А.Г. Перевозчиков, В.Ю. Решетов, И.Е. Яночкин

ДИСКРЕТНАЯ МНОГОУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ «НАПАДЕНИЕ-ОБОРОНА» С НЕОДНОРОДНЫМИ РЕСУРСАМИ СТОРОН

Введение

Работа основана на результатах из [10] и является дальнейшим развитием построений в [11,12]. Классическая модель «нападение-оборона» Ю.Б.Гермейера была определена и изученная в работе [2]. Она является модификацией модели О.Гросса [1]. В работе [20] исследована игровая модель, обобщающая модели Гросса и Гермейера. В работе [3] изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах [4,5] – гарантированный результат обороны с произвольными выпуклыми аддитивными функциями выигрыша в условиях целочисленности переменных, в работах [6,7] – динамические расширения модели. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине. Однако реально имеет место также пространственное распределение ресурсов обороны по глубине, характеризующейся количеством уровней обороны на данном направлении.

В работе [10] изучалась простейшая модель многоуровневой системы обороны на заданном направлении. Эта модель представляет собой частный случай задачи дискретного оптимального управления (ОПУ) терминального типа и может быть решена методом градиентного спуска. Главной проблемой является недифференцируемость функций в правых частях уравнения движения по совокупности переменных, что делает некорректным использование классических результатов о дифференцируемости терминального критерия и построения его градиента на основе сопряженной системы.

Для решения этой проблемы было предложено использовать процедуру осреднения функций в правых частях уравнения движения по схеме [9] с рандомизацией, основанной на дифференциальных свойствах функции связанного максимума [8]. По сложности программной реализации одного шага полученный метод стохастического градиентного спуска будет эквивалентен методу градиентного спуска, но в отличие от него корректен.

В работе [11] дополнительно учитываются вероятности воздействия на каждом уровне обороны, определяемые формулой Эрланга, которая может быть аппроксимирована отношением двух нормальных функции распределения. В результате критерий становится дифференцируемой функцией, что позволяет вернуться к общей минимаксиминной задаче распределения ресурсов защиты по направлениям и уровням защиты. В работе [12] эти результаты получают дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств обороны нападением. В работе [22] изучаются более сложные фазовые ограничения по сравнению с базовой моделью [10].

Дальнейшее обобщение модели «нападение-оборона» может состоять в учете неоднородности средств сторон через соответствующее изменение вероятности воздействия на каждом уровне обороны, которое в свою очередь есть результат решения соответствующей задачи целераспределения. Это приводит, в общем случае, к задачам на минимакс со связанными ограничениями для определения гарантированного результата обороны, пример которого дает многоуровневая модель «нападение-оборона» с целочисленными и неоднородными ресурсами сторон, основанная на целераспределении при помощи решения классической транспортной задачи на каждом уровне, поставленная и изученная в настоящей работе.

1. Одноуровневая двусторонне неоднородная игра «нападение-оборона» на основе классической транспортной задачи

1.1. Целераспределение на основе классической транспортной задачи.

Предположим, что $j=1,2,...,l$ – означает тип средств нападения на одном направлении, а $X_j>0$ – их количество. Пусть V_k – количество средств обороны по типам $k=1,2,...,m$. Тогда математическое ожидание числа прорвавшихся средств нападения на данном направлении можно найти по формуле

$$C=C(Y,V)=\min(\sum_{j=1}^{l}X_j-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}r_{kj}x_{kj})=$$
$$=\sum_{j=1}^{l}X_j-\max\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}r_{kj}x_{kj}=\sum_{j=1}^{l}X_j-\bar{C}(Y,V); \tag{1.1}$$
$$\sum_{j=1}^{l}x_{kj}\le V_k;\sum_{k=1}^{m}x_{kj}=X_j;x_{kj}\ge 0;\quad k=1,2,...,m;\quad j=1,2,...,l,$$

где Y – l-мерный вектор-столбец с координатами X_j, $j=1,...,l$, V – m-мерный вектор-столбец с координатами V_k, $k=1,...,m$, r_{kj} – вероятность поражения одного средства нападения $j-$го типа одним средством обороны $k-$го типа, $k=1,...,m$; $j=1,...,l$.

Для непустоты множества допустимых решений задачи (1.1) должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{l} X_j \le \sum_{k=1}^{m} V_k . \quad (1.2)$$

Пусть $Z_j > 0$ – общее количество средств нападения j-го типа, $j = 1,2,...,l$., а S – l-мерный вектор-столбец с координатами Z_j. Обозначим $|S| = \sum_{j=1}^{l} Z_j$. Если условие (1.2) не выполняется, то искусственно вводим 0-й тип средства обороны с

$$V_0 = |S|,\ r_{0j} = 0,\ j = 1,2,...,l . \quad (1.3)$$

Определенная таким образом функция $C(Y,V)$ сохраняет смысл математического ожидания числа прорвавшихся средств нападения и будет выпуклой по совокупности переменных (Y,V) по лемме 1.8 в [16].

1.2. Модель «нападения-оборона» с неоднородными ресурсами сторон.

Обозначим через V^i $m-$мерный вектор-столбец ресурсов обороны выделенных на направление $i = 1,...,n$, а через Y_i – соответствующий l-мерный вектор-столбец ресурсов нападения. Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$F(Y,V) = \sum_{i=1}^{n} C_i(Y_i, V^i) . \quad (1.4)$$

Здесь функции $C_i(Y,V)$ определяются по формулам (1.1), (1.3).

Пусть W - $m-$мерный вектор-столбец ресурсов обороны. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$V = (V^1,...,V^n) \in \mathrm{B}(W) = \left\{ V \middle| \sum_{i=1}^{n} V^i = W,\ V^i \ge 0,\ i = 1,...,n \right\} .$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$Y = (Y_1,...,Y_n) \in \mathrm{A}(S) = \left\{ Y \middle| \sum_{i=1}^{n} Y_i = S,\ Y_i \ge 0,\ i = 1,...,n \right\}.$$

Здесь S – l-мерный вектор-столбец с координатами Z_j. Напомним, что $Z_j > 0$ – общее количество средств нападения j-го типа, $j = 1,2,...,l$, а $|S| = \sum_{j=1}^{l} Z_j$. С учетом представления (1.1) имеем

$$F(Y,V) = |S| - \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i(Y_i, V^i)$$

и критерий (1.4) эквивалентен критерию

$$\overline{F}(Y,V)=-\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i(Y_i,V^i)$$

1.3. Минимаксная стратегия обороны.

В силу выпуклости функции $\overline{F}(Y,V)$ по Y,V, эта модель также допускает исследование полученной игры в чистых и смешанных стратегиях, по схеме [15]. Гарантированный результат обороны с точностью до константы $|S|$ равен:

$$\overline{v}=\min_{V\in \mathrm{B}(W)}\max_{Y\in \mathrm{A}(S)}\overline{F}(Y,V)=\min_{V\in \mathrm{B}(W)}\max_{i=1,\dots,n}\overline{F}\left(S^{(i)},V\right). \quad (1.5)$$

Здесь $S^{(i)}=(\overline{0},\dots,S,\dots\overline{0})$, где вектор S стоит на i-м месте, а остальные координаты равны нулевым векторам $\overline{0}$ размерности l. Второе равенство в (1.5) верно по крайней мере для одинаковых матриц $c^i=-r^i\equiv -r$ в эквивалентном критерии. Это следует из свойства субмодулярности функции $\overline{C}=\overline{C}(\omega,V)$ по ω, установленного в работе [19], и определенной аналогично (1.4) для любого подмножества $\omega\subseteq J$ множества потенциальных типов средств нападения $J=\{1,2,\dots,l\}$:

$$\overline{C}=\overline{C}(\omega,V)=\max\sum_{k=1}^{m}\sum_{j\in\omega}r_{kj}x_{ij};$$

$$\sum_{j\in\omega}x_{kj}\le V_k;\quad \sum_{k=1}^{m}x_{kj}=X_j;\quad x_{kj}\ge 0;\quad k=1,2,\dots,m;\quad j\in\omega.$$

Аналогом условия (1.2) непустоты множества допустимых решений задачи будет условие

$$\sum_{j\in\omega}X_j\le\sum_{k=1}^{m}V_k\,.$$

Для того чтобы формально это условие выполнялось аналогично (1.3) искусственно вводим 0-й тип средства обороны с $V_0=|S|=\sum_{j=1}^{l}Z_j\ge\sum_{j\in\omega}X_j$ и $r_{0j}=0$.Если $\omega=\Theta$ – пустое множество, то положим $\overline{C}=\overline{C}(\omega)=0$.

Напомним, что функция $\overline{C}=\overline{C}(\omega,V)$, определенная на 2^J называется субмодулярной по ω, если для любых $\delta,\nu\in 2^J$ выполняется неравенство $\overline{C}(\delta,V)+\overline{C}(\gamma,V)\ge\overline{C}(\delta\cup\gamma,V)+\overline{C}(\delta\cap\gamma,V)$.

Лемма 1. Предположим, что $c^i\equiv c=-r$ и $V^i\equiv V=W/n$. Тогда справедливо равенство внутренних максимумов в (1.5).

Доказательство. Все угловые точки множества $\mathrm{A}(S)$ описываются как множество точек вида $S^{(i(.))}$, где $i=i(j)-$ произвольная функция $i: L=\{1,...,l\} \to I=\{1,...,n\}$, а

$$S_j^{(i(.))} = \begin{cases} S_j, \ i=i_j \\ 0, \ \ i \neq i_j \end{cases}; \quad j=1,...,l.$$

Введем множества $\omega_i = \left\{ j \in L \middle| i_j = i \right\}$. Тогда очевидно, что $\omega_i \cap \omega_{i'} = \Theta, i' \neq i$ и из супермодулярности функции $\overline{C} = \overline{C}(\omega, V)$ по ω, следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{C}(\omega_i, V) \geq \overline{C}(\bigcup_{i=1}^{n} \omega_i, V),$$

откуда и вытекает равенство (1.5). Лемма доказана.

Замечание 1. В частности, когда $i(j) \equiv i$ имеем $S^{(i(.))} = S^{(i)}$.

Замечание 2. Для неравных матриц $c^i = -r^i$ и векторов $V^i \neq W/n$, удовлетворяющих условиям $\left|V^i - W/n\right| \leq \varepsilon,\ \left|c_{kl}^i - c_{kl}\right| \leq \varepsilon$, второе равенство в (1.5) будет выполняться с точностью $O(\varepsilon)$ и любая минимаксная стратегия обороны $V \in Arg \min\limits_{V \in \mathrm{B}(W)} \max\limits_{i=1,...,n} \overline{F}\left(S^{(i)}, V\right)$ будет $O(\varepsilon)-$оптимальной.

Замечание 3. В общем случае в (1.5) следует заменить $S^{(i)}$ на $S^{(i(.))}$ и брать внутренний максимум по всем функциям $i=i(j)$, в которых имеется n^l, что увеличивает размерность задачи. Поэтому, дальше для простоты предполагается, что верно представление (1.5), хотя все выкладки остаются справедливыми и для общего случая.

2. Многоуровневая двусторонне неоднородная игра «нападение-оборона» на основе классической транспортной задачи.

2.1. Моделирование преодоления многоуровневой обороны нападением на одном направлении.

Предположим, что на данном направлении имеется T уровней защиты с номерами $t=0,1,...,T-1$. Пусть Y и V - векторы, координаты которых означают общее количество средств нападения и обороны по типам. Стратегия обороны состоит в распределении вектора своих средств по уровням защиты в соответствии с вектором:

$$u=(u_0,...,u_{T-1}) \in D(V) = \left\{ u \middle| \sum_{t=0}^{T-1} u_t \leq V,\ u_t \geq 0,\ t=1,...,T-1 \right\} \qquad (2.1)$$

Пусть Y^t- вектор количества средств нападения противника, прорвавшихся к $t-$му уровню защиты на заданном направлении, $t=0,1,...,T-1$. Динамика системы описывается уравнением:

$$Y^{t+1} = F_t(Y^t, u_t),\ t=0,1,...,T-1, \qquad (2.2)$$

с начальным условием:

$$Y^0 = Y. \tag{2.3}$$

Функции $F_t(.,.)$ в (2.2) и вектор Y в (2.3) считаются известными обороне на данном направлении. Например, в случае, однородных средств сторон, рассмотренном в [10], функции $F_t(.,.)$ имели вид:

$$F_t(Y^t, u_t) = \max\left\{q_t Y^t, x_t - p_t u_t\right\}, \quad t = 0,1,...,T-1. \tag{2.4}$$

Здесь $p_t -$ вероятность поражения средства нападения противника одним воздействием на $t-$м рубеже, $q_t = 1 - p_t -$соответствующая вероятность непоражения.

Критерий обороны в [10] определялся, как количество x_T средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I(u) = \Phi(x_T) \equiv x_T. \tag{2.5}$$

Требуется так распределить средства защиты по уровням, чтобы минимизировать количество x_T средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I^* = \min_{u \in W} I(u). \tag{2.6}$$

Задача (2.1)-(2.6) является задачей оптимального дискретного управления (ОПУ) с общими ограничениями на управляющие воздействия u_t, $t = 0,1,...,T-1$.

2.2. Задача управления на одном направлении в общем случае.

В общем случае неоднородных средств сторон предположим, как и ранее, что $j = 1,2,...,l$ – означает тип средств нападения на одном направлении, а $X_j^t > 0$ – их количество на входе t-го уровня обороны. Пусть u_t^k – количество средств обороны по типам $k = 1,2,...,m$ на t-м уровне обороны. Ведем веса G_j, $j = 1,2,...,l$, характеризующие степень важности типов средств нападения. Тогда математическое ожидание веса прорвавшихся средств нападения на данном рубеже можно найти в результате решения задачи целераспределения аналогичной (1.1)

$$C^t = C^t(Y^t, u_t) = \min\left(\sum_{j=1}^{l} G_j X_j^t - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} G_j r_{kj}^t x_{kj}^t\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} G_j X_j - \max\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} G_j r_{kj}^t x_{kj}^t = \sum_{j=1}^{l} X_j - \bar{C}^t(Y^t, u_t); \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{l} x_{ij}^t \le u_t^k; \quad \sum_{k=1}^{m} x_{kj}^t = X_j^t; \quad x_{kj}^t \ge 0; \quad k = 1,2,...,m; \quad j = 1,2,...,l,$$

где r_{kj}^t – вероятность поражения одного средства нападения j – го типа одним средством обороны k – го типа на t -м уровне обороны.

Для непустоты множества допустимых решений задачи (2.7) должно выполняться условие аналогичное (1.2)

$$\sum_{j=1}^{l} X_j^t \le \sum_{k=1}^{m} u_t^k . \qquad (2.8)$$

Пусть как и прежде $Z_j > 0$ – общее количество средств нападения j - го типа, $j = 1, 2, ..., l$, а S – l-мерный вектор-столбец с координатами Z_j. Обозначим $|S| = \sum_{j=1}^{l} Z_j$. Если условие (2.8) не выполняется, то искусственно вводим 0 -й тип средства обороны с

$$u_t^0 = |S|,\ r_{0j}^t = 0,\ j = 1, 2, ..., l . \qquad (2.9)$$

Пусть $G_j = G_j(\lambda) \to \infty,\ \ \lambda \to \infty,\ \ j = 1, 2, ..., l$, причем выполняются условия

$$G_j(\lambda) / G_{j-1}(\lambda) \to 0,\ \lambda \to \infty,\ j = 2, ..., l . \qquad (2.10)$$

Тогда согласно результатам [16] существует такое $\lambda_0 > 0$, что для любого $\lambda > \lambda_0$ решение задачи (2.7) дает решение лексикографической задачи минимизации критериев

$$C_j^t = C_j^t(Y^t, u_t) = G_j X_j^t - \sum_{k=1}^{m} G_j r_{kj}^t x_{ij}^t, \qquad j = 1, 2, ..., l . \qquad (2.11)$$

Предположим, что веса выбраны так, что это верно для всех уровней, тогда в качестве функции $F_t(.,.)$ в (2.2) можно взять вектор-функцию с компонентами

$$F_j^t = F_j^t(Y^t, u_t) = X_j^t - \sum_{k=1}^{m} r_{kj}^t x_{ij}^t, \qquad j = 1, 2, ..., l , \qquad (2.12)$$

которые определяются однозначно в силу эквивалентности задачи (2.7) задаче лексикографической минимизации критериев (2.11).

В общем случае неоднородных средств сторон критерий обороны на данном направлении определяется, как вес средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I(u) = \Phi(Y^T) \equiv \sum_{j=1}^{l} G_j X_j^T . \qquad (2.13)$$

2.3. Решение задачи управления на одном направлении методом динамического программирования.

Введем фазовую переменную $\tilde{Y}^t \in E_k$ с уравнением движения

$$\tilde{Y}^{t+1} = \tilde{Y}^t - u_t, t = 0, ..., T-1, \tilde{Y}^0 = V .$$

Тогда для оптимального значения критерия в соответствующей усеченной задаче справедливо уравнение Беллмана

$$B_t(Y^t, \tilde{Y}^t) = \min_{0 \le u_t \le \tilde{Y}^t} B_{t+1}(F_t(Y^t, u_t), \tilde{Y}^t - u_t), t = T-1, ..., 0, 0 \le Y^t \le X, 0 \le \tilde{Y}^t \le V,$$
$$B_T(Y^T, \tilde{Y}^T) = \Phi(Y^T). \qquad (2.14)$$

В таком виде это уравнение представляет собой уравнение динамического программирования в пространстве управлений (схема Р. Беллмана).

При этом нужно запоминать функцию $u_t = u_t(Y^T, \tilde{Y}^T)$, реализующую соответствующий минимум для восстановления в конце соответствующего оптимального управления.

При численной реализации на параллелепипеде $\Pi: 0 \le Y^T \le Y, 0 \le \tilde{Y}^T \le V$, при заданной точности $\varepsilon > 0$ приходится вводить сетку $(\varepsilon\vec{k}, \varepsilon\vec{n})$, $\vec{k} = (k_1, ..., k_l)$, $\vec{n} = (n_1, ..., n_m)$, где $k_j = 1, ..., \left[X_j / \varepsilon\right]$, $j = 1, ..., l$, $m_k = 1, ..., \left[V_k / \varepsilon\right]$, $k = 1, ..., m$. Тогда соответствующее уравнение Беллмана будет иметь вид

$$b_t(\vec{k}, \vec{n}) = \min_{0 \le u_t \le \vec{n},\ u_t \in \mathrm{Z}^m} b_{t+1}([F_t^h(\varepsilon\vec{k}, \varepsilon u_t) / \varepsilon], \vec{n} - u_t),\ t = T-1, ..., 1,$$
$$b_T(\vec{k}, \vec{n}) = \varepsilon \sum_{j=1}^{l} G_j k_j. \qquad (2.15)$$

Здесь Z - множество целых чисел, $\mathrm{Z}^m = \otimes_{k=1}^m \mathrm{Z}$, $[.]$ - целая часть числа.

В таком виде это уравнение представляет собой уравнение динамического программирования в пространстве состояний (схема Н.Н. Моисеева), точность решения будет иметь порядок $O(\varepsilon)$.

Теперь в критерии антагонистической игры (1.4) можно положить

$$C_i(Y_i, V^i) = B_0^i(\left[Y_i / \varepsilon\right], \left[V^i / \varepsilon\right]). \qquad (2.16)$$

Замечание 3. В частности при $\varepsilon = 1$ получим полностью целочисленную задачу. При этом предполагается, что исходные данные о численностях сторон также целочисленные. В этих условиях решения вспомогательных задач (2.7) также имеют целочисленные решения, которые могут быть найдены классическим методом решения транспортных задач, как показано в [21].

2.4. Минимаксная стратегия многоуровневой обороны.

Гарантированный результат обороны с точностью до константы равен:

$$\overline{v} = \min_{V \in \mathrm{B}(W)} \max_{Y \in \mathrm{A}(S)} F(Y, V) = \min_{V \in \mathrm{B}(W)} \max_{i=1,...,n} F\left(S^{(i)}, V\right). \qquad (2.17)$$

Напомним, что здесь $S^{(i)} = (\overline{0}, ..., S, ...\overline{0})$, где вектор S стоит на i-м месте, а остальные координаты равны нулевым векторам $\overline{0}$ размерности l. В п. 1.3

было показано, что второе равенство в (2.17) верно по крайней мере в одноуровневом случае для одинаковых матриц $c^i = -r^i \equiv -r$ в эквивалентном критерии. В общем случае постулируется, что представление (2.17) верно в силу дополнительных условий информированности сторон, согласно которым нападение будет действовать всеми силами с одного направления.

Мы будем изучать полностью целочисленную задачу (2.17) в условиях замечания 3, когда $V_k^i \in Z^m, k = 1,...,m$ и все данные по исходным численностям сторон целочисленные.

Обозначим

$$f_i(V^i) = F\left(S^{(i)}, V\right) = C_i(W, V^i). \tag{2.18}$$

Тогда функции $f_i(V^i)$ невозрастают по каждой координате $V_k^i, k = 1,...,m$. Мы собираемся воспользоваться условиями оптимальности в скалярной задаче

$$\min_{V_k \in B_k(W_k)} \max_{i=1,...,n} f_i(V^i), \tag{2.19}$$

где

$$B_k(W_k) = \left\{V_k = (V_k^1,...,V_k^n) \middle| \sum_{i=1}^n V_k^i = W_k,\ V_k^i \ge 0,\ V_k^i \in Z,\ i = 1,...,n\right\}. \tag{2.20}$$

Предположим, что функции $f_i(V^i)$ убывают покоординатно. Положим $I = \{1,...,n\}$ и для $V_k \in B_k(W_k)$ определим множество

$$I_k(V_k) = Arg \max_{i=1,...,n} f_i(V^i).$$

Обозначим через $|I_k(V_k)|$ число элементов множества $I_k(V_k)$.

Теорема 1 ([13]). Пусть $V_k \in B_k(W_k)$ такое решение задачи (2.18), при котором величина $|I_k(V_k)|$ минимальна. Тогда необходимым является условие

$$V_k^j > 0 \Rightarrow \max_{i=1,...,n} f_i(V_k^i) \le f_j(V_k^j - 1). \tag{2.21}$$

Кроме того, (2.20) является достаточным условием оптимальности.

Это дискретный аналог принципа уравнивания Ю.Б. Гермейера. Очевидно условие (2.21) при $k = 1,...,m$ является необходимым условием оптимальности в задаче (2.17). Если функции $f_i(V^i)$ не убывают строго покоординатно, то можно заменить приближенно их суммой $f_i'(V^i) = f_i(V^i) + \delta\varphi(V^i)$, где $\varphi(V^i)$ убывают строго покоординатно, а $\delta > 0$ – малый параметр. Значение минимакса (2.19) для регуляризированной таким образом задачи будет отличаться от исходного на величину порядка $O(\delta)$. Чтобы не менять обозначений предположим опять, что исходные функции $f_i(V^i)$ убывают покоординатно.

Следуя [13], рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения в k-й задаче (2.19), (2.20). Пусть $V_k(1)$ – произвольное распределение ресурса по k-й координате. Допустим, что алгоритм проработал до s - го шага и получено распределение $V_k(s)$. Если для $V_k(s)$ выполнено условие (2.21), то по теореме 1 оно будет оптимальным. Допустим, что условие (2.21) не выполнено. Тогда найдется такой номер j, что $V_k^j(s) > 0$ и

$$f_l(V_k^l(s)) = \max_{i=1,\dots,n} f_i(V_k^i(s)) > f_j(V_k^j(s)-1).$$

Определим новое распределение $V_k(s+1)$:

$$V_k^i(s+1) = \begin{cases} V_k^j(s)-1, i=j; \\ V_k^l(s)-1, i=l; \\ V_k^i(s)-1, i \neq j,l. \end{cases}$$

В [13, с.316] было показано, что на каждом шаге алгоритма либо уменьшается значение функции максимума, либо сокращается множество $I_k(V_k(s))$. Отсюда следует, что за конечное число шагов алгоритм построит решение удовлетворяющее условию (2.21). Повторяя циклически эту процедуру по каждой координате, приходим к алгоритму покоординатного спуска для решения дискретной задачи (2.17) в целочисленной постановке. Относительно условий сходимости метода покоординатного спуска см.[17]. Вопросы проверки этих условий выходят за рамки настоящей работы и здесь не рассматриваются. В качестве исходного приближения можно взять распределение по возможности близкое к равномерному с учетом целочисленности. Заметим, что в любом случае метод покоординатного спуска дает монотонно невозрастающую последовательность значений функции максимума и значит может рассматриваться как метод последовательного уменьшения значений функции максимума.

3. Многоуровневая двусторонне неоднородная игра «нападение-оборона» на основе обобщенного принципа уравнивания

Предположим, как и раньше, что $j=1,2,\dots,l$ – означает тип средств нападения на одном уровне данного направления, а $X_j > 0$ – их количество. Обозначим через R_j m-мерный вектор-столбец с координатами $r_{kj}, k=1,\dots,m$. Пусть V_k – количество средств обороны по типам $k=1,2,\dots,m$. Обозначим через V m-мерный вектор-столбец с координатами V_k, $k=1,\dots,m$. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по типам средств нападения в соответствии с вектором

$$U=(U_1,...,U_l)\in B(V)=\left\{U\Big|\sum_{i=1}^{n}U_j=V,\,U_i\geq 0,\ j=1,...,l\right\}.$$

Тогда вероятность поражения средств нападения на данном направлении можно аппроксимировать по формуле $P_0=\min(1,\bar{\lambda})$, где

$$\bar{\lambda}=\bar{\lambda}(V)=\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,...,l}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/X_j. \qquad (3.1)$$

Замечание 4. Согласно обобщенному принципу уравнивания Гермейера (см. [14], стр. 356) существуют такие $U\in\tilde{B}(V)=Arg\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,...,l}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/X_j$, что верно равенство: $\left\langle R_j,U_j\right\rangle/X_j=\lambda=const$. Если же $r_{kj}>0$, то любые $U\in\tilde{B}(V)$ удовлетворяют этому условию.

Предположим, что оборона выбирает целераспределение, удовлетворяющее обобщенному принципу уравнивания:

$$\left\langle R_j,U_j\right\rangle/X_j=\bar{\lambda}(V)=const, \qquad (3.2)$$

которое означает, что вероятности поражения не зависят от типа цели. В этом случае количество целей j-го типа, не пораженных на данном уровне обороны данного направления, можно определить по формуле:

$$X'_j=X_j(1-P_0)=X_j\max(0,1-\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,..,n}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/X_j). \qquad (3.3)$$

Тогда в качестве функции $F_t(.,.)$ в (2.2) можно взять вектор-функцию с компонентами

$$F_j^t=F_j^t(Y^t,u_t)=Y_j^t(1-\max_{U\in B(u_t)}\min_{j=1,2,..,n}\left\langle R_j^t,U_j\right\rangle/Y_j^t),\,j=1,2,...,l, \qquad (3.4)$$

которые определяются однозначно по построению в силу принятого целераспределения на основе принципа уравнивания.

В общем случае неоднородных средств сторон критерий обороны на данном направлении определяется, как количество средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I(u)=\Phi(Y^T)\equiv\sum_{j=1}^{l}X_j^T. \qquad (3.5)$$

Дальнейшие построения ничем не отличаются от конструкций, предложенных в п.3 и здесь опускаются. Таким образом, возможность построения предложенных конструкций основана на однозначности решения задачи целераспределения на каждом уровне каждого направления в части количества непораженных целей по типам. И для этого может быть использована как классическая транспортная задача, так и целераспределение на основе обобщенного принципа уравнивания предложенного П.С. Краснощековым в [14] в интересах построения пространственно-распределенной модели Осипова-Ланчестера. В общем случае постулируется, что представление (2.17) для наилучшего гарантированного результата обороны верно в силу дополнительных условий информированности сторон, согласно которым нападение будет действовать всеми силами с одного направления.

Список литературы

1. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
3. *Молодцов Д.А.* Модель Гросса в случае непротивоположных интересов// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1972. Т. 12, № 2, С.309-320.
4. *Берзин Е.А.* Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Под ред. Е.В.Золотова. – М.: Радио и связь, 1974.
5. *Берзин Е.А.* Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / Под ред. Е.В.Золотова. – М.: Радио и связь, 1983.
6. *Данильченко Т.Н., Масевич К.К.* Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974. Т. 19. № 5. С.1323-1327.
7. *Крутов Б.П.* Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структурой. М.: ВЦ РАН, 1986.
8. *Минченко Л.И.* Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984. Т. 24. № 2. С.210-217.
9. *Завриев С.К., Перевозчиков А.Г.* Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1991. Т. 30. № 4. С.629-633.
10. *Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.* Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. № 41. 2013, с.83-95.
11. *Перевозчиков А.Г., Лесик И.А., Яночкин И.Е.* Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2015, № 4. С.65-84.
12. *Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением// Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.И.Ломоносова / Под ред. В.И.Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2015. № 49. С.80-96.

13. *Васин А.А. Краснощеков П.С., Морозов В.В.* Исследование операций. М.: Академия. 2008.

14. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принцип построения моделей. М.: Фазис. 2000.

15. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

16. *Федоров В.В*. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

17. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М: Наука, 1986.

18. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

19. *Монтлевич В.М.* О субмодулярности функции прибыли в одной из задач планирования перевозок // Вестник СамГУ. № 10(121). 2014, с.48-54.

20. *Огарышев В.Ф.* Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1973. Т. 13. № 1. С.59-70.

21. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

22. *Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением с несколькими фазовыми ограничениями. Вестник МГУ. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, № 1, 2017, с. 26-32.