

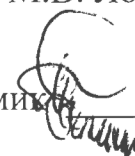
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

«Утверждаю»

Декан факультета ВМК МГУ
имени М.В. Ломоносова

академик



Е.И. Моисеев

«__» _____ 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Обыкновенные дифференциальные уравнения и оптимальное управление»

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление» (01.01.02)

2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и оптимальное управление.

2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре.

3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.06.01 «Математика и механика». Направленность (профиль) «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02).

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина является обязательной для освоения в 1-м семестре обучения.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
ПК-1 Владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики	З1 (ПК-1) Знать: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1) Уметь: применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1) Владеть: навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении

	естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения
Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях. (УК -1)	У1 (УК-1) УМЕТЬ: анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов В1(УК-1) ВЛАДЕТЬ: навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)	З1(ОПК-1) ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области У1(ОПК-1) УМЕТЬ: уметь самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
Владение методами математического моделирования для анализа экономических и социальных процессов, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики (ПК-5)	З1 (ПК-5) ЗНАТЬ: современные математические модели в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики и методы их анализа У1 (ПК-5) УМЕТЬ: применять современные методы построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики В1 (ПК-5) ВЛАДЕТЬ: навыками оптимального выбора и создания новых современных методов построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики

--	--

\\

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов.

40 часов составляет контактная работа с преподавателем – 24 часа занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 12 часов мероприятий текущего контроля успеваемости, 2 часа групповых консультаций, 2 часа мероприятий промежуточной аттестации.

68 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.

7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по линейной алгебре, математическому анализу и обыкновенным дифференциальным уравнениям, соответствующим основным образовательным программам бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика» или 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Процесс обучения состоит из обсуждения теории, разбора типовых задач и письменных контрольных работ. В конце семестра проводится письменный экзамен, в котором предлагаются задачи по пройденным темам.

9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе систематизируются сведения по ОДУ, вариационному исчислению и теории оптимального управления. В ОДУ рассматриваются основные свойства решения задачи Коши (непрерывная и дифференцируемая зависимость от начальных условий и параметров) и обсуждаются их приложения (оценки решения, метод малого параметра и др.). Рассматриваются общие свойства линейных систем ОДУ (с постоянной и периодической матрицей) и обсуждаются их приложения к исследованию устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости решений нелинейных систем ОДУ. Рассматриваются основы теории бифуркаций и свойства гамильтоновых систем. В

классическом вариационном исчислении рассматриваются уравнение Эйлера и уравнение Гамильтона-Якоби. В теории оптимального управления обсуждаются принцип максимума Понтрягина, уравнение Беллмана и достаточные условия оптимальности.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы					Самостоятельная работа обучающегося, часы			
		из них					из них			
Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, практические контрольные занятия и др)*	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	Всего		
Тема 1. Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Условие Липшица, теорема существования и единственности решения, метод последовательных приближений. Теорема существования для системы с непрерывной правой частью, метод ломаных Эйлера.	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6

<p>Тема 2. Непрерывная и дифференцируемая зависимость решения от начальных условий и параметров (на конечном отрезке).</p> <p>Продолжение решений системы ОДУ. Лемма об оценке решения. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных и правой части. Дифференцируемость решения по параметру и начальным данным, уравнения в вариациях. Метод малого параметра.</p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6
<p>Тема 3. Общая теория линейных уравнений и систем ОДУ.</p> <p>Фундаментальная матрица системы ОДУ, теорема Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Линейные системы с периодическими коэффициентами: теорема Флоке-Ляпунова, матрица монодромии и мультипликаторы.</p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6
<p>Тема 4. Устойчивость.</p> <p>Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Устойчивость по первому приближению. Функции Ляпунова, теорема Барбашина-Красовского. Автономные</p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6

системы, предельные множества. Изменение фазового объема автономной системы ОДУ. Гамильтоновы системы. Устойчивость линейных систем и линейных гамильтоновых систем.										
Тема 5. Периодические решения. Существование периодических решений. Асимптотические разложения и теория возмущений. Устойчивость периодических решений. Предельные циклы. Отображение последования Пуанкаре. Бифуркация Андронова-Хопфа.	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6
Тема 6. Вариационное исчисление и теория оптимального управления Уравнение Эйлера, условия трансверсальности, уравнение Гамильтона-Якоби. Задача оптимального управления с фиксированными концами. Принцип максимума Понтрягина: общая схема доказательства, конус игольчатых и концевых вариаций, сопряженная система. Функция цены и уравнение Беллмана. Достаточные условия оптимальности Мангасаряна и Эрроу.	14	4	-	2	-	2	6	6	-	6
6. Промежуточная аттестация –	34	2					32			

письменный экзамен			
Итого	108	40	68

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом.

- Тема 1. «Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений» [5-7].
Тема 2. «Непрерывная и дифференцируемая зависимость решения от начальных условий и параметров» [5-7].
Тема 3. «Общая теория линейных уравнений и систем ОДУ» [2, 5-7].
Тема 4. «Устойчивость» [2,4-7,9].
Тема 5. «Периодические решения» [5-9].
Тема 6. «Вариационное исчисление и оптимальное управление» [1,3,10,11].

11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная литература

1. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. 2-е изд. М.: УРСС, Москва, 2004.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3-е изд. М.: Наука, 1970 (и другие издания).
3. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Фонд математического образования и просвещения. 1998.
4. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2-е изд. М.: Наука, 1985.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. 2-е изд., М.: КомКнига, 2007.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Интеграл-Пресс, 1998 (или более позднее издание).
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
8. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.

9. Jordan D.W., Smith P. Non-Linear Ordinary Differential Equations, 4th ed. NY, Oxford Univ. Press, 2007.
10. Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Princeton, Princeton Univ. Press, 2012.
11. Sierstad A., Sydsaeter K. Optimal control theory with economic applications, Amsterdam, Elsevier, 1987.

Дополнительная литература

1. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Ижевск, РХД, 2000.
2. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. 2-е изд. М.: Наука. 1967.
3. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1963 г. (и другие издания).
6. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

Информационные технологии, используемые в процессе обучения

1. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader.
2. Издательская система LaTeX.

Материально-техническая база

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный маркерной или меловой доской.

12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛИ

доцент, д.ф.-м.н. Мельников Николай Борисович

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Обыкновенные дифференциальные уравнения и оптимальное управление»**

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю) <i>(критерии и показатели берутся из соответствующих карт компетенций, при этом пользуются либо традиционной системой оценивания, либо БРС)</i>					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	Неудовлетворительно	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично	
ЗНАТЬ: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения З1 (ПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные систематические знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Устный экзамен
УМЕТЬ:	Отсутствие умений	Фрагментарные	В целом	Успешное, но	Сформированное	Устный экзамен

<p>применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1)</p>		<p>умения применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>успешное, но не систематическое умение применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>содержащее отдельные пробелы умение применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>умение применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	
<p>ВЛАДЕТЬ: навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Отсутствие навыков</p>	<p>Фрагментарное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>В целом успешное, но не полное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных</p>	<p>Успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также</p>	<p>Сформированное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Устный экзамен</p>

В1 (ПК-1)			методов разработки и реализации алгоритмов их решения	современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения		
УМЕТЬ критически анализировать и оценивать современные научные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях У1(УК-1)	Отсутствие умений	Фрагментарные умения критически анализировать и оценивать современные научные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	В целом успешное, но не систематическое умение критически анализировать и оценивать современные научные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение критически анализировать и оценивать современные научные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	Сформированное умение критически анализировать и оценивать современные научные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	Реферат
ВЛАДЕТЬ: навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях Код В1 (УК-1)	Отсутствие навыков	Фрагментарное применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	В целом успешное, но не систематическое применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	Успешное и систематическое применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	доклад на научном семинаре
УМЕТЬ: самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую	Отсутствие умений	Частично освоенное умение самостоятельно осуществлять научно-	В целом успешное, но не систематическое умение самостоятельно	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение	Успешное и систематическое умение самостоятельно осуществлять	реферат

деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий У1 (ОПК-1)		исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	
ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области З1(ОПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные систематические знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	реферат
ЗНАТЬ: современные математические модели в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных математических моделях в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой	В целом сформированные, но неполные знания о современных математических моделях в области экономики,	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных математических моделях в области экономики,	Сформированные систематические знания о современных математических моделях в области экономики, социологии, задач	устный экзамен

математики и методы их анализа 31 (ПК-5)		и актуарной математики и методах их анализа	социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики и методах их анализа	социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики и методах их анализа	бизнеса, финансовой математики и методах их анализа	
УМЕТЬ: применять современные методы построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики У1 (ПК-5)	Отсутствие умений	Фрагментарные умения применять современные методы построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики	В целом успешное, но не систематическое умение применять современные методы построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики	Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение применять современные методы построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики	Сформированное умение применять современные методы построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики	устный экзамен
ВЛАДЕТЬ: навыками оптимального выбора и создания новых современных методов построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение навыками оптимального выбора и создания новых современных методов построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной	В целом успешное, но не полное владение навыками оптимального выбора и создания новых современных методов построения и анализа математических моделей в области	Успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками оптимального выбора и создания новых современных методов построения и анализа математических	Сформированное владение навыками оптимального выбора и создания новых современных методов построения и анализа математических моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной	устный экзамен

математики В1 (ПК-5)		математики	экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики	моделей в области экономики, социологии, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики	математики	
-------------------------	--	------------	--	---	------------	--

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Вариант задач контрольной работы.

1. Исследовать устойчивость предельных циклов системы

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r)(\mu - 2r), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

при различных значениях параметра $\mu \in \mathbb{R}$.

2. Доказать, что в системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y. \end{cases}$$

происходит бифуркация Хопфа при $\mu = 0$. Описать поведение траекторий вблизи нуля при $\mu = 0$ и $\mu > 0$.

Материалы для мероприятий текущего контроля.

Мероприятия текущего контроля реализуются в виде контрольных работ (30-40 мин.) на каждом занятии в течение семестра. Задачи, предлагаемые в контрольных работах, соответствуют задачам письменного экзамена.