

Д.С. Пулин, А.В. Разгулин

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПОДАВЛЕНИЯ ИСКАЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ <sup>1</sup>

### Введение

Идея управления светом с помощью света уже стала классической в нелинейной оптике благодаря многочисленным работам по оптической бистабильности в интерферометрах, пассивных кольцевых резонаторах и других системах (см. обзор [1]). Другая важная проблема связана с использованием эффекта подавления фазовых искажений в таких системах для задач формирования выходной волны с заданными свойствами ([2, 3, 4, 5]). Отметим изучаемые в этой связи новые методы активного воздействия на управляющую волну в контуре обратной связи, использующие возможности управления фурье-фильтром ([6, 7, 8]) и преобразованием пространственных аргументов ([9, 10, 11]).

В отличие от упомянутых работ, в настоящей работе мы исследуем задачу управления профилем интенсивности волны в контуре обратной связи нелинейного кольцевого резонатора, а также ее применение в задаче компенсации искажений. В однопроходовой модели резонатора динамика фазовой модуляции  $u = u(t; K) = u(x, y, t; K)$  описывается квазилинейным уравнением диффузии [2]:

$$\partial_t u + u - D\Delta u = K(x, y) (1 + \gamma \cos(u + \varphi)). \quad (1)$$

Здесь  $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$  – оператор Лапласа в пределах апертуры  $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ , функциональный параметр  $K(x, y)$  определяется управляемой модуляцией интенсивности световой волны в контуре обратной связи,  $\gamma$  – коэффициент обратной связи,  $\varphi = \varphi(x, y)$  – искажение фазы входного поля. Уравнение (1) дополняется начальным условием  $u(0) = u_0$  и периодическими граничными условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}, u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2\pi}, u|_{y=0} = u|_{y=2\pi}, u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2\pi}. \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 04-01-00619.

Обычно в задачах компенсации фазовых искажений в оптических системах требуется добиться выравнивания фазы суммарной выходной волны (т.е.  $u + \varphi \approx const$ ), причем конкретное значение константы несущественно. При определенном выборе параметров задачи и пространственно-однородного параметра  $K(x, y) \equiv K_0$  в системе происходит частичная самокомпенсация искажений ([2, 3, 4, 5]). Если вносимые фазовые искажения не изменяются во времени, то можно ожидать улучшения качества компенсации за счет управления функциональным параметром  $K(x, y)$ , подстраивающимся под конкретное фазовое искажение. Для формализации задачи условимся качество компенсации искажений оценивать с помощью линейной комбинации  $J(K) = \alpha J_1(K) + \beta J_2(K)$  терминальных по времени функционалов

$$J_1(K) = \|S(u(T; K) + \varphi)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad J_2(K) = \|\nabla(u(T; K) + \varphi)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (3)$$

где

$$S(g) = g - |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g dx dy, \quad |\Omega| = (2\pi)^2. \quad (4)$$

Задача оптимизации подавления искажений формулируется в виде задачи минимизации  $J(K) \rightarrow \inf$  на некотором допустимом множестве управлений.

В данной работе разработан математический аппарат для исследования рассматриваемой задачи. Доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений прямой и сопряженной задач, теоремы о разрешимости задачи оптимизации и дифференцируемости по Фреше целевого функционала  $J(K)$ . Получена формула градиента функционала, проведена оценка остаточного члена. Эффективность градиентной процедуры оптимизации в задаче компенсации искажений продемонстрирована результатами численного моделирования.

## 2. Обозначения и вспомогательные предложения

Обозначим  $L_p = L_p(\Omega)$  – стандартное комплекснозначное пространство Лебега при  $1 \leq p < +\infty$  с нормой  $\|u\|_{L_p} = (\int_{\Omega} |u|^p dx dy)^{1/p}$ .

При  $p = 2$  в гильбертовом пространстве  $L_2$  символы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и  $\|\cdot\|$  будут использоваться для обозначения скалярного произведения и нормы. Пространства Соболева  $H^s \equiv H^s(\Omega)$  произвольного порядка  $s > 0$  определены, например, в [12], гл. 1, п. 9.1. При натуральном  $s = m$

гильбертово пространство  $H^m$  состоит из функций  $u \in L_2$ , у которых все обобщенные производные  $D^{\sigma,\nu}u \equiv \partial^{\sigma+\nu}u/\partial x^\sigma \partial y^\nu$  до порядка  $\sigma + \nu \leq m$  принадлежат  $L_2$ . Скалярное произведение и норма в  $H^m$  имеют вид:

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{\sigma+\nu=0}^m \langle D^{\sigma,\nu}u, D^{\sigma,\nu}v \rangle, \quad \|u\|_{H^m} = \langle u, u \rangle_{H^m}^{1/2}.$$

Замкнутое в  $H^2$  подпространство функций, удовлетворяющих условиям (2), обозначается через  $\tilde{H}^2$ ;  $\tilde{H}^1 = \{u \in H^1 : u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}, u|_{y=0} = u|_{y=2\pi}\}$  – замкнутое подпространство  $H^1$ . После отождествления  $L_2$  и  $L_2^*$  по теореме Рисса получаем цепочку компактных вложений ([12], гл. 1, п. 16)  $\tilde{H}^{-1} \hookrightarrow L_2 \simeq L_2^* \hookrightarrow \tilde{H}^1$ , где  $\tilde{H}^{-1} = \tilde{H}^{1*}$  – двойственное пространство с нормой  $\|g\|_{\tilde{H}^{-1}} = \sup_{0 \neq \varphi \in \tilde{H}^1} |\langle g, \varphi \rangle| / \|\varphi\|_{\tilde{H}^1}$ , а угловые скобки в зависимости

от контекста определяют значение функционала  $g \in \tilde{H}^{-1}$  на пробном элементе  $\varphi$ , либо скалярное произведение в  $L_2$ . В пространстве  $C(\bar{\Omega})$  непрерывных на  $\bar{\Omega}$  функций норма имеет вид  $\|u\|_C = \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |u(x,y)|$ .

Приведем некоторые неравенства, которые будут использованы в дальнейших рассуждениях. Для пространств  $H^s$  справедливо интерполяционное неравенство ([12], гл. 1, п. 9.3)

$$\|u\|_{H^{(1-\theta)r+\theta s}} \leq C_{r,s} \|u\|_{H^r}^{1-\theta} \|u\|_{H^s}^\theta, \quad (5)$$

где  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ . Согласно ([13], п. 4.6) при  $\sigma \geq 1 - 2/p$ ,  $2 \leq p < +\infty$  справедливо вложение  $H^\sigma \hookrightarrow L_p$  с оценкой норм

$$\|u\|_{L_p} \leq C_{p,\sigma} \|u\|_{H^\sigma}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) с показателями  $r = 0$ ,  $s = 1$ ,  $\theta = \sigma = 1 - 2/p$  вытекает мультипликативная оценка  $L_p$ -нормы:

$$\|u\|_{L_p} \leq C_1 \|u\|_{H^{1-2/p}} \leq C_2 \|u\|^{2/p} \|u\|_{H^1}^{1-2/p}. \quad (7)$$

Используемый в (1) оператор  $Au = u - D\Delta u$  с плотной в  $L_2$  областью определения  $\tilde{H}^2$  обладает свойствами  $A = A^* \geq E$ . Собственные функции  $e_{\bar{n}} = (2\pi)^{-1} \exp(i(kx + ly))$  оператора  $A$ , где компоненты индекса  $\bar{n} = (k, l)$  пробегают значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , образуют полную ортонормированную систему в  $L_2$  ([14], гл. VII, п. 1),

а собственные значения  $\lambda_{\bar{n}} = 1 + D(k^2 + l^2) \rightarrow +\infty$  при  $|\bar{n}| \rightarrow +\infty$ . Методом Фурье нетрудно установить двустороннюю оценку

$$C_1 \|u\|_{H^2} \leq \|Au\| \leq C_2 \|u\|_{H^2}. \quad (8)$$

Энергетическое расширение оператора  $A$  на пространство  $\tilde{H}^1$ , обозначаемое тем же символом, для произвольных  $u, v \in \tilde{H}^1$  определяется по формуле  $\langle Au, v \rangle = \langle u, v \rangle + D \langle \nabla u, \nabla v \rangle$  и задает оператор  $A \in \mathcal{L}(\tilde{H}^1 \rightarrow \tilde{H}^{-1})$ , причем справедливы оценки

$$B_1 \|u\|_{\tilde{H}^1}^2 \leq \langle Au, u \rangle \leq B_2 \|u\|_{\tilde{H}^1}^2, \quad (9)$$

$$\|Au\|_{\tilde{H}^{-1}} \leq B_2 \|u\|_{\tilde{H}^1}, \quad (10)$$

где  $\nabla u = (u_x, u_y)$  – градиент функции  $u$  по переменным  $(x, y)$ ,  $\mathcal{L}(B_1 \rightarrow B_2)$  – пространство линейных ограниченных операторов на паре банаховых пространств  $B_{1,2}$ .

Для функций, зависящих от переменных  $(x, y, t)$ , используем обозначение банахова пространства

$$W(0, T; V, H) = \{u : u \in L_2(0, T; V), \partial_t u \in L_2(0, T; H)\}$$

с нормой  $\|u\|_{W(0, T; V, H)} = \|u\|_{L_2(0, T; V)} + \|\partial_t u\|_{L_2(0, T; H)}$ , где  $L_2(0, T; B)$  – пространство интегрируемых по Бохнеру на  $(0, T)$  функций со значениями в банаховом пространстве  $B$  и нормой

$$\|u\|_{L_2(0, T; B)} = \left( \int_0^T \|u(\tau)\|_B^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Обозначим также  $C([0, T]; H)$  – пространство непрерывных на  $[0, T]$  функций со значениями в  $H$ , норма которых определяется как

$$\|u\|_{C([0, T]; H)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_H.$$

В приведенных обозначениях начально-краевую задачу для уравнения (1) можно переписать в операторной форме

$$\partial_t u + Au = F(u, K), \quad u(0) = u_0, \quad (11)$$

где  $F(u, K) = K(1 + \gamma \cos(u + \varphi))$ , а периодические граничные условия учтены в области определения  $A$ .

### 3. Разрешимость прямой задачи

**Лемма 1.** Пусть  $K \in L_2$  и  $\varphi$  – измеримая по Лебегу функция. Тогда для произвольной измеримой на  $\Omega$  функции  $u = u(x, y)$  справедлива оценка

$$\|F(u, K)\| \leq (1 + \gamma)\|K\|. \quad (12)$$

Если  $u, \tilde{u} \in H^1$  и  $K \in H^1$ , то

$$\|F(u, K) - F(\tilde{u}, K)\| \leq C\|K\|_{H^1}\|u - \tilde{u}\|_{H^1}. \quad (13)$$

Если  $u$  измерима на  $\Omega$  и  $K, \tilde{K} \in L_2$ , то

$$\|F(u, K) - F(u, \tilde{K})\| \leq (1 + \gamma)\|K - \tilde{K}\|. \quad (14)$$

*Доказательство.* Рассмотрим непрерывную функцию  $f(z) = \cos(z)$ . Суперпозиция  $f(u + \varphi)$  непрерывной и суммы измеримых функций будет также измерима ([15], гл. 10), и, кроме того, интегрируема в силу существования интегрируемой мажоранты  $|f(u + \varphi)| \leq 1$ . Неравенство (12) следует из оценки  $|F(u, K)| \leq (1 + \gamma)|K|$ . Аналогично, из неравенства  $|F(u, K) - F(\tilde{u}, K)| \leq \gamma|K||u - \tilde{u}|$  с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\|F(u, K) - F(\tilde{u}, K)\| \leq C_1\|K\|_{L_4}\|u - \tilde{u}\|_{L_4}.$$

Применяя (6) при  $p = 4$ ,  $\sigma = 1$  выводим (13). Оценка (14) вытекает из неравенства  $|F(u, K) - F(u, \tilde{K})| \leq (1 + \gamma)|K - \tilde{K}|$ . Лемма 1 доказана.

**Теорема 1.** Пусть  $K \in H^1$ ,  $u_0 \in \tilde{H}^1$  и  $\varphi$  – измеримая по Лебегу функция. Тогда при любом  $T > 0$  задача (11) имеет единственное решение  $u \in W(0, T; \tilde{H}^2, L_2)$ , удовлетворяющее дифференциальному уравнению почти всюду в  $Q = \Omega \times (0, T)$  и начальному условию в смысле следов в пространстве  $\tilde{H}^1$ . Решение подчиняется оценкам

$$\|u\|_{W(0, T; H^2, L_2)} \leq C_1 (\|K\| + \|u_0\|_{H^1}), \quad (15)$$

$$\|u(t)\|_{H^2} \leq t^{-1/2}C_2(1 + \|K\|_{H^1})(\|K\| + \|u_0\|_{H^1}), \quad \forall t \in (0, T], \quad (16)$$

а также удовлетворяет условию Липшица по параметру  $K$

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(t; K) - u(t; \tilde{K})\|_{H^1} \leq C_3\|K - \tilde{K}\| \quad (17)$$

с константой Липшица  $C_3$ , ограниченной при  $K, \tilde{K} \in \mathcal{B} = \{K \in H^1 : \|K\|_{H^1} \leq K_1 = \text{const}\}$ . Здесь  $C_j = C_j(T)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

*Доказательство.* а) *Существование и единственность решения системы Галеркина.* Рассмотрим галеркинские приближения

$u_N(t) = \sum_{n=1}^N c_n(t)e_n$ , являющиеся решениями конечномерных задач Коши

$$\partial_t u_N + Au_N = F^N(u_N), \quad u_N(0) = u_0^N, \quad (18)$$

где  $F^N(u_N) = \sum_{n=1}^N F_n(u_N)e_n$ ,  $F_n(u_N) = \langle F(u_N), e_n \rangle$ ,  $u_0^N = \sum_{n=1}^N u_{0n}e_n(x, y)$ ,  $u_{0n} = \langle u_0, e_n \rangle$ . Учитывая ортогональность собственных функций  $e_n$  оператора  $A$ , для коэффициентов  $c_n = c_n(t)$  получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc_n}{dt} + \lambda_n c_n = F_n(u_N), \quad c_n(0) = u_{0n}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

В силу леммы 1 справедлива линейная по  $K$  оценка правой части каждого из уравнений в (19):

$$|F_n(u_N)| \leq \|F(u_N)\| \leq (1 + \gamma)\|K\|. \quad (20)$$

Аналогично лемме 1 для разности функций  $u_N = \sum_{n=1}^N c_n e_n$  и  $v_N = \sum_{n=1}^N d_n e_n$  нетрудно вывести неравенство

$$|F_n(u_N) - F_n(v_N)| \leq \gamma\|K\|\|\vec{c} - \vec{d}\|_{E^N}, \quad (21)$$

где  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_N)$  и  $\vec{d} = (d_1, \dots, d_N)$ . В силу ограниченности  $\|K\|$  последнее неравенство означает выполнение глобального условия Липшица для  $F_n$ . Согласно [16] (стр. 392, теорема 1.2) оценки (20) и (21) обеспечивают существование и единственность на всем отрезке  $[0, T]$  непрерывно дифференцируемого решения системы (19). Поэтому разрешима система (18), причем  $u_N, \partial_t u_N, F^N(u_N) \in C([0, T]; \tilde{H}^2)$ .

б) *Оценки галеркинских приближений.* Получим необходимые для предельного перехода при  $N \rightarrow +\infty$  оценки галеркинских приближений. Домножим уравнение (18) на  $Au_N(t)$  скалярно в  $L_2$ . Тогда с учетом (9) имеем

$$0.5B_1 \partial_t \|u_N\|_{H^1}^2 + \|Au_N\|^2 \leq \langle F^N(u_N), Au_N \rangle.$$

Интегрируя полученное выражение от 0 до  $t$ , пользуясь оценками

$$\|u_N(0)\|_{H^1} \leq \|u_0\|_{H^1}, \quad \|F^N(u_N)\| \leq \|F(u_N)\| \leq (1 + \gamma)\|K\|,$$

неравенством (8) и леммой Гронуолла, получаем при  $t \in [0, T]$ :

$$\|u_N\|_{C([0,T];H^1)} + \|u_N\|_{L_2(0,T;H^2)} \leq C_1 (\|K\| + \|u_0\|_{H^1}). \quad (22)$$

Тогда из уравнения (18) имеем

$$\|\partial_t u_N\|_{L_2(0,T;L_2)} \leq C_2 (\|K\| + \|u_0\|_{H^1}). \quad (23)$$

Объединяя неравенства (22) и (23), получаем

$$\|u_N\|_{W(0,T;H^2,L_2)} \leq C_3 (\|K\| + \|u_0\|_{H^1}), \quad (24)$$

где  $C_3$  не зависит от  $N$ .

в) *Оценка следов в норме  $H^2$ .* Выведем дополнительные оценки нормы  $\|u_N(t)\|_{H^2}$  при  $t \in (0, T]$ . Домножая уравнение (18) на  $tA\partial_t u_N(t)$ , получаем

$$B_1 t \|\partial_t u_N\|_{H^1}^2 + 0.5t\partial_t \|Au_N\|^2 \leq \langle F^N(u_N), tA\partial_t u_N \rangle.$$

Применяя тождество  $t\partial_t \|Au_N\|^2 = \partial_t (t\|Au_N\|^2) - \|Au_N\|^2$  и интегрируя от 0 до  $t$ , имеем

$$\begin{aligned} t\|Au_N\|^2 + 2B_1 \int_0^t \tau \|\partial_\tau u_N\|_{H^1}^2 d\tau &\leq \\ &\leq 2 \int_0^t \langle \tau F^N(u_N), A\partial_\tau u_N \rangle d\tau + \int_0^t \|Au_N\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

После интегрирования первого слагаемого в правой части (25) по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \tau F^N(u_N), A\partial_\tau u_N \rangle d\tau &= \\ &= \langle tF^N(u_N(t)), Au_N(t) \rangle - \int_0^t \langle F^N(u_N) + \tau \partial_\tau F^N(u_N), Au_N \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Для первого слагаемого в правой части (26) имеем

$$\langle \tau F^N(u_N(t)), Au_N(t) \rangle \leq 0.5T(1 + \gamma)^2 \|K\|^2 + 0.5t \|Au_N\|^2. \quad (27)$$

Интеграл в правой части (26) разобьем на два слагаемых. Применяя неравенство (22), оценим первое из них:

$$2 \int_0^t \langle F^N(u_N), Au_N \rangle d\tau \leq C_1 (\|K\|^2 + \|u_0\|_{H^1}^2). \quad (28)$$

Из формулы  $\partial_t F(u_N) = -\gamma K \sin(u_N + \varphi) \partial_t u_N$ , с помощью неравенства Гёльдера и (6) получаем оценку

$$\|\partial_t F(u_N)\| \leq \gamma \|K\|_{L_4} \|\partial_t u_N\|_{L_4} \leq C\gamma \|K\|_{H^1} \|\partial_t u_N\|_{H^1}. \quad (29)$$

Из (22) и (29) с помощью  $\varepsilon$ -неравенства имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \tau \langle \partial_\tau F^N(u_N), Au_N \rangle d\tau &\leq \\ &\leq C_2 \|K\|_{H^1}^2 (\|K\|^2 + \|u_0\|^2) + \varepsilon \int_0^t \tau \|\partial_\tau u_N\|_{H^1}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Окончательно, с учетом (22), (27), (28) и (30), из (25) выводим оценку

$$0.5t \|Au_N\|^2 + (2B_1 - \varepsilon) \int_0^t \tau \|\partial_\tau u_N\|_{H^1}^2 d\tau \leq C_3 (1 + \|K\|_{H^1}^2) (\|K\|^2 + \|u_0\|^2),$$

откуда при  $\varepsilon < 2B_1$  в силу (8) окончательно получаем

$$\|u_N(t)\|_{H^2}^2 \leq t^{-1} C_4 (1 + \|K\|_{H^1}^2) (\|K\|^2 + \|u_0\|^2), \quad \forall t \in (0, T], \quad (31)$$

где  $C_4$  не зависит от  $N$ .

з) *Предельный переход при  $N \rightarrow +\infty$ .* Согласно (24) последовательность  $\{u_N\}$  ограничена в норме  $\|\cdot\|_{W(0, T; H^2, L_2)}$ . Из компактности вложений  $H^2 \hookrightarrow H^1$ ,  $H^1 \hookrightarrow L_2$  следует компактность вложения  $W(0, T; \tilde{H}^2, L_2) \hookrightarrow L_2(0, T; \tilde{H}^1)$  ([17], гл. 1, п. 5.2, теорема 5.1), откуда вытекает существование подпоследовательности  $\{u_M\}$ , сильно сходящейся к функции  $u \in L_2(0, T; \tilde{H}^1)$ . Выделяя из  $\{u_M\}$  слабо сходящуюся в  $L_2(0, T; \tilde{H}^2)$  подпоследовательность  $\{u_S\}$ , имеем

$$u_S \rightarrow u \text{ слабо в } L_2(0, T; \tilde{H}^2) \text{ и сильно в } L_2(0, T; \tilde{H}^1), \quad (32)$$



причем в силу оценок (22) и (23) можно сразу считать, что

$$\partial_t u_S \rightarrow \partial_t u, \quad Au_S \rightarrow Au \text{ слабо в } L_2(0, T; L_2). \quad (33)$$

Обоснуем переход к пределу в нелинейном члене. Для п.в.  $t \in (0, T)$  имеет место сильная в  $L_2$  сходимость  $F^S(u(t), K) \rightarrow F(u(t), K)$  как ряда Фурье функции  $F(u(t), K)$ . Благодаря мажоранте  $\|F^S(u(t), K)\| \leq \|F(u(t), K)\|$  по теореме Лебега устанавливается сильная в  $L_2(0, T; L_2)$  сходимость  $F^S(u, K) \rightarrow F(u, K)$ . В силу (32) имеем

$$\begin{aligned} \|F^S(u_S) - F^S(u)\|_{L_2(0, T; L_2)} &\leq \\ &\leq \|F(u_S) - F(u)\|_{L_2(0, T; L_2)} \leq \gamma C \|K\|_{H^1} \|u_S - u\|_{L_2(0, T; H^1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает сходимость  $F^S(u_S) \rightarrow F(u)$  в  $L_2(0, T; L_2)$ , что обосновывает переход к пределу в уравнении (18). Равенство  $u|_{t=0} = u_0$  следует из слабой сходимости  $u_N \rightarrow u$  в  $W(0, T; \dot{H}^2, L_2)$  и  $u_0^N \rightarrow u_0$  в  $\dot{H}^1$  как ряда Фурье функции  $u_0$ . Неравенства (15) и (16) следуют из оценок (24) и (31) в силу невозрастания нормы при переходе к слабому пределу.

д) *Единственность решения.* Для разности  $v = u_1 - u_2$  двух решений задачи (11) имеем

$$\partial_t v + Av = F(u_1, K) - F(u_2, K), \quad v|_{t=0} = 0. \quad (34)$$

Домножив равенство (34) на  $Av$  скалярно в  $L_2$ , после интегрирования от 0 до  $t$  с учетом (6) и (13) выводим оценку

$$\begin{aligned} 0.5B_1 \|v(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|Av(\tau)\|^2 d\tau &\leq C_1 \int_0^t \|K\|_{H^1} \|v(\tau)\|_{H^1} \|Av(\tau)\|_{H^1} d\tau \leq \\ &\leq 0.5C_1^2 K_1^2 \int_0^t \|v(\tau)\|_{H^1}^2 d\tau + 0.5 \int_0^t \|Av(\tau)\|^2 d\tau, \end{aligned}$$

откуда  $0 \leq \|v(t)\|_{H^1}^2 \leq C_3 \int_0^t \|v(\tau)\|_{H^1}^2 d\tau$ . Применяя лемму Гронуолла, приходим к равенству  $\|v(t)\|_{H^1}^2 = 0$ .

е) *Литици-непрерывность решения по параметру  $K$ .* Обозначим  $u = u(t; K)$ ,  $\tilde{u} = u(t; \tilde{K})$ ,  $w = u - \tilde{u}$ . Из (1) получаем

$$\partial_t w + Aw = R_1 + R_2, \quad (35)$$

$$R_1 = F(u, K) - F(\tilde{u}, K), \quad R_2 = F(\tilde{u}, K) - F(\tilde{u}, \tilde{K}).$$

Умножим уравнение (35) на  $Aw$  скалярно в  $L_2$  и применим (13), (14) для оценки  $R_1$  и  $R_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} 0.5B_1\partial_t\|w\|_{H^1}^2 + \|Aw\|^2 &\leq C_1(\|K\|_{H^1}\|w\|_{H^1} + \|K - \tilde{K}\|)\|Aw\| \leq \\ &\leq C_2K_1^2\|w\|_{H^1}^2 + C_3\|K - \tilde{K}\|^2 + 0.5\|Aw\|^2. \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые и интегрируя от 0 до  $t$  с учетом условия  $w(0) = 0$ , получаем

$$0 \leq \|w(t)\|_{H^1}^2 \leq C_4 \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^1}^2 d\tau + C_5\|K - \tilde{K}\|^2.$$

Применяя лемму Гронуолла, приходим к (17). Теорема 1 доказана.

#### 4. Сопряженная задача

Назовем сопряженной к (11) задачу нахождения функции  $\psi(x, y, t)$  из условий

$$\partial_t\psi - A\psi = L(\psi), \quad (36)$$

$$\psi|_{t=T} = \psi_T, \quad (37)$$

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=2\pi}, \psi_x|_{x=0} = \psi_x|_{x=2\pi}, \psi|_{y=0} = \psi|_{y=2\pi}, \psi_y|_{y=0} = \psi_y|_{y=2\pi}, \quad (38)$$

где  $L(\psi) = \gamma K\psi \sin(u + \varphi)$ ,  $u = u(x, y, t; K)$  – решение задачи (11).

**Теорема 2.** Пусть  $K \in L_2$ ,  $\psi_T \in L_2$  и  $\varphi$  – измеримая по Лебегу функция. Тогда при любом  $T > 0$  начально-краевая задача (36)-(38) имеет единственное решение  $\psi \in W(0, T; \tilde{H}^1, \tilde{H}^{-1})$ , удовлетворяющее уравнению (36) в пространстве  $L_2(0, T; \tilde{H}^{-1})$ , начальному условию (37) в смысле следов в пространстве  $L_2$  и подчиняющееся оценке

$$\|\psi\|_{W(0, T; \tilde{H}^1, \tilde{H}^{-1})} \leq C_1\|\psi_T\|. \quad (39)$$

*Доказательство.* Так же, как и в предыдущей теореме, доказательство проводится методом Галеркина. Рассматриваются функции вида  $\psi_N = \sum_{n=1}^N \xi_n(t)e_n$ , являющиеся решениями конечномерных задач Коши

$$\partial_t\psi_N - A\psi_N = L^N(\psi_N), \quad \psi_N(T) = \psi_T^N, \quad (40)$$

где  $L^N(\psi_N) = \sum_{n=1}^N L_n(\psi_N)e_n(x, y)$ ,  $L_n(\psi_N) = \langle L(\psi_N), e_n \rangle$ ,

$$\psi_T^N = \sum_{n=1}^N \psi_{T,n} e_n, \quad \psi_{T,n} = \langle \psi_T, e_n \rangle.$$

Пусть  $\phi_N = \sum_{n=1}^N \eta_n(t)e_n$ . Тогда в силу линейности оператора

$L$  справедлива оценка  $|L_n(\psi_N) - L_n(\phi_N)| \leq C_1 \|K\| \|\vec{\xi} - \vec{\eta}\|_{E^N}$ , где  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ ,  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ . Отсюда следует существование непрерывно дифференцируемого на всем  $[0, T]$  решения системы системы (40), причем  $\psi_N, \partial_t \psi_N, L^N(\psi_N) \in C([0, T]; \tilde{H}^2)$ .

Чтобы получить необходимые для предельного перехода при  $N \rightarrow +\infty$  оценки галеркинских приближений домножим уравнение (40) на  $\psi_N(t)$  скалярно в  $L_2$ . Интегрируя полученное равенство от  $t$  до  $T$  с учетом (9) приходим к неравенству

$$\|\psi_N(t)\|^2 + 2B_1 \int_t^T \|\psi_N\|_{H^1}^2 d\tau \leq 2 \int_t^T |\langle L^N(\psi_N), \psi_N \rangle| d\tau + \|\psi_N(T)\|^2.$$

С помощью (6) имеем

$$\begin{aligned} \langle L^N(\psi_N), \psi_N \rangle &\leq C_1 \|K\psi_N\| \|\psi_N\| \leq C_2 \|K\|_{H^1} \|\psi_N\|_{H^1} \|\psi_N\| \leq \\ &\leq C_3 \|\psi_N\|^2 + B_1 \|\psi_N\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки  $\|\psi_N(T)\| \leq \|\psi(T)\|$  получаем

$$\|\psi_N(t)\|^2 + B_1 \int_t^T \|\psi_N\|_{H^1}^2 d\tau \leq C_1 \int_t^T \|\psi_N\|^2 d\tau + \|\psi_T\|^2. \quad (41)$$

Отбрасывая интеграл в левой части (41) и применяя лемму Гронуолла, находим  $\|\psi_N\|_{C([0, T]; L_2)}^2 \leq C_2 \|\psi_T\|^2$ . Отсюда и из (41) получаем

$$\|\psi_N\|_{L_2(0, T; H^1)} \leq C_3 \|\psi_T\|. \quad (42)$$

Для  $\psi \in \tilde{H}^1$  на основе неравенства Гельдера и (6) при  $p = 4$ ,  $\sigma = 1$ , имеем

$$|\langle L^N(\psi), \varphi \rangle| \leq \gamma \|K\| \|\psi\|_{L_4} \|\varphi\|_{L_4} \leq C_1 \|K\| \|\psi\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}.$$

Тогда по определению негативной нормы получаем

$$\|L^N(\psi)\|_{\tilde{H}^{-1}} = \sup_{0 \neq \varphi \in \tilde{H}^1} |\langle L^N(\psi), \varphi \rangle| / \|\varphi\|_{H^1} \leq C_1 \gamma \|K\| \|\psi\|_{H^1}.$$

Поэтому  $\|L^N(\psi)\|_{L_2(0,T;\tilde{H}^{-1})} \leq C_2\|K\|\|\psi\|_{L_2(0,T;H^1)} \leq C_3\|\psi_T\|$ . Из уравнения (40) и (10) нетрудно вывести аналогичную оценку для  $\partial_t\psi_N$ , и окончательно получить неравенство

$$\|\psi_N\|_{W(0,T;\tilde{H}^1,\tilde{H}^{-1})} \leq C_4\|\psi_T\|. \quad (43)$$

Обоснование предельного перехода в уравнении и начальных данных почти дословно повторяет соответствующий пункт доказательства теоремы 1, но в терминах пространств меньшей гладкости. Так, пользуясь компактностью вложения  $W(0,T;\tilde{H}^1,\tilde{H}^{-1}) \hookrightarrow L_2(0,T;L_2)$ , выделяем подпоследовательность  $\{\psi_S\}$  такую, что:

$$\begin{aligned} \psi_S &\rightarrow \psi \text{ слабо в } L_2(0,T;\tilde{H}^1) \text{ и сильно в } L_2(0,T;L_2), \\ \partial_t\psi_S &\rightarrow \partial_t\psi, \quad A\psi_S \rightarrow A\psi \text{ слабо в } L_2(0,T;\tilde{H}^{-1}). \end{aligned}$$

Предельный переход в правой части уравнения (40) можно осуществить с помощью сходимости  $L^S(\psi) \rightarrow L(\psi)$  в пространстве  $L_2(0,T;\tilde{H}^{-1})$  как ряда Фурье функции  $L$  и вытекающей из линейности по  $\psi$  сходимости  $\|L^S(\psi_S) - L^S(\psi)\|_{L_2(0,T;\tilde{H}^{-1})} \rightarrow 0$ . При этом равенство  $\psi|_{t=T} = \psi_T$  следует из слабой сходимости  $\psi_N \rightarrow \psi$  в пространстве  $W(0,T;\tilde{H}^1,\tilde{H}^{-1}) \hookrightarrow C([0,T];L_2)$  и  $\psi_T^N \rightarrow \psi_T$  в пространстве  $L_2$  как ряда Фурье функции  $\psi_T$ .

Таким образом, последовательность  $\{\psi_S\}$  слабо сходится к функции  $\psi$ , удовлетворяющей задаче (36)-(38), причем неравенство (39) следует из оценки (43) в силу невозрастания нормы при переходе к слабому пределу. Единственность решения вытекает из линейности правой части уравнения (36). Теорема 2 доказана.

## 5. Разрешимость задачи оптимизации

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(K) = \alpha J_1(K) + \beta J_2(K) \rightarrow \inf,$$

на шаре  $\mathcal{B} = \{K \in H^1 : \|K\|_{H^1} \leq K_1 = \text{const}\}$ , где  $J_1(K)$  и  $J_2(K)$  определены в (3),  $\alpha, \beta$  — неотрицательные весовые множители,  $\alpha + \beta = 1$ .

**Лемма 2.** Определенный согласно (4) оператор  $S$  обладает свойствами: 1)  $S \in \mathcal{L}(L_2 \rightarrow L_2)$ , 2)  $S = S^*$  и 3)  $S^2 = S$ . Каждое из свойств, перечисленных в лемме 2, нетрудно проверить непосредственно, поэтому доказательство для краткости опустим.

**Теорема 3.** Пусть выполнены все условия теоремы 1 и  $\varphi \in \tilde{H}^2$ . Тогда множество оптимальных управлений

$$\mathcal{B}_* = \left\{ K \in \mathcal{B} : J(K) = \inf_{K \in \mathcal{B}} J(K) \right\}$$

непусто и слабо компактно в  $H^1$ .

*Доказательство.* Поскольку шар  $\mathcal{B}$  слабо компактен в  $H^1$ , то доказываемое утверждение будет следовать из слабого варианта теоремы Вейерштрасса ([18]), если показать слабую полунепрерывность снизу  $J(K)$  на  $\mathcal{B}$ . То есть, необходимо показать, что из сходимости  $K_N \rightarrow K$  слабо в  $H^1$  следует

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} J(K_N) \geq J(K). \quad (44)$$

Для любой фиксированной последовательности  $K_N \rightarrow K$  слабо в  $H^1$  соответствующая последовательность  $\{u_N\} = \{u(t; K_N)\}$  решений задачи

$$\partial_t u_N + Au_N = F(u_N, K_N), \quad u_N(0) = u_0, \quad (45)$$

ограничена в  $W(0, T; \tilde{H}^2, L_2)$  в силу теоремы 1. Поэтому существует подпоследовательность  $\{u_S\}$  такая, что  $u_S \rightarrow \bar{u}$  слабо в  $W(0, T; \tilde{H}^2, L_2)$ , и справедливы аналогичные (32) и (33) соотношения, обеспечивающие переход к слабому пределу в левой части уравнения (45).

Из леммы 2 и компактности вложения  $H^1 \hookrightarrow L_2$  имеем

$$\|F(u_S; K_S) - F(u_S; K)\|_{L_2(0, T; L_2)} \leq C_1 \|K_S - K\| \rightarrow 0.$$

Кроме того,  $F(u_S; K) \rightarrow F(\bar{u}; K)$  в  $L_2(0, T; L_2)$  в силу (32). Отсюда вытекает сильная в  $L_2(0, T; L_2)$  сходимость  $F(u_S, K_S) \rightarrow F(\bar{u}, K)$ . Таким образом, переходя к пределу в уравнении (45) получаем, что  $\bar{u}$  – решение задачи (11), т. е.  $\bar{u}(t) = u(t; K)$ .

Согласно теореме 1 решение задачи (11) единственно, поэтому любая слабо сходящаяся в  $W(0, T; \tilde{H}^2, L_2)$  подпоследовательность  $\{u_S\}$  слабо сходится к  $u$ . Тогда вся последовательность  $u_N \rightarrow u$  слабо в  $W(0, T; \tilde{H}^2, L_2)$ , причем соответствующая последовательность следов  $u_N(T) \rightarrow u(T)$  сильно в  $H^1$  благодаря оценке (17).

Обозначим  $w_N = u_N - u$ . Используя свойства оператора  $S$ , имеем

$$J_1(K_N) = J_1(K) + 2\langle S(u(T) + \varphi), w_N(T) \rangle + \|S(w_N(T))\|^2. \quad (46)$$

С помощью формулы

$$|\nabla(u_N + \varphi)|^2 = |\nabla(u + \varphi)|^2 + 2\langle \nabla(u + \varphi), \nabla w_N \rangle_{E^2} + |\nabla w_N|^2$$

и интегрирования по частям выражение для  $J_2(K_N)$  приводится к виду

$$\begin{aligned} J_2(K_N) &= \|\nabla(u_N(T) + \varphi)\|^2 = \\ &= J_2(K) - 2\langle \Delta(u(T) + \varphi), w_N(T) \rangle + \|\nabla w_N(T)\|^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Объединяя (46) и (47), приходим к неравенству

$$J(K_N) \geq J(K) + 2\langle \alpha S(u(T) + \varphi) - \beta \Delta(u(T) + \varphi), w_N(T) \rangle.$$

Переходя к пределу при  $N \rightarrow +\infty$  в силу сходимости  $w_N(T) \rightarrow 0$  в  $H^1$  получаем требуемое соотношение (44). Ввиду произвольности выбора  $\{K_N\}$  это означает слабую полунепрерывность снизу функционала  $J(K)$  на множестве  $\mathcal{B}$ . Теорема 3 доказана.

## 6. Градиент целевого функционала

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда функционал  $J(K)$  дифференцируем по Фреше на  $H^1$ , и справедлива формула градиента

$$J'(K) = \int_0^T \psi(t; K) (1 + \gamma \cos(u(t; K) + \varphi)) dt \in H^1, \quad (48)$$

где  $u(t; K)$  – решение прямой задачи,  $\psi(t)$  – решение сопряженной задачи с финальным условием (37) вида  $\psi_T = \alpha \psi_T^{(1)} + \beta \psi_T^{(2)}$ , где

$$\psi_T^{(1)} = 2S(u(T) + \varphi), \quad \psi_T^{(2)} = -2\Delta(u(T) + \varphi).$$

*Доказательство.* а) *Формула приращения функционала  $J(K)$ .* Используя разложение Тейлора

$$\begin{aligned} \cos(u + v + \varphi) - \cos(u + \varphi) &= -v \sin(u + \varphi) - \\ &- v^2 \int_0^1 \int_0^1 \theta_1 \cos(u + \varphi + \theta_1 \theta_2 v) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned}$$

приходим к уравнению для разности  $v(t) = u(t; K + h) - u(t; K)$ :

$$\partial_t v + Av = -\gamma K v \sin(u + \varphi) + h(1 + \gamma \cos(u + \varphi)) + \gamma R, \quad (49)$$

где  $v(0) = 0$ ,  $R = R_1 + R_2$ ,

$$R_1 = -v h \sin(u + \varphi), \quad (50)$$

$$R_2 = -v^2 (K + h) \int_0^1 \int_0^1 \theta_1 \cos(u + \varphi + \theta_1 \theta_2 v) d\theta_1 d\theta_2. \quad (51)$$

Используя аналогичные (46) и (47) соотношения, запишем приращение функционала  $J(K)$  в виде

$$\begin{aligned} \delta J(K) &= J(K + h) - J(K) = \\ &= \alpha \{ \|S(v(T))\|^2 + 2\langle v(T), S(u(T) + \varphi) \rangle \} + \\ &\quad + \beta \{ \|\nabla(v(T))\|^2 + 2\langle v(T), -\Delta(u(T) + \varphi) \rangle \}. \end{aligned} \quad (52)$$

Так как  $\varphi \in \tilde{H}^2$ ,  $u(T) \in \tilde{H}^2$  в силу (16) и  $S \in \mathcal{L}(L_2 \rightarrow L_2)$ , то  $\psi_T \in L_2$ , и выполнены все условия теоремы 2 существования и единственности решения  $\psi(t)$  задачи (36)-(38).

Из (52) следует равенство

$$\delta J(K) = \langle v(T), \psi_T \rangle + \alpha \|S(v(T))\|^2 + \beta \|\nabla(v(T))\|^2,$$

где первое слагаемое с учетом (49) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \langle v(T), \psi_T \rangle &= \int_0^T \langle \partial_t \psi, v \rangle dt - \\ &\quad - \int_0^T \langle \psi, Av + \gamma K v \sin(u + \varphi) - h(1 + \gamma \cos(u + \varphi)) + \gamma R \rangle dt. \end{aligned}$$

Используя самосопряженность оператора  $A$  и равенство (36), после группировки слагаемых приходим к тождеству

$$\delta J(K) = \left\langle \int_0^T \psi(1 + \gamma \cos(u + \varphi)) dt, h \right\rangle + \mathcal{R}, \quad (53)$$

где  $\mathcal{R} = \alpha \|S(v(T))\|^2 + \beta \|\nabla(v(T))\|^2 + \gamma \int_0^T \langle \psi, R \rangle dt$ .

б) *Оценка остаточного члена.* Для доказательства дифференцируемости по Фреше достаточно показать, что  $|\mathcal{R}| = o(\|h\|)$  в формуле приращения (53).

Из оценки (17) и леммы 2 следует, что первые два слагаемых в формуле остаточного члена  $\mathcal{R}$  имеют второй порядок малости относительно  $\|h\|$ . Оценим последнее слагаемое, где  $R = R_1 + R_2$  определяется согласно (50) и (51).

Применяя интегральное неравенство Гёльдера и оценки (6), (17), получаем

$$\begin{aligned} |\langle \psi, R_1 \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\psi(t)| |v(t)| |h| \, dx dy \leq \|h\| \|\psi(t)\|_{L_4} \|v(t)\|_{L_4} \leq \\ &\leq C_1 \|h\| \|\psi(t)\|_{H^1} \|v(t)\|_{H^1} \leq C_2 \|\psi(t)\|_{H^1} \|h\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \psi, R_2 \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\psi(t)| |v(t)|^2 |K + h| \, dx dy \leq \|K + h\| \|\psi(t)\|_{L_4} \|v(t)\|_{L_8}^2 \leq \\ &\leq C_3 \|\psi(t)\|_{H^1} \|v(t)\|_{H^1}^2 \leq C_4 \|\psi(t)\|_{H^1} \|h\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (39) имеем

$$\left| \int_0^T \langle \psi, R \rangle dt \right| \leq C_5 \|h\|^2 \|\psi\|_{L_2(0,T;H^1)} \leq C_6 \|h\|^2.$$

Таким образом,  $|\mathcal{R}| \leq C \|h\|^2$ , и дифференцируемость доказана.

в) Принадлежность  $J'(K)$  пространству  $H^1$ . Из оценки

$$\|J'(K)\| \leq T^{1/2} (1 + \gamma) \|\psi\|_{L_2(0,T;L_2)}$$

следует включение  $J'(K) \in L_2$ . Дифференцируя далее (48), имеем

$$\nabla J'(K) = \int_0^T \nabla \psi (1 + \gamma \cos(u + \varphi)) dt - \gamma \int_0^T \psi (\nabla u + \nabla \varphi) \sin(u + \varphi) dt,$$

откуда нетрудно вывести оценку

$$|\nabla J'(K)|^2 \leq C_1 \int_0^T |\nabla \psi|^2 dt + C_2 \int_0^T |\psi|^2 |\nabla u + \nabla \varphi|^2 dt.$$



Поэтому  $\|\nabla J'(K)\|^2 \leq C_1 \|\nabla \psi\|_{L_2(0,T;L_2)}^2 + C_2 I(K)$ , где  $I(K)$  оценивается с помощью мультипликативного неравенства (7) при  $p = 4$ :

$$\begin{aligned} I(K) &= \int_0^T \int_{\Omega} |\psi|^2 |\nabla u + \nabla \varphi|^2 dx dy dt \leq \int_0^T \|\psi\|_{L_4}^2 \|\nabla u + \nabla \varphi\|_{L_4}^2 dt \leq \\ &\leq C_1 \|\psi\|_{C([0,T];L_2)} \|\nabla u + \nabla \varphi\|_{C([0,T];L_2)} \int_0^T \|\psi\|_{H^1} \|\nabla u + \nabla \varphi\|_{H^1} dt \leq \\ &\leq C_2 \|\psi\|_{C([0,T];L_2)} \|u + \varphi\|_{C([0,T];H^1)} \|\psi\|_{L_2(0,T;H^1)} \|u + \varphi\|_{L_2(0,T;H^2)}. \end{aligned}$$

Тогда из теорем 1 и 2 следует ограниченность нормы  $\|\nabla J'(K)\|$  и, следовательно, нормы  $\|J'(K)\|_{H^1}$ . Теорема 4 доказана.

## 7. Результаты численного моделирования

Имея формулу градиента нетрудно выписать различные варианты градиентного метода [18]. Для примера остановимся на методе проекции градиента, согласно которому строится итерационная последовательность  $\{K_p\}$  согласно правилу

$$K_{p+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(K_p - \alpha_p J'(K_p)), \quad \alpha_p > 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$  – оператор проектирования в  $H^1$  на шар  $\mathcal{B}$ ,  $K_0$  – некоторая заданная начальная точка, а параметр  $\alpha_p$  выбирается на каждом шаге исходя из условия убывания функционала  $J(K_{p+1}) < J(K_p)$ .

Характерные результаты численной оптимизации приведены на рис. 1-4 для случая искажения в виде фазовой решетки  $\varphi$  амплитуды не выше 2 (рис. 1). Оптимизация проводилась для значений параметров  $K_0 \sim 5$ ,  $\gamma \sim 0.8$  и  $D \sim 0.01$  на отрезке времени  $T = 0.8$ , когда система не успевала в достаточной степени самокомпенсировать искажения. В результате метод проекции градиента показал высокую эффективность оптимизации: уже на 5–10 шаге флуктуации суммарного волнового фронта на выходе из системы были в значительной мере скомпенсированы. Из рис. 2 и 4 видно, как соответствующий фазовый профиль  $u(x, y, T) + \varphi$  световой волны на выходе из системы до оптимизации удалось существенным образом сгладить уже на 8 шаге градиентного метода. При этом значение целевого функционала уменьшилось примерно в 15 раз.

В заключении отметим, что оптимизированный профиль управления  $K$  во многом повторял профиль искажений  $-(u(x, y, T) + \varphi)$  (см.

рис. 1 и 3). Таким образом, разработанный метод проекции градиента можно использовать для актуальной в приложениях задачи визуализации фазового профиля волны [19].

Авторы благодарны А. В. Ларичеву за ценные замечания.

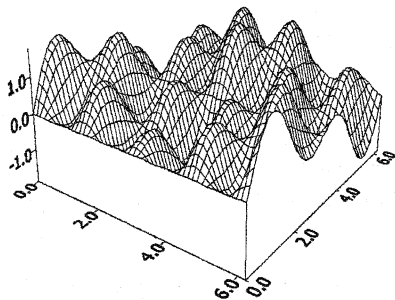


Рис. 1. Профиль фазовых искажений (функция  $\varphi$ ).

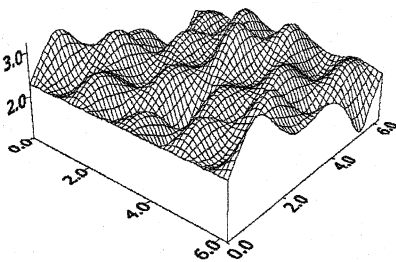


Рис. 2. Распределение суммарной фазы  $u(x, y, T) + \varphi$  до оптимизации.

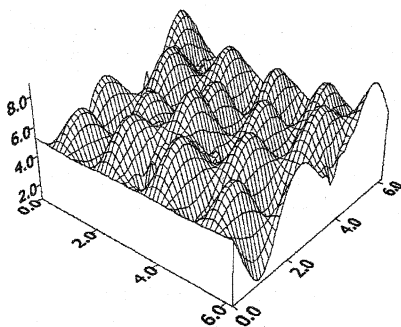


Рис. 3. Профиль оптимизированного управления.

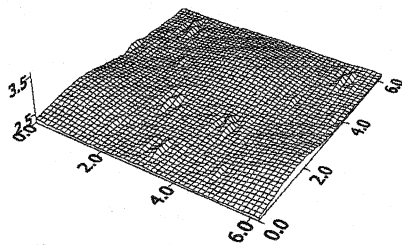


Рис. 4. Распределение суммарной фазы  $u(x, y, T) + \varphi$  после оптимизации.

## Литература

1. Gibbs H. M. *Optical Bistability: Controlling Light with Light*. – Academic Press, INC., 1985.
2. Воронцов М. А., Шишаков К. В. Фазовые эффекты в пассивных нелинейных резонаторах // *Квантовая электроника*. 1991. Т. 19, No 1. С. 121 – 126.
3. Vorontsov M. A., Larichev A. V. Intelligent laser systems: adaptive compensation of phase distortions in nonlinear system with two-dimensional feedback // *Proceedings SPIE*, 1991, vol. 1409, pp. 260 – 266.
4. Vorontsov M. A., Shishakov K. V. Phase-distortion suppression in nonlinear cavities with gain // *J. Opt. Soc. Am. ser. B*, 1992, vol. 9, No 1, pp. 71 – 77.
5. Firth W. J., Vorontsov M. A. Adaptive phase distortion suppression in nonlinear system with feedback mirror // *J. Modern Optics*, 1993, vol. 40, No 10, pp. 1841 – 1846.
6. Larichev A. V., Nikolaev I. P., Violino P. LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer // *Optics Communications*, 1997, vol. 138, pp. 127 – 135.
7. Vorontsov M. A., Justh E. W., Beresnev L. A. Adaptive optics with advanced phase-contrast techniques. I. High-resolution wave-front sensing // *J. Opt. Soc. Am. ser. A*, 2001, vol. 18, No 6, pp. 1289 – 1299.
8. Разгулин А. В., Чушкин В. А. О задаче оптимальной фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // *Журн. вычисл. матем. и математ. физики*. 2004. Т. 44, No 9. С. 1608 – 1618.
9. Razgulin A. V. Localized and periodic patterns in nonlinear optical system with controlled transforms of spatial arguments // *Proceedings SPIE*, 1998, vol. 3733, pp. 211 – 217.
10. Разгулин А. В. Аппроксимация задачи управления преобразованием аргументов в нелинейном параболическом уравнении // *Журн. вычисл. матем. и математ. физики*. 2001. Т. 41, No 12. С. 1844 – 1856.

11. Razgulin A. V., Savvina S. S. Numerical optimization of the two-dimensional transformation of arguments in the functional-differential diffusion equation // *Computational Mathematics and Modeling*. 2004, vol. 15, No 4, pp. 333 – 343.
12. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.– М.: Мир, 1971.
13. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators.– Berlin: DVW, 1978.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1981.
15. Толстов Г. П. Мера и интеграл.– М.: Наука, 1976.
16. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.– М.: Наука, 1970.
17. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М.: Мир, 1972.
18. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач.– М.: Наука, 1981.
19. Ivanov V. Yu., Sivokon V. P., Vorontsov M. A. Phase retrieval from a set of intensity measurements: theory and experiment // *J. Opt. Soc. Am., ser. A*, 1992, vol. 9, No 9, pp. 1515 – 1524.