Поспелова И.И.

Векторный минимакс с позиций разных сторон[1].

Задачи принятия решений в сложных системах, как правило, являются многокритериальными [1 – 3]. Согласно общей методологии исследования операций под решением таких задач понимают множество неулучшаемых значений, из которого в дальнейшем осуществляется внемодельный выбор лицом, принимающим решение, иначе, ЛПР. Формализм многокритериальной (векторной) оптимизации достаточно хорошо развит [4 – 6]. Однако во многих задачах принятия решений необходимо учитывать наличие неконтролируемых факторов (или противника) [4]. Тем не менее математический аппарат для минимаксных задач с многими критериями разработан гораздо хуже, даже в постановочной части.

В отличие от однокритериального случая значение многокритериального минимакса не удается формально определить, не указав, какая переменная, максимизирующая или минимизирующая, является управлением оперирующей стороны, а какая соответствует неконтролируемым факторам. Действительно, для скалярной функции $\varphi(x, y)$ можно записать:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\varphi(x,y)=\max\{\alpha\in\mathbf{R}^1\mid\alpha\le\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\varphi(x,y)\}=$$
$$=\max\{\alpha\in\mathbf{R}^1\mid\forall\ y\in Y\quad\exists\ x\in X:\ \alpha\le\varphi(x,y)\}=$$
$$=\max\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\alpha\in\mathbf{R}^1\mid\alpha\le\varphi(x,y)\}$$

и

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\varphi(x,y)=\min\{\beta\in\mathbf{R}^1\mid\beta\ge\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\varphi(x,y)\}=$$
$$=\min\{\beta\in\mathbf{R}^1\mid\exists\ y\in Y\quad\forall\ x\in X:\ \beta\ge\varphi(x,y)\}=$$
$$=\min\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\beta\in\mathbf{R}^1\mid\beta\ge\varphi(x,y)\},$$

т.е. $\max\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\alpha\in\mathbf{R}^1\mid\alpha\le\varphi(x,y)\}=\min\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\beta\in\mathbf{R}^1\mid\beta\ge\varphi(x,y)\}$.

Таким образом, значение скалярного минимакса не зависит от того, интересы какой из сторон представляет ЛПР.

Рассмотрим задачу поиска минимакса векторного критерия $\Phi(x,y)=(\varphi_1(x,y),\dots,\varphi_Q(x,y))$, $(x,y)\in X\times Y$, где x – переменная максимизации, y – минимизации. Наилучшее гарантированное значение векторного минимакса с точки зрения ЛПР, максимизирующего Φ, согласно [7], равно

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\,\Phi(x,y)\overset{def}{=}\operatorname{Max}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\xi\in R^Q\mid\xi\le\Phi(x,y)\},\qquad(1)$$

Везде далее чертой сверху обозначается операция, соответствующая интересам ЛПР, стандартные знаки неравенств для векторов понимаются в

[1] Работа поддержана грантами по проектам №00-15-96141 и №00-15-96118 «Научные школы».

смысле соответствующих покомпонентных неравенств и, если не оговорено противное, Max и Min трактуются в смысле Слейтера [5] (как оптимумы в смысле строго отношения порядка среди векторов).

В случае минимизирующего ЛПР определение гарантированного значения векторного минимакса дано в [5, 8] и приводит к формуле

$$\overline{\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}}\,\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\,\Phi(x,y)\overset{def}{=}\mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi\in\mathbf{R}^{Q}\mid\psi\geq\Phi(x,y)\}. \qquad (2)$$

Согласно [9]

$$\mathrm{Max}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\xi\in\mathbf{R}^{Q}\mid\xi\leq\Phi(x,y)\}=\mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\xi\in\mathbf{R}^{Q}\mid\xi\nless\Phi(x,y)\},$$

где "$\nless$" означает отрицание векторного "<", т.е. существование такой компоненты вектора, для которой не выполнено "<" [10]. Таким образом, равенство аналогичное скалярному случаю, справедливо лишь при смене тип оценки с гарантированной ($\leq$) на "защищаемую" ($\nless$) [10, 5] (в скалярном случае эти понятия неразличимы). Очевидно, что

$$\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\xi\in\mathbf{R}^{Q}\mid\xi\geq\Phi(x,y)\}\subset\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\xi\in\mathbf{R}^{Q}\mid\xi\nless\Phi(x,y)\},$$

поэтому в векторном случае нельзя говорить о равенстве (1) и (2). Цель настоящей статьи состоит в выявлении соотношений между ними.

Утверждение 1. *Для любых* $\xi\in\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\,\overline{\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}}\,\Phi(x,y)$, $\psi\in\overline{\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}}\,\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\,\Phi(x,y)$ *выполнено* $\xi\leq\psi$.

Доказательство. Выберем произвольные $\xi\in\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\,\overline{\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}}\,\Phi(x,y)$, $\psi\in\overline{\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}}\,\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\,\Phi(x,y)$. Из определения (1) следует, что

$$\xi\in\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\xi\in\mathbf{R}^{Q}\mid\xi\leq\Phi(x,y)\},$$

это значит, что для любого $y\in Y$ существует $x\in X$, для которого $\xi\leq\Phi(x,y)$, а из определения (2) вытекает, что

$$\psi\in\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi\in\mathbf{R}^{Q}\mid\psi\geq\Phi(x,y)\},$$

т.е. существует $y^0\in Y$ такой, что для любого $x\in X$ выполнено $\psi\geq\Phi(x,y^0)$. Таким образом, для $y^0\in Y$ найдется $x^0\in X$ такой, что $\xi\leq\Phi(x^0,y^0)$, но для любого $x\in X$, в том числе и для x^0, $\psi\geq\Phi(x^0,y^0)$. Следовательно, $\xi\leq\psi$. Утверждение доказано.

Следствие. *Множества (1) и (2) могут пересекаться не более, чем в одной точке.*

Доказательство. Предположим обратное, т.е. пусть множества, определяемые (1) и (2), пересекаются и пусть в пересечение входят точки ψ^1 и ψ^2. Поскольку $\psi^1\in\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\,\overline{\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}}\,\Phi(x,y)$, $\psi^2\in\overline{\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}}\,\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\,\Phi(x,y)$, то согласно утверждению 1, $\psi^1 \le \psi^2$, а так как $\psi^1 \in \overline{\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}}\ \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ \Phi(x,y)$ и $\psi^2 \in \underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\ \overline{\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}}\ \Phi(x,y)$, то $\psi^1 \ge \psi^2$, т.е. $\psi^1 = \psi^2$.

Для формулировки следующего утверждения напомним, что парето-оптимальными значениями Max и Min называются максимум и минимум в смысле нестрого отношения порядка среди векторов [4, 5].

Утверждение 2. *Пересечение (1) и (2) не пусто тогда и только тогда, когда каждое из множеств парето-оптимальных значений (1) и (2) состоит из единственной точки. При этом указанные точки равны* ψ^* *с координатами* $\psi_i^* = \min\limits_{y\in Y} \max\limits_{x\in X} \varphi_i(x,y)\ \ \forall\ i=\overline{1,Q}$.

Доказательство. Обозначим для краткости

$$G_1 = \bigcap_{y\in Y} \bigcup_{x\in X} \{\xi \in R^Q \mid \xi \le \Phi(x,y)\} \text{ и } G_2 = \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{x\in X} \{\psi \in R^Q \mid \psi \ge \Phi(x,y)\}.$$

Пусть $\mathrm{Max}\, G_1 \cap \mathrm{Min}\, G_2 \ne \varnothing$, т.е. существует вектор ψ такой, что $\psi \in \mathrm{Max}\, G_1$ и $\psi \in \mathrm{Min}\, G_2$. Тот факт, что $\psi \in G_1$ и $\psi \in G_2$, означает одновременное выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \forall\ y\in Y \quad \exists\ x\in X:\ \ \psi \le \Phi(x,y), \\ \exists\ y\in Y:\ \ \forall\ x\in X \quad \psi \ge \Phi(x,y). \end{cases} \tag{3}$$

Верно и обратное – выполнение для некоторого ψ этих условий (3) означает, что $\psi \in \mathrm{Max}\, G_1 \cap \mathrm{Min}\, G_2$. Запишем условия (3) в эквивалентном виде, более удобном для последующего анализа:

$$\begin{cases} \exists\ y^0\in Y:\ \ \exists\ x^0\in X:\ \ \psi = \Phi(x^0,y^0), \\ \qquad\qquad\quad \forall\ x\in X \quad \psi \ge \Phi(x,y^0), \\ \forall\ y\in Y \quad \exists\ x\in X:\ \ \psi \le \Phi(x,y). \end{cases} \tag{4}$$

Видно, что выполнение условий (4), т.е. существование $\psi \in \mathrm{Max}\, G_1 \cap \mathrm{Min}\, G_2$ означает, существование такой точки $(x^0,y^0) \in X \times Y$, для которой выполнено следующее. Во-первых, $\psi = \Phi(x^0,y^0)$ больше (нестрого) любой из точек $\Phi(x,y^0)$, $x\in X$, и, следовательно,

$$\bigcup_{x\in X} \{\psi \mid \psi \le \Phi(x,y^0)\} = \{\psi \mid \psi \le \Phi(x^0,y^0)\},$$

$$\bigcap_{x\in X} \{\psi \mid \psi \ge \Phi(x,y^0)\} = \{\psi \mid \psi \ge \Phi(x^0,y^0)\}.$$

Во-вторых, при каждом $y\in Y$ найдется такой $x\in X$, что $\Phi(x,y) \ge \Phi(x^0,y^0)$, следовательно, для любого $y\in Y$ справедливы включения

$$\{\psi \mid \psi \le \Phi(x^0,y^0)\} \subseteq \bigcup_{x\in X} \{\psi \mid \psi \le \Phi(x,y)\},$$

$$\bigcap_{x\in X} \{\psi \mid \psi \ge \Phi(x,y)\} \subseteq \{\psi \mid \psi \ge \Phi(x^0,y^0)\},$$

которые для y^0 выполняются как равенства.

Таким образом,

$$\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi\mid\psi\le\Phi(x,y)\}=\{\psi\mid\psi\le\Phi(x^0,y^0)\}$$ и

$$\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi\mid\psi\ge\Phi(x,y)\}=\{\psi\mid\psi\ge\Phi(x^0,y^0)\}.$$

Получили, что $G_1=\{\psi\mid\psi\le\Phi(x^0,y^0)\}$, а $G_2=\{\psi\mid\psi\ge\Phi(x^0,y^0)\}$, откуда ясно, что $\operatorname{Max}G_1\bigcap\operatorname{Min}G_2=\Phi(x^0,y^0)$. Единственность и оптимальность по Парето точки $\Phi(x^0,y^0)$ очевидны.

Теперь пусть множество $\operatorname{Max}G_1$ содержит единственную парето-оптимальную точку F^1. Тогда $F^1\in G_1$. Это означает, что для любого $y\in Y$ существует $x\in X$ такой, что для любого $i=\overline{1,Q}$ $F_i^1\le\varphi_i(x,y)$, т.е. для любого $y\in Y$ и для любого $i=\overline{1,Q}$ выполнено $F_i^1\le\varphi_i(x^i,y)$, где $\varphi_i(x^i,y)\overset{def}{=}\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y)$. Отсюда следует, что $F_i^1\le\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y)$ для любого $i=\overline{1,Q}$. Предположим, что существует i, для которого $F_i^1<\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y)=\varphi_i(x^i,y^i)\le\varphi_i(x^i,y)$ для любого $y\in Y$. Рассмотрим вектор ψ такой, что $\psi_j=\min\limits_{y\in Y}\varphi_j(x^i,y)\le\varphi_j(x^i,y)$ для любого $y\in Y$. Он принадлежит G_1, поскольку для любого $y\in Y$ существует $x^i\in X$, для которого $\psi\le\Phi(x^i,y)$, но при этом $\psi_i=\varphi_i(x^i,y^i)=\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y)>F_i^1$, т.е. в G_1 существует $\psi\not\le F^1$. Это противоречит тому, что F^1 единственная парето-оптимальная точка в G_1. Таким образом, $F_i^1=\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y)$.

Пусть $\operatorname{Min}G_2$ содержит единственную парето-оптимальную точку F^2. Тогда $F^2\in G_2$, или, что то же самое, существует $y^0\in Y$ такой, что $F^2\ge\Phi(x,y^0)$ для любого $x\in X$, откуда $F_i^2\ge\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y^0)$ для любого $i=\overline{1,Q}$. Предположим, что существует i, для которого $F_i^2>\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y^0)$. Вектор F^0, $F_i^0=\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y^0)$, принадлежит множеству G_2, поскольку $\forall\ x\in X$ $F_i^0\ge\varphi_i(x,y^0)$ для любого $i=\overline{1,Q}$. Но точка F^2 является единственной парето-оптимальной в G_2, поэтому $F^0\ge F^2$, откуда следует, что $F^0=F^2$, т.е. $F_i^2=\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y^0)\ge\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y)$ $\forall i$. Пусть существует j, для которого $F_j^2>\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}\varphi_j(x,y)\overset{def}{=}\max\limits_{x\in X}\varphi_j(x,y^j)$. Рассмотрим вектор ψ с компонентами $\psi_i=\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y^j)$ для любого $i=\overline{1,Q}$. Тогда $\psi\in G_2$, поскольку существует $y^j\in Y$ такой, что для любого $x\in X$ выполнено $\varphi_i(x,y^j)\le\psi_i=\max\limits_{x\in X}\varphi_i(x,y^j)$, для любого $i=\overline{1,Q}$. Но $\psi_j<F_j^2$, что противоречит единственности парето-оптимальной точки в G_2. Утверждение доказано.

Заметим, что условие единственности паретовского значения в задаче векторной оптимизации фактически равносильно отсутствию конкуренции между частными критериями φ_i, т.е. возможности оптимизировать каждый без ущерба для остальных. При этом задача распадается на Q скалярных. Таким образом, если точка ψ^* (с координатами $\psi_i^* = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} \varphi_i(x, y)$ – оптимумами по всем критериям) находится в обоих множествах гарантированных оценок – у максимизирующего ЛПР и у минимизирующего, то она является значением обоих минимаксов, и эти значения совпадают.

Итак, когда многокритериальность оказывается несущественной, задача векторной оптимизации с неконтролируемыми факторами обладает всеми свойствами однокритериальной. В противном случае гарантированная оценка для хотя бы одной из сторон хуже (по крайней мере по одному из критериев и не лучше по другим), чем результат, который будет получен. Действительно, реальный результат не может быть хуже его гарантированной оценки любой из сторон, следовательно, он находится между ξ и ψ, фигурирующими в утверждении 1. А тогда, если условия утверждения 2 не выполнены, он не может принадлежать обоим множествам оценок. Так что гарантированные оценки в векторной оптимизации, как правило, будут пессимистическими – не являются точными даже в игре с противоположными интересами.

Литература.

1. Краснощеков П.С., Петров А.А., Федоров В.В. Информатика и проектирование. М., Знание, 1986 (сер. "Математика, кибернетика, №10").
2. Вязгин В.А., Федоров В.В. Математические методы автоматизированного проектирования. М.: Высшая школа, 1989.
3. Карманов В.Г., Федоров В.В. Моделирование в исследовании операций. М.: Твема, 1996.
4. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
6. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
7. Воробейчикова О.А., Новикова Н.М. Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. Т.37. №12. С. 1467 – 1477.
8. Воробейчикова О.А. Векторный минимакс со связанными ограничениями: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ,ф.ВМиК, 1998.
9. Новикова Н.М., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ РАН, 2000.
10. Ногин В.Д. Двойственность в многоцелевом программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977. Т.17. №1. С. 254 – 258.