И.М. Никольский

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Введение

Уравнения нелинейной теплопроводности

$$u_t = \mathrm{div}(k(u)\,\mathrm{grad}u) + Q(u) \tag{1}$$

представляют большой интерес для исследователей в силу большого числа приложений. В нашей стране они изучались, в частности, А.А.Самарским, С.П.Курдюмовым и их учениками (см. [1] и библиографию в ней).

В данной работе рассматривается уравнение типа (1) с источником в виде квадратичного трехчлена. В работе [2] было предложено использовать его при моделировании вспышек в короне Солнца.

Особенностью данного уравнения является наличие положительного устойчивого пространственно однородного стационара. Он играет роль температурного фона (средняя температура Солнца). При рассмотрении задачи Коши мы задаем начальную функцию в виде локализованного возмущения этого фона.

Одной из наших целей является получение достаточного условия на начальную функцию, при котором соответствующее решение является *неограниченным*. Неограниченным (или *растущим в режиме с обострением*) мы будем называть решение $u(\bar{x},t)$, которое определено всюду в R^N на конечном временном полуинтервале $[0,T)$ и, кроме того,

$$\overline{\lim_{t\to T^-}} \sup_{\bar{x}\in R^N} u(\bar{x},t) = \infty$$

(см. [1]). Константа T называется *моментом обострения* $u(\bar{x},t)$.

В [3] с помощью теорем сравнения уже было получено одно такое условие. В данной работе применяется другая техника, и полученное условие имеет интегральный вид.

Для исследования нелинейных уравнений в частных производных важную роль играет построение точных решений. В работе [3] с помощью метода Галактионова (см. [4],[5]) было построено семейство точных периодических решений рассматриваемого уравнения. Такие решения могут быть полезны при доказательстве локализации и выяснении асимптотического поведения различных неограниченных решений.

В данной работе мы продолжаем исследования свойств этих решений, начатые в [3].

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = (uu_x)_x + (u-u_0)(u-u_1), \qquad (2)$$

$$u(x,0) = f(x) \geq u_0, \ -\infty < x < \infty. \qquad (3)$$

Параметры u_0 и u_1 связаны следующим соотношением:

$$u_1 > u_0 > 0. \qquad (4)$$

Отметим, что u_0 и u_1 являются стационарными решениями уравнения (2), первое из них устойчиво, второе – нет.

Мы будем рассматривать непрерывные начальные функции, имеющие имеет вид локализованного возмущения фона u_0:

$$f(x) = u_0 + g(x), \ \mathrm{mes\,supp}\, g(x) < \infty, \ g(x) \geq 0. \qquad (5)$$

Функция $g(x)$ предполагается непрерывной. Ищутся классические решения рассматриваемой задачи Коши (см.[1]).

2. Интегральное условие взрыва задачи Коши

В этом пункте будет получено достаточное условие неограниченности решения задачи (2)-(5). Используется метод пробных функций ([6]). Вывод условия происходит в два этапа: сначала оно обосновывается для соответствующей начально-краевой задачи, а затем распространяется на задачу Коши.

Итак, на отрезке $[0,l]$, где $l > 0$, поставим задачу отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего следующим дополнительным условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = u_0, \qquad (6)$$

$$u(x,0) = f_1(x), \ x \in [0,l], \qquad (7)$$

где $f_1(0) = f_1(l) = u_0$, $f_1(x) \in C[0,l]$ и $f_1(x) \geq u_0$ на $[0,l]$.

Сделаем замену

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0,$$

тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$v_t = ((v+u_0)v_x)_x + v(v+u_0-u_1). \qquad (8)$$

Следуя обычной процедуре метода пробных функций, умножим обе части (8) на некоторую гладкую функцию $\psi(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до l.

Необходимо выбрать $\psi\ (x)$ так, чтобы после интегрирования по частям нужные подстановки обратились в ноль. Для этого в качестве пробной функции следует взять решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$\psi_{xx} + \lambda\psi = 0, \tag{9}$$

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{10}$$

Для дальнейших выкладок выберем из множества решений задачи (9), (10) собственную функцию $\psi_1(x)$, отвечающую наименьшему собственному значению $\lambda_1 = \left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2$, которая имеет следующий вид

$$\psi_1(x) = C_1 \sin\frac{\pi x}{l},\ \text{где}\ C_1 - \text{произвольная константа.}$$

Выберем C_1 так, что

$$\int_0^l \psi_1(x)dx = 1. \tag{11}$$

Тогда $C_1 = \dfrac{\pi}{2l}$ и функция $\psi_1(x)$ положительна на $(0,l)$. Будем считать, что длина отрезка l настолько велика, что

$$\lambda_1 < 2. \tag{12}$$

Для этого должно выполняться неравенство $l > \pi/\sqrt{2}$.

Итак, в качестве пробной функции мы взяли $\psi_1(x)$. Дважды применяя в правой части полученного интегрального тождества интегрирование по частям и учитывая краевые условия для $v(x)$ и $\psi_1(x)$, получим

$$\left(\int_0^l v(x,t)\psi_1(x)dx\right)_t = \int_0^l \psi_1\left[\left(1-\frac{1}{2}\lambda_1\right)v^2 + v(u_0 - u_1 - u_0\lambda_1)\right]dx. \tag{13}$$

Введем функцию $E(t) = \int_0^l v(x,t)\psi_1(x)dx$, тогда уравнение (13) можно переписать следующим образом:

$$E_t = \left(1-\frac{1}{2}\lambda_1\right)\int_0^l \psi_1 v^2 dx + (u_0 - u_1 - u_0\lambda_1)E. \tag{14}$$

Используя интегральное неравенство Йенсена для выпуклых функций, можно получить следующее соотношение:

$$\int_0^l v^2\psi_1 dx \ge \left(\int_0^l v\ \psi_1 dx\right)^2 = E^2.$$

Для выполнения этой оценки существенны положительность $\psi_1(x)$ на $(0,l)$ и нормировка (11). Таким образом, из (14) при $t \ge 0$ следует неравенство

$$E_t \ge \left(1 - \frac{1}{2}\lambda_1\right)E^2 + E(u_0 - u_1 - u_0\lambda_1). \tag{15}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$z_t = az^2 + bz. \tag{16}$$

Будем считать, что $a > 0$, $b < 0$. Решение легко получить аналитически:

$$z(t) = \frac{1}{Ce^{-bt} - \frac{a}{b}}, \tag{17}$$

где $C \ne \frac{a}{b}$. При $z(0) > -\frac{b}{a}$ (тогда $C \in \left(\frac{a}{b}, 0\right)$) решение (17) является неограниченным и существует лишь на полуинтервале $[0,t^*)$, где $t_* = -\frac{1}{b}\ln\frac{a}{bC}$.

Если положить

$$a = 1 - \frac{1}{2}\lambda_1 > 0,$$
$$b = u_0 - u_1 - u_0\lambda_1 < 0,$$

то из сказанного и теории дифференциальных неравенств (см. [8]) вытекает, что функция $E(t)$ будет расти в режиме с обострением при

$$E(0) = \int_0^l v\ (x,0)\psi_1(x)dx > -\frac{b}{a}.$$

Поскольку $E(t) \le \sup\limits_{x\in[0,l]} v(t,x)$, то в этом случае решение уравнения (8) $v(t,x)$ также будет неограниченным. Возвращаясь к искомой функции $u(x,t)$ и используя условие нормировки (11), получим, что для того, чтобы решение краевой задачи (2), (6), (7) было бы неограниченным, достаточно, чтобы начальная функция $f_1(x)$ удовлетворяла бы следующему интегральному условию:

$$\int_0^l f_1(x)\psi_1(x)dx > \frac{1}{1 - 0.5\lambda_1}(u_1 + 0.5\lambda_1 u_0). \tag{18}$$

Таким образом, верно следующее утверждение.

Лемма. *Пусть начально-краевая задача* (2), (6), (7) *поставлена на отрезке* $[0,l]$, $l > \pi/\sqrt{2}$, *а начальная функция* $f_1(x)$ *удовлетворяет* (18). *Тогда решение этой задачи является неограниченным.*

Полученное интегральное условие для краевой задачи дает нам возможность вывести аналогичное условие взрыва для задачи Коши.

Обозначим $\hat{u}(x,t)$ - решение задачи Коши (2)-(5), отвечающей некоторой начальной функции $f(x)$, причем неравенство (18) верно для $f_1(x) = f(x)$. Отметим, что $\hat{u}(x,t) \geq u_0 \quad \forall x \in R$ (вытекает из теоремы сравнения, см. [1]). Пусть носитель функции $g(x)$ (см. (5)) совпадает с отрезком $[0,l]$, иначе сделаем такую замену переменной x, чтобы начало координат совпадало с левым концом носителя $g(x)$. Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $l > \pi/\sqrt{2}$.

Теперь рассмотрим следующую начально-краевую задачу на отрезке $[0,l]$:

$$w_t = (ww_x)_x + (w-u_0)(w-u_1), \tag{19}$$

$$w(0,t) = \hat{u}(0,t),\ w(l,t) = \hat{u}(l,t), \tag{20}$$

$$w(x,0) = f(x),\ x \in [0,l]. \tag{21}$$

Условие (21) означает, что при $t=0$ решение задачи (19)-(21) совпадает с функцией $f(x)$ на $[0,l]$. В силу теоремы единственности решение этой задачи $\hat{w}(x,t)$ тождественно равно $\hat{u}(x,t)$ на $[0,l]$ при любом неотрицательном t (при условии, что оба решения в момент времени t существуют). Из этого, в частности, следует, что $w(0,t) \geq u_0$, $w(l,t) \geq u_0$.

Очевидно, что в наших предположениях на начальную функцию задачи Коши $f(x)$ решение задачи (2),(6),(7) (обозначим его $\hat{z}(x,t)$) при $f_1(x) = w(x,0)$ растет в режиме с обострением. По теореме сравнения $\hat{w}(x,t) \geq \hat{z}(x,t)$ при $x \in [0,l]$, следовательно, $\hat{w}(x,t)$ также растет в режиме с обострением. А поскольку решение $\hat{u}(x,t)$ совпадает с $\hat{w}(x,t)$ на отрезке $[0,l]$, можно утверждать, что и оно будет неограниченным.

Итак, верна следующая

Теорема 1. *Пусть начальная функция задачи Коши* (2)-(4) $f(x)$ *имеет вид* (5). *Допустим, что:*

1. *носителем соответствующей функции* $g(x)$ *является отрезок* $[0,l]$, $l > \pi/\sqrt{2}$;
2. *неравенство* (18) *выполнено для* $f_1(x) = f(x)$.

Тогда решение задачи (2)- (5) *является неограниченным.*

Теорема будет верна и в том случае, если носитель функции $g(x)$ *вложен* в отрезок $[0,l]$.

3. Точные решения основного уравнения

Продолжим исследование уравнения (2) уже без начальных условий. Используя метод Галактионова (см. [4], [5]), будем искать решение уравнения (2) в виде

$$u(x,t)=p(t)+q(t)\cos\frac{x}{\sqrt{2}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (2), получаем динамическую систему для $p(t)$ и $q(t)$:

$$\begin{cases}\dot{p}=p^2+\dfrac{1}{2}q^2-(u_0+u_1)p+u_0u_1,\\ \dot{q}=\dfrac{3}{2}pq-(u_0+u_1)q.\end{cases} \tag{23}$$

При $u_1>2u_0$ система имеет 4 особых точки: два седла с координатами $\left(2(u_1+u_0)/3,\pm\sqrt{2\left[2(u_1+u_0)^2/9-u_0u_1\right]}\right)$ и два узла-устойчивый $(u_0,0)$ и неустойчивый $(u_1,0)$. Есть также особые точки, лежащие на бесконечности (подробнее о таких точках см. [7]). Это концы прямых $p=\pm q$ (устойчивые узлы) и концы оси p (сёдла).

При уменьшении значения u_1 ($u_1\to 2u_0$) фазовый портрет меняется: сёдла приближаются к неустойчивому узлу, и при $u_1\le 2u_0$ у системы остаётся лишь две особые точки – устойчивый узел $(u_0,0)$ и седло $(u_1,0)$.

Очевидно, что фазовый портрет (23) симметричен относительно оси абсцисс: если пара функций $(p(t),q(t))$ является решением системы, то и $(p(t),-q(t))$ будет удовлетворять ей.

Всюду далее мы рассматриваем задачу Коши для системы (23) при следующих ограничениях. Во-первых, считаем, что $u_1>2u_0$. Во-вторых, рассматриваем только положительные начальные данные для системы (23): $p_0=p(0)>0$, $q_0=q(0)>0$. Легко показать, что в этом случае соответствующая траектория $(p(t),q(t))$ целиком лежит в первом квадранте плоскости (p,q): $p(t)>0$, $q(t)>0$ $\forall t>0$ (см. [3]).

4. Неограниченные точные решения

Выясним, при каких условиях на начальную точку системы (p_0,q_0) решение (22) будет расти в режиме с обострением.

В работе [3] было доказано следующее. При $p_0>u_1$ коэффициент $p(t)$ растет в режиме с обострением, время его существования можно оценить сверху. При $p_0>u_0+u_1$ оба коэффициента $p(t)$ и $q(t)$ неограниченны, причем моменты обострения у них одинаковы. Таким образом, при $p_0>u_1$ решение (22) существует конечное время. Ниже мы расширим множество начальных точек (p_0, q_0), которым отвечают неограниченные решения (22).

Очевидно, что $\dot{p}(t) > 0$, если точка $(p(t), q(t))$ лежит вне эллипса, который задается уравнением:

$$\left(p - \frac{(u_0 + u_1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}q^2 = \frac{(u_0 + u_1)^2}{4}. \tag{24}$$

Это следует из анализа первого уравнения системы (23). Аналогично, $\dot{q}(t) > 0$, если $p(t) > \frac{2}{3}(u_0 + u_1)$.

Введем обозначения для следующих множеств на плоскости (p, q): ω_1 - внешность эллипса (24), $\omega_2 = \left\{p > \frac{2}{3}(u_0 + u_1)\right\}$,

$$\Omega = \{\omega_1 \cap \omega_2 \cap \{p, q > 0\}\}. \tag{25}$$

Если $(p(0), q(0)) \in \Omega$, то $(p(t), q(t)) \in \Omega$ для любого $t \geq 0$, при котором решение системы существует. Выход траектории из области Ω означал бы, что в некоторый момент времени $t_* > 0$ либо $\dot{p}(t_*) < 0$, либо $\dot{q}(t_*) < 0$, причем $(p(t_*), q(t_*)) \in \Omega$. Это противоречит тому, что $\dot{p}(t) > 0$, $\dot{q}(t) > 0$ при $t \geq 0$, пока $(p(t), q(t)) \in \Omega$.

В области Ω вторые производные функций $p(t)$ и $q(t)$ также положительны. В этом легко убедиться, продифференцировав по t оба уравнения системы (23). Таким образом, можно утверждать, что в Ω первые производные от $p(t)$ и $q(t)$ отделены от нуля снизу некоторой положительной константой.

Пусть $[0, T)$ - максимальный полуинтервал существования решения системы (23) $(p(t), q(t))$, такого что $(p(0), q(0)) \in \Omega$. Предположим, что $T = \infty$, то есть это решение определено глобально. В силу сказанного найдется такой достаточно большой момент времени $t_{**} > 0$, что $p(t_{**}) > u_0 + u_1$. Мы пришли к противоречию, так как в этом случае $T < \infty$. Таким образом, решение $(p(t), q(t))$ существует на конечном полуинтервале.

Используя следствие 3.2 из леммы 3 [8] заключаем, что $\sqrt{p^2(t) + q^2(t)} \to \infty$ при $t \to T$. Следовательно (поскольку $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$, если $a, b > 0$), сумма коэффициентов $p(t) + q(t)$ также стремится к бесконечности при $t \to T$.

Поскольку при $x = 2\sqrt{2}\pi n$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,...$ выполняется равенство $p(t) + q(t)\cos\frac{x}{\sqrt{2}} = p(t) + q(t)$, можно заключить, что решение вида (22) существует лишь конечное время, если $(p_0, q_0) \in \Omega$.

Таким образом, верно следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть $(p(t), q(t))$ – решение системы (23), отвечающее начальным данным (p_0, q_0), причем $(p_0, q_0) \in \Omega$. Здесь Ω – множество, определенное формулой (25). Тогда решение вида (22) с коэффициентами $p(t)$ и $q(t)$ растет в режиме с обострением.*

Еще одно условие можно получить, сложив оба уравнения системы. Оценим снизу правую часть нового уравнения:

$$(p+q)' = \frac{1}{2}q^2 + p^2 - (u_0 + u_1)p + \frac{3}{2}pq + u_0 u_1 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(p+q)^2 - (u_0 + u_1)(p+q) + u_0 u_1$$

Отсюда следует, что $p(t) + q(t) \geq s(t)$, где $s(t)$ - решение уравнения

$$s_t = \frac{1}{2}s^2 - (u_0 + u_1)s + u_0 u_1, \tag{26}$$

при условии $p(0) + q(0) \geq s(0)$.

Соответствующее алгебраическое уравнение $\frac{1}{2}x^2 - (u_0 + u_1)x + u_0 u_1 = 0$ имеет корни

$$x_1 = u_0 + u_1 - \sqrt{u_0^{\ 2} + u_1^{\ 2}}\ ,\ x_2 = u_0 + u_1 + \sqrt{u_0^{\ 2} + u_1^{\ 2}}\ .$$

Уравнение (26) заменой $t = 2p$ сводится к

$$s_p = (s - x_1)(s - x_2), \tag{27}$$

Подобное уравнение рассматривалось в [3] как вспомогательное. Было показано, что оно сводится к уравнению Бернулли. Его решение имеет вид

$$s(p) = x_1 + \frac{1}{Ce^{(x_2 - x_1)p} + \dfrac{1}{x_2 - x_1}}, \tag{28}$$

где $C = \dfrac{x_2 - s_0}{(s_0 - x_1)(x_2 - x_1)}$, $s_0 = s(0)$, $s_0 \neq x_1$. Поведение решения определяется начальным значением $s(0) = s_0$. При $s_0 \in (x_1, x_2)$ решение $s(t)$ стремится к x_1 справа при $t \to \infty$. В случае $s_0 = x_1$ или $s_0 = x_2$ решение будет стационарным. Режим с обострением наблюдается при

$s_0 \in (x_2, +\infty)$, И, наконец, при $s_0 \in (\infty, x_1)$ $s(t)$ стремится к x_1 слева при $t \to \infty$.

Из всего сказанного легко видеть, что сумма $p(t)+q(t)$ растет в режиме с обострением при

$$p(0)+q(0) > x_2. \qquad (29)$$

Следовательно, выполняется

Теорема 3*. Пусть* $(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$ *- решение системы* (23), *причем*

$$\tilde{p}(0)+\tilde{q}(0) > u_0 + u_1 + \sqrt{u_0^{\,2} + u_1^{\,2}}\,.$$

Тогда решение вида (22) с коэффициентами $\tilde{p}(t)$ *и* $\tilde{q}(t)$ *растет в режиме с обострением.*

Литература

1. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.
2. *Ковалёв В.А., Чернов Г.П., Ханаока И.* Мелкомасштабные высокотемпературные структуры во вспышечной области. // Письма в астрономический журнал, 2001, том 27, № 4, с. 310-320
3. *Никольский И.М.* О режимах с обострением в одном нелинейном параболическом уравнении. //Вестн. Моск. ун-та. сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 2007. № 4, с.25-32
4. *Galaktionov V.A.* Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A., 1995, no.2, pp 225-246.
5. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. - Boca Raton, Chapman & Hall / CRC, 2007. - 498 c.
6. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН, т.234, М., Наука, 2001.
7. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука,.1990, 486 с.
8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970, 720 с.