Delta t\left[\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{x\rho}{R}\right)^{\frac{\beta+\rho}{\rho}}\ln\left(1-\frac{x\rho}{R}\right) + \frac{1-\left(1-\frac{x\rho}{R}\right)^{\frac{\beta+\rho}{\rho}}}{\rho+\beta}\right] V'(P)P\alpha +$$

$$+ \frac{\mu\beta}{\rho+\beta}\Delta t\left[1-\left(1-\frac{x\rho}{R}\right)^{\frac{\beta+\rho}{\rho}}\right] V(P).$$

Преобразуем уравнение (4) к виду

$$V(P)(1-e^{-(\rho+\mu)\Delta t}) = P\Delta t + e^{-(\rho+\mu)\Delta t}\mathrm{E}\left[V(P(\Delta t)) - V(P)\right] + P_1 + P_3 + P_4.$$

Выделим линейные относительно Δt члены, подставим найденные приближенные выражения для P_1, P_3, P_4 и сделаем замену: $z = 1-\frac{x\rho}{R}$, $0 \le z \le 1$.

В результате после сокращения на Δt получим

$$V(P)\left[\rho+\mu-\frac{\mu\beta}{\beta+\rho}\left(1-z^{\frac{\beta+\rho}{\rho}}\right)\right]=P+\mu\left[Cz-(1-z)\frac{R}{\rho}\right]z^{\frac{\rho}{\beta}}+$$

$$+\frac{\mu}{\rho}R\left[z^{\frac{\rho}{\beta}}-\frac{\beta}{\rho+\beta}z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}-\frac{\rho}{\rho+\beta}\right]+\left[1+\frac{\mu\beta}{\rho+\beta}\left(\frac{1}{\rho}z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}\ln z+\frac{1-z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}}{\rho+\beta}\right)\right]V'(P)P\alpha. \tag{5}$$

Поскольку $V(P)=aP+b$, из (5) находим

$$a=\left[\rho+\mu-\alpha-\frac{\mu\beta}{\beta+\rho}\left(\frac{\alpha}{\rho}z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}\ln z+\left(1+\frac{\alpha}{\rho+\beta}\right)\left(1-z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}\right)\right)\right]^{-1},$$

$$b=\mu\left[\left(C+\frac{R}{\rho+\beta}\right)z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}-\frac{R}{\rho+\beta}\right]\cdot\left[\rho+\mu-\frac{\mu\beta}{\rho+\beta}\left(1-z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}\right)\right]^{-1}.$$

В дальнейшем будем считать, что при $P=0$ величина $V(0)=b(z)$ меньше инвестиционных затрат *I*. В противном случае можно показать, что $C>I$ и появляется так называемая арбитражная возможность: после реализации проект немедленно продается с прибылью $C-I>0$.

3. Оптимизация стоимости опциона проекта F(P).

Как отмечалось в п.1,стоимость опциона проекта задается формулой: $F(P)=AP^s$, $0\le P\le P^*$, где величины A и P^* находятся из системы (3):

$$A(P^*)^s=a(z)P^*+b(z)-I,\quad sA(P^*)^{s-1}=a(z).$$

Отсюда получаем

$$A(z)=\left(\frac{a(z)}{s}\right)^s\left(\frac{s-1}{I-b(z)}\right)^{s-1}\qquad P^*(z)=\frac{s(b(z)-I)}{a(z)(1-s)}$$

Для максимизации $F(P)$ достаточно максимизировать коэффициент $A(z)$. Покажем, что функция $a(z)$ убывает. Для этого достаточно заметить, что при $0\le z\le 1$ ее производная

$$a'_z=\frac{\mu\beta}{\rho a^2}z^{\frac{\beta}{\rho}}\left[\frac{\alpha}{\rho}\ln z-1\right]$$ не положительна.

Рассмотрим теперь знаменатель дроби A(z).

Выполним замену переменной $y=z^{\frac{\rho+\beta}{\rho}}$,

$$0\le y\le 1:\ b=\frac{\mu}{\rho+\beta}[(C(\rho+\beta)+R)y-R][\mu+\rho-\frac{\mu\beta}{\rho+\beta}(1-y)]^{-1}.$$

Тогда ее производная по y имеет вид

$$b'_y=\frac{\mu}{\rho+\beta}[C(\mu\rho+\rho^2+\rho\beta)+R(\mu+\rho)][\mu+\rho-\frac{\mu\beta}{\rho+\beta}(1-y)]^{-2}. \tag{6}$$

Производная знаменателя функции $A(z)$ будет иметь обратный знак.

Утверждение 2. При $C \le -\dfrac{R(\mu+\rho)}{\rho(\mu+\rho+\beta)}$ коэффициент A как функция переменной x достигает максимума в точке $x = \dfrac{R}{\rho}$.

Действительно, при $C \le -\dfrac{R(\mu+\rho)}{\rho(\mu+\rho+\beta)}$ из (6) следует, что знаменатель функции $A(z)$ не убывает. Поскольку числитель функции $A(z)$ убывает, она сама будет убывающей и ее максимум достигается в точке $z = 0$, т.е. при $x = \dfrac{R}{\rho}$.

Экономический смысл этого утверждения заключается в том, что при больших затратах на закрытие проекта его выгодно как можно дольше не продавать.

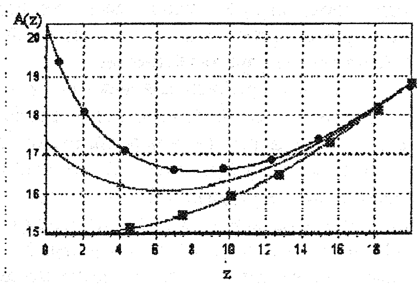
При $C > -\dfrac{R(\mu+\rho)}{\rho(\mu+\rho+\beta)}$ решение задачи максимизации функции $A(x)$ находилось численным методом при различных значениях параметров.

Ниже представлен график зависимости $A(z)$ при следующих значениях параметров:

$\rho = 0.05$; $\tilde{\alpha} = 0.03$; $\sigma^2 = 0.016$; $\mu = 0.02$; $\beta = 0.021$; $R = 1$; $I = 100$.

При этом $\alpha = 0.038$; $s = 1.25$ и критическое значение $C = -15.38$.

Значения C (сверху вниз): 300; 255; 180.



Литература.

1. Смоляк С.А. Учет риска при установлении нормы дисконта // Экономика и математические методы, 1992,том 28, вып. 5-6, стр. 794-801.

2. Dixit A.K. Pindyck R.S. Investments under uncertainty, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.