А.В. Разгулин, С.С. Саввина

О ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДВУМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АРГУМЕНТОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ*

1. Введение

Функционально-дифференциальное уравнение (ФДУ) с преобразованием аргументов широко используется в современной нелинейной оптике для моделирования нелинейных оптических систем с нелокальной обратной связью [1-2]. Теоретическим вопросам, связанным с разрешимостью начально-краевых задач для ФДУ диффузии и аналитическим описанием ряда автоволновых и стационарных типов решений, посвящены работы [3-8]. В [8-11] разрабатывались методы оптимального управления ФДУ диффузии, в которых в качестве управляющего воздействия выступало преобразование одномерного пространственного аргумента. Вместе с тем большой интерес представляет исследование возможностей оптимизации двумерного преобразования аргументов, позволяющей наиболее полно использовать преимущества двумерного светового сигнала. В частности, весьма актуально управление локализованными структурами, находящими применение в задачах хранения и обработки оптической информации.

В настоящей работе рассматриваются особенности оптимизации двумерного преобразования $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x})) : \overline{\Omega} \to R^2$ пространственных аргументов искомой функции в ФДУ диффузии

$$\partial_t u + u - D\Delta u = F_{\mathbf{g}}(u) \tag{1}$$

совместно с периодическими граничными и начальным условиями

$$u \,|_{x_j=0} = u \,|_{x_j=2\pi}, \quad u_{x_j} \,|_{x_j=0} = u_{x_j} \,|_{x_j=2\pi}, \quad j = 1,2, \tag{2}$$

$$u \,|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Здесь $u = u(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, $\Delta = \partial^2_{x_1x_1} + \partial^2_{x_2x_2}$, $D > 0$. Правая часть (1) задается суперпозицией $u(\mathbf{x},t)$ с ограниченной вместе со второй производной функцией

$$F(s) \in C^2(\overline{R}) \tag{4}$$

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 01-01-00639) и AFOSR (грант CRDF#RP0-1391-MO-03).

и преобразованием аргументов $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ в виде функционала (см. также [6,8])

$$\langle F_{\mathbf{g}}(u), \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{g}^{-1}(\overline{\Omega})} F(u(\mathbf{x},t)) \quad \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \quad d\mathbf{x}, \tag{5}$$

определенного на пространстве непрерывных пробных функций $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, где $\mathbf{g}^{-1}(\overline{\Omega})$ - полный прообраз множества $\overline{\Omega}$. Здесь и ниже угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в зависимости от контекста означают либо действие функционала на пробной функции, либо скалярное произведение $\langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{j=1,2} f_j(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}) \quad d\mathbf{x}$, где $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}))$.

Целью оптимизации является приближение состояния $u = u(\mathbf{x}, t; \mathbf{g})$ системы (1)-(5) к заданному распределению $u_1(\mathbf{x}, t)$ за счет соответствующего выбора преобразования $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Качество оптимизации будем оценивать с помощью интегрального функционала

$$J(\mathbf{g}) = \int\limits_{Q_T} \rho(\mathbf{x},t) \mid u(\mathbf{x},t;\mathbf{g}) - u_1(\mathbf{x},t) \mid^2 d\mathbf{x}dt, \quad Q_T = \overline{\Omega} \times [0,T], \tag{6}$$

где непрерывная в Q_T весовая функция $\rho(\mathbf{x}, t)$, $0 \le \rho \le 1$, регулирует степень приближения к цели в различных точках пространства и времени. Ставится задача минимизации функционала $J(\mathbf{g})$ на допустимом множестве G измеримых по Лебегу преобразований, удовлетворяющих поточечным ограничениям:

$$J(\mathbf{g}) \to \inf_G,$$

$$G = \{\mathbf{g} \in L_2(\Omega): \ \mathbf{g}(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\Omega}\}. \tag{7}$$

Заметим, что при $\mathbf{g} \in G$ справедливо $\mathbf{g}^{-1}(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$, так что в (5) интеграл берется по всему множеству $\overline{\Omega}$.

2. Формула приращения функционала

Для численного построения минимизирующей последовательности преобразований в задаче (1)-(7) воспользуемся вариационным подходом, основанным на выделении главной линейной части приращения функционала $J(\mathbf{g})$. Обозначим через $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ решение так называемой сопряженной задачи

$$-\partial_t \psi + \psi - D\Delta\psi = 2\rho(u - u_1) + F'(u)\psi(\mathbf{g}(\mathbf{x}), t), \tag{8}$$

$$\psi\mid_{x_j=0} = \psi\mid_{x_j=2\pi}, \quad \psi_{x_j}\mid_{x_j=0} = \psi_{x_j}\mid_{x_j=2\pi}, \quad j = 1,2, \tag{9}$$

$$\psi \big|_{t=T} = 0. \tag{10}$$

Заметим, что в отличие от (1) в правой части (8) искомая функция стоит в суперпозиции с преобразованием $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ в классическом смысле. Кроме того, преобразование $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ неявно входит в (8) через решение $u = u(\mathbf{x}, t; \mathbf{g})$ задачи (1)-(5).

Дадим приращение $\mathbf{h}$ преобразованию $\mathbf{g} \in G$ так, чтобы $\mathbf{g} + \mathbf{h} \in G$ и обозначим через $v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t; \mathbf{g} + \mathbf{h}) - u(\mathbf{x}, t; \mathbf{g})$ соответствующее приращение решения задачи (1)-(5). В силу (1)-(5) функция v является решением начально-краевой задачи

$$\partial_t v + v - D\Delta v = F_{\mathbf{g}+\mathbf{h}}(u + v) - F_{\mathbf{g}}(u), \tag{11}$$

$$v \big|_{x_j=0} = v \big|_{x_j=2\pi}, \quad v_{x_j} \big|_{x_j=0} = v_{x_j} \big|_{x_j=2\pi}, \quad j = 1,2, \tag{12}$$

$$v \big|_{t=0} = 0. \tag{13}$$

Учитывая, что в определении правой части (11) с помощью функционала (5) справедливо равенство $\mathbf{g}^{-1}(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$, и беря в качестве пробной функции решение $\psi(\mathbf{x}, t)$ задачи (8)-(10), приходим к интегральному аналогу (11)-(13)

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} \left(-v\partial_t \psi + v\psi + D\nabla v \nabla \psi\right) d\mathbf{x}\,dt = \\ = \int\limits_{Q_T} \left(F(u + v)\psi(\mathbf{g} + \mathbf{h}, t) - F(u)\psi(\mathbf{g}, t)\right) d\mathbf{x}\,dt\end{gathered}, \tag{14}$$

где ∇ – обозначение градиента по переменным x_1, x_2. Соответствующее интегральное соотношение для сопряженной функции ψ получается после умножения (8) на $v(\mathbf{x}, t)$ и интегрирования по частям с учетом (9):

$$\int\limits_{Q_T} \left(-\partial_t \psi v + \psi v + D\nabla \psi \nabla v - 2\rho(u - u_1)v - F'(u)\psi(\mathbf{g}(\mathbf{x}), t)v\right) d\mathbf{x}\,dt = 0. \tag{15}$$

В силу (6) приращение функционала $\delta J = J(\mathbf{g} + \mathbf{h}) - J(\mathbf{g})$ имеет вид

$$\delta J(\mathbf{g}) = \int\limits_{Q_T} 2\rho(u - u_1)v \quad d\mathbf{x}\,dt + \int\limits_{Q_T} \rho \mid v \mid^2 d\mathbf{x}\,dt. \tag{16}$$

Преобразуя (16) с помощью (15) и (14), имеем

$$\delta J(\mathbf{g}) = \int\limits_{Q_T} \big(F(u+v)\psi(\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{h}(\mathbf{x}),t) - F(u)\psi(\mathbf{g}(\mathbf{x}),t) - F'(u)\psi(\mathbf{g}(\mathbf{x}),t)v \big)\, d\mathbf{x}dt +$$

$$+\int\limits_{Q_T} \rho \mid v \mid^2 d\mathbf{x}dt = \int\limits_{Q_T} F(u(\mathbf{x},t))\nabla \quad \psi(\mathbf{g}(\mathbf{x}),t)\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad d\mathbf{x}dt + R,$$

где $R = R_1 + R_2$, $R_1 = \int\limits_{Q_T} \rho \mid v \mid^2 d\mathbf{x}dt$,

$$R_2 = \int\limits_{Q_T} \big(F(u+v)\psi(\mathbf{g}+\mathbf{h},t) - F(u)\psi(\mathbf{g},t) - F'(u)\psi(\mathbf{g},t)v - F(u)\nabla\psi(\mathbf{g},t)\mathbf{h} \big) d\mathbf{x}dt$$

Учитывая, что остаток R имеет относительно приращения $\mathbf{h}$ порядок выше первого, приходим к выражению для линейной части приращения $\delta J(\mathbf{g})$ в виде скалярного произведения $\langle \mathbf{J}'(\mathbf{g}), \mathbf{h} \rangle$ приращения $\mathbf{h}$ с элементом

$$\mathbf{J}'(\mathbf{g}) = \int\limits_0^T F(u(\mathbf{x},t;\mathbf{g}))\nabla \quad \psi(\mathbf{g}(\mathbf{x}),t)dt, \qquad (17)$$

имеющим смысл градиента функционала $J(\mathbf{g})$ на преобразовании $\mathbf{g} \in G$.

Отметим, что строгое обоснование формулы градиента функционала, выходящее за рамки данной работы, подразумевает вывод оценки остаточного члена, требующий детального изучения гладкости обобщённых решений прямой и сопряженной задач. В пространственно-однородном случае соответствующие рассмотрения проведены в [8] на языке пространств Соболева целых порядков гладкости. В двумерном случае обобщённое решение принадлежит пространству типа Соболева дробных порядков гладкости [6], а линейная часть приращения функционала выражается в терминах квазидифференциала [10].

3. Проекционно-разностная аппроксимация прямой и сопряженной задач

Выбор способа конечномерной аппроксимации задач (1)-(5) и (8)-(10) диктуется спецификой задания соответствующих функциональных членов в уравнениях (1) и (8), которая состоит в следующем.

1. Действия преобразования $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ задается в специальном обобщенном виде (5), требующем соответствующей сеточной интерпретации.
2. Значение преобразованного аргумента $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ в (8) может не совпадать с узлами сетки, и, следовательно, необходима интерполяция.

3. Решение $u(\mathbf{x},t)$ исходной задачи даже в случае гладкого преобразования (например, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 \in \Omega$ – фокусировка в точку) может не обладать высокой гладкостью.

В пространственно-одномерном случае в [11-12] предложен проекционный по $\mathbf{x}$ способ аппроксимации ФДУ вида (1), позволяющий естественным образом преодолеть указанные трудности. Ниже мы приводим его двумерную модификацию и применение к оптимизационной задаче (7).

Введем на $\overline{\Omega}$ сетку $\omega_h = \omega_{h_1} \times \omega_{h_2}$, $\omega_{h_j} = \{x_{j,n_j} = n_j h_j,\ \ n_j = 0,1,\ldots,N_j\}$ с шагами $h_j = 2\pi/N_j$, $N_j > 0$ – четные числа, $j = 1,2\,; \omega_\tau = \left\{t_m = m\tau, m = 0,1,\ldots,M\right\}$ – сетка на $[0,T]$ с шагом $\tau = T/M$. Введем пространство $S_1 = Lin\left\{\varphi_{i,j}(\mathbf{x})\right\}$ кусочно-линейных функций $\varphi_{i,j}(\mathbf{x}) = \varphi_i(x_1)\cdot\varphi_j(x_2)$, построенных на основе сплайнов первого порядка $\varphi_n(x_j) = \varphi_0(x_j - nh_j)$, $\varphi_N(x_j) = \varphi_0(x_j) + \varphi_0(x_j - 2\pi)$, $\varphi_0(x_j) = \max\left\{0,\ 1 - |\,x_j\,|\,h_j^{-1}\right\}$, $n = 1,\ldots,N_j - 1$, $j = 1,\ 2$. Отметим, что в определении пространства S_1 учитывается условие периодичности по x_1, x_2 в ослабленном виде, без следов производной на границе, поскольку последние, вообще говоря, не существуют даже для решений из энергетического класса.

Обозначив $S = \underbrace{S_1 \times S_1 \times S_1 \times \ldots \times S_1}_{M+1\,раз}$, сопоставим исходной задаче (1)-(5) при $\mathbf{g} \in G$ интегральное тождество для функции $w = (w^0,\ldots,w^M) \in S$

$$\begin{gathered}\left\langle \tau^{-1}(w^m - w^{m-1}),\varphi\right\rangle + \left\langle w^m,\varphi\right\rangle + D\left\langle\nabla w^m,\nabla\varphi\right\rangle = \left\langle F(w^m),\varphi(g)\right\rangle, \\ m = 1,\ldots,M,\ \forall\varphi \in S_1\end{gathered}\quad, \qquad (18)$$

где w^0 – некоторая аппроксимация u_0, например, $w^0 = \sum_{ij} w^0_{i,j}\varphi_{i,j}(\mathbf{x})$, $w^0_{i,j} = (h_1 h_2)^{-1}\left\langle w^0,\varphi_{i,j}\right\rangle$.

Отметим, что уравнения (18) представляют собой проекционный по переменной $\mathbf{x}$ и разностный по переменной t аналог задачи (1)-(5), т.е. являются проекционно-разностной схемой (ПРС) аппроксимации (1)-(5). ПРС (18) можно также записать в операторном виде

$$((1+\tau)B + \tau\ D\Lambda)w^m = \tau\ \Phi(w^m) + Bw^{m-1},\ m = 1,\ldots,M, \qquad (19)$$

где $\Lambda = B_2\Lambda_1 + B_1\Lambda_2$, $B = B_1 B_2$, $B_l = E - h^2\Lambda_l/6$, E – единичный оператор, $(\Lambda_l f)_i = -\frac{1}{h_l^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$, $f_{N_l+1} = f_1$, $f_{N_l} = f_0$, $i = 0,...,N_l - 1$, $l = 1,2$.

ПРС (19) является нелинейной относительно текущего расчетного слоя, для её численной реализации используются итерации: s-е приближение $w^{(s)}$ для w^m находится с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье из линейного уравнения

$$((1+\tau)B + \tau\ D\Lambda)w^{(s)} = \tau\ \Phi(w^{(s-1)}) + Bw^{m-1},$$

$$s = 1,2...,\ w^{(0)} \equiv w^{m-1}. \qquad (20)$$

Содержащие преобразование аргументов элементы матрицы $\Phi(w^m)$ вычисляются по формуле

$$\Phi_{k,l}(f) = \frac{1}{h_1 h_2}\int\limits_{\Omega} F(f(\mathbf{x}))\quad \varphi_{k,l}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\quad d\mathbf{x}\ ,\qquad f \in S_1. \qquad (21)$$

Отметим, что даже в случае непрерывного преобразования $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ простейшая формула прямоугольников для аппроксимации интеграла (21) приводит к сумме вида

$$\Phi_{k,l} = \sum_{m,n=1}^{N_1,N_2} F(f(x_1^m, x_2^n))\varphi_{k,l}(\mathbf{g}(x_1^m, x_2^n)), \qquad (22)$$

прямое вычисление которой весьма трудоемко. Существенная экономия действий достигается за счет финитности носителя $\varphi_{k,l}$. Действительно, в силу соотношения

$$\mathrm{supp}\quad \varphi_{k,l} \equiv (x_1^{k-1}, x_1^{k+1}) \times (x_2^{l-1}, x_2^{l+1}) = \Omega_{k,l},$$

$$k = 1,...,N_1 - 1,\ \ l = 1,...,N_2 - 1,$$

суммирование в (22) достаточно проводить только по тем индексам (m,n), для которых

$$\mathbf{g}(x_1^m, x_2^n) \in \Omega_{k,l}. \qquad (23)$$

Кроме того, поскольку преобразование $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ одно и тоже в пределах одного шага оптимизации, то целесообразно вычислять остающийся неизменным коэффициент $\varphi_{k,l}(\mathbf{g}(x_1^m, x_2^n))$, одновременно производя перебор вида (23). Соответствующую информацию о прообразах $\mathbf{g}^{-1}(\varphi_{k,l}(\overline{\Omega}))$ удобно хранить в массиве указателей на список структур типа fiGArray (см. рис. 1). В описании этой структуры

```
struct fiGArray
{
  double value;
  struct fiGArray* next;
   int m, n;
},
```

поля содержат следующие данные:

`value` – значение сплайна на преобразованных координатах, т.е. $\varphi_{k,l}(\mathbf{g}(x_1^m, x_2^n))$;

`next` – указатель на следующий элемент списка;

`m, n` – номер узла до преобразования.

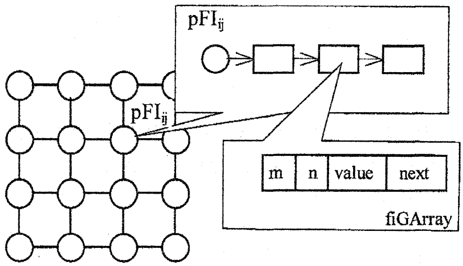


Рис. 1. Каждый элемент массива pFI является указателем на список из структур fiGArray.

Сопряженная задача (8)-(10) аппроксимируется линейной ПРС относительно $\xi \in S$:

$$-\left\langle \tau^{-1}(\xi^m - \xi^{m-1}), \varphi \right\rangle + \left\langle \xi^{m-1}, \varphi \right\rangle + D\left\langle \nabla\xi^{m-1}, \nabla\varphi \right\rangle =$$
$$= 2\left\langle \rho(t_m)(w^m - u_1(t_m)), \varphi \right\rangle + \left\langle F'(w^{m-1})\xi^m(g), \varphi \right\rangle,$$
$$\forall\varphi \in S_1, \ \ \xi^M = 0. \qquad (24)$$

ПРС (24) эквивалентна операторному уравнению

$$((1+\tau)B + \tau D\Lambda)\xi^{m-1} = f^m, \qquad (25)$$

которое в отличие от (20) решается по убывающим индексам *m=M,M-1,...,1* . Здесь

$$f^m = B(2\tau\rho(t_m)(w^m - u_1^m) + \xi^m) + \Psi^m,$$

где Ψ^m – аналогичная (22) аппроксимация слагаемого $\left\langle F'(w^{m-1})\xi^m(\mathbf{g}),\varphi\right\rangle$ при $\varphi = \varphi_{i,j}(\mathrm{x})$. Для ее реализации существенно используется информация о взаимном соответствии прообраза точек и носителей базисных сплайнов, построенном на этапе решения прямой задачи и хранящимся в структуре fiGArray.

4. Использование метода проекции градиента для оптимизации преобразования аргументов

Зная главную линейную часть приращения функционала $J(\mathbf{g})$, заданную формулой (17), сформируем итерационную последовательность $\mathbf{g}^k \in S_1$, осуществляющую движение по антиградиенту и использующую аппроксимации (18)-(21) и (24)-(25)

$$\mathbf{g}^{k+1} = P_\Omega(\mathbf{g}^k - \alpha_k \mathbf{J}'_k). \tag{26}$$

Здесь $\mathbf{J}'_k = \int\limits_0^T F(w(\mathrm{x},t;\mathbf{g}^k)) \quad \nabla\xi(\mathbf{g}^k(\mathrm{x}),t) \quad dt$, $\quad w(\mathrm{x},t;\mathbf{g}^k)$ – решение ПРС (18) для текущего преобразования $\mathbf{g} = \mathbf{g}^k$, ξ – решение сопряженной ПРС (24) с $w = w(\mathrm{x},t;\mathbf{g}^k)$, P_Ω – оператор проектирования на $\overline{\Omega}$, осуществляющий периодическую нарезку значений, выходящих за пределы $\overline{\Omega}$. Последовательность $\{\alpha_k\}$ шагов в (26) определялась методом дробления, исходя из условия строгого убывания функционала на каждом шаге $J(\mathbf{g}^{k+1})<J(\mathbf{g}^k)$. Другие способы выбора $\{\alpha_k\}$ можно найти, например, в [13].

Рассмотрим результаты численной оптимизации на двух примерах. В первом примере решалась задача компенсации фазовых искажений, вносимых в пространственно-неоднородный по аргументу x_1 входной фазовый профиль

$$u_0(x_1,x_2) = 2 + 0.3\Big(\exp\big(-15(x_1 - \pi)^2\big) + \exp\Big(-15(x_1 - \pi/3)^2\Big) + \\ + \exp\Big(-15(x_1 - 5\pi/3)^2\Big)\Big)$$

контуром обратной связи оптической системы (интерферометра) с нелинейностью вида

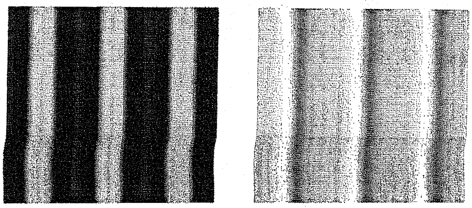
$$F(u) = K(1 + \gamma\cos u), \tag{27}$$

где K – коэффициент, пропорциональный интенсивности входного поля, γ - видность интерференционной картины ([2]). В проведенных расчетах параметры нелинейности (27) и уравнения (1) брались в виде $K = 3.6$, $\gamma = 1$, $D = 0.07$. Требовалось найти преобразование аргументов $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, обеспечивающее минимальное отклонение фазового профиля $u = u(\mathbf{x},t)$ от его начального (при $t = 0$) распределения $u_0(\mathbf{x})$ на всем отрезке времени $t \in [0,T]$ для значения $T = 3$. Данная постановка формулируется в виде задачи минимизации функционала (6) со стационарным целевым профилем $u_1(\mathbf{x},t) \equiv u_0(\mathbf{x})$. Весовая функция в (6) имела вид

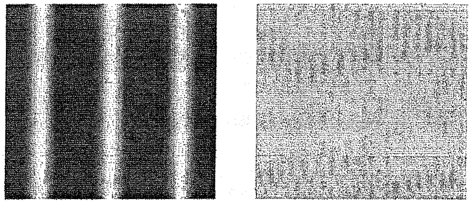
$$\rho(\mathbf{x},t) = \exp\left(1 - T^2\left(T^2 - (t-T)^2\right)^{-1}\right), \tag{28}$$

учитывающий более весомый вклад в значение функционала финального участка траектории по сравнению с ее начальной частью. В качестве начального приближения управления в градиентном методе (26) бралось тождественное преобразование $\mathbf{g}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. При этом решение к финальному моменту времени становилось пространственно-однородным со значением функционала $J(\mathbf{g}^0) = 0.79$.

В результате двух шагов градиентного метода (26) значение функционала уменьшилось до величины $J(\mathbf{g}^2) = 0.30$, т.е. более чем в 2.5 раза. На рис. 2а и 2б представлены профили целевой функции и полученного оптимизированного решения, их сечения приведены на рис. 3а. Видно, что в процессе оптимизации удалось в значительной мере отразить основные особенности целевой функции. При этом была замечена определенная симметрия, присущая задаче оптимизации: если начальное приближение преобразования не отличается от тождественного по переменной x_2, и целевой профиль не зависит от этой переменной, то и решение сопряженной задачи (а значит и градиент функционала) также не зависят от x_2. Поэтому градиентная процедура (26) генерирует последовательность преобразований аргументов, у которых первая компонента $g_1(\mathbf{x})$ отвечает за пространственную неоднородность целевого профиля, а вторая компонента не изменяется, $g_2(\mathbf{x}) \equiv x_2$. Профили отклонений от тождественного преобразования $\mathbf{g}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ соответствующих компонент $g_1(\mathbf{x})$ и $g_2(\mathbf{x})$ второй итерации преобразования аргументов $\mathbf{g}^2(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$ приведены на рис. 2в и 2г, сечение $g_1(\mathbf{x})$ изображено на рис. 3б.



а. Фазовый профиль $u(\mathbf{x},T)$. в. Профиль $g_1(\mathbf{x})$-x_1.



б. Целевой профиль $u_1(\mathbf{x},T)$. г. Профиль $g_2(\mathbf{x})$-x_2.

Рис. 2. Результаты оптимизации в задаче компенсации фазовых искажений.

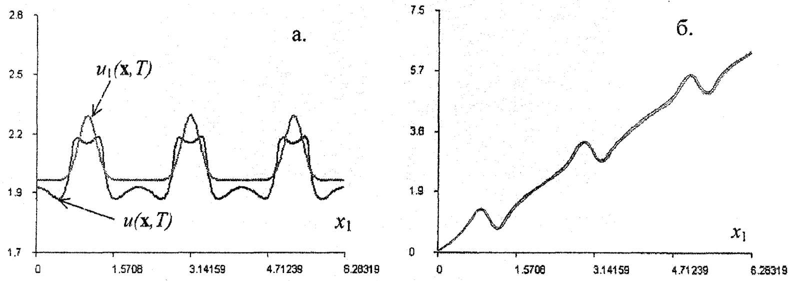
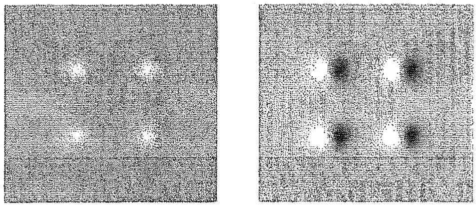


Рис. 3. Сечения $x_2 = const$: а – $u(\mathbf{x},T)$ и $u_1(\mathbf{x},T)$ из рис. 2а, 2б, б – компонента $g_1(\mathbf{x})$ оптимизированного преобразования.

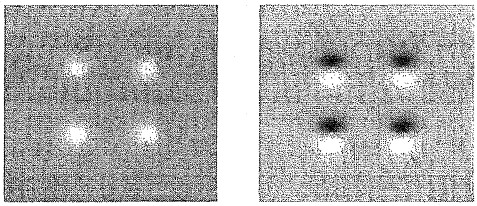
Во втором примере целью управления являлся перевод системы (1)-(5), (27) из первоначального пространственно-однородного фазового профиля $u(\mathbf{x}, t = 0) = u_0(\mathbf{x}) = 2$ с постоянной для каждой точки $\mathbf{x}$ скоростью в финальное при $T = 2$ состояние, задаваемое фазовым профилем с четырьмя локализованными пиками (см. рис. 4). В соответствующем функционале (6) весовая функция имеет вид (28), целевая состояние задается формулой

$$u_1(x_1,x_2) = 2 + t\cdot\Big(\exp\Big(-9(x_1-2\pi/3)^2 - 9(x_2-2\pi/3)^2\Big) +$$
$$+\exp\Big(-9(x_1-4\pi/3)^2 - 9(x_2-2\pi/3)^2\Big)\Big) +$$
$$+t\cdot\Big(\exp\Big(-9(x_1-2\pi/3)^2 - 9(x_2-4\pi/3)^2\Big) +$$
$$+\exp\Big(-9(x_1-4\pi/3)^2 - 9(x_2-4\pi/3)^2\Big)\Big).$$

В случае тождественного преобразования $\mathbf{g}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ решение задачи (1)-(3) оставалось пространственно-однородным на всем отрезке времени $t\in[0,T]$, что привело к значению функционала $J(\mathbf{g}^0) = 1.63$ (значения параметров задачи $K = 4.3$, $\gamma = 1$, $D = 0.07$). В результате пяти шагов градиентного метода (26) функционал уменьшился до значения $J(\mathbf{g}^5) = 0.37$, т.е. более, чем в 4 раза. Оптимизированный профиль решения $u(\mathbf{x},T)$ находится в хорошем соответствии с целевым профилем $u_1(\mathbf{x},T)$ (см. рис. 4а, 4б). Отклонения полученных компонент $g_1(\mathbf{x})$ и $g_2(\mathbf{x})$ преобразования $\mathbf{g}^5(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$ приведены на рис. 4в, 4г. Видно, что сечения профиля $g_1(\mathbf{x})$ по x_1 и $g_2(\mathbf{x})$ по x_2 в пиках локализации имеют вид, аналогичный изображенному на рис. 3.



а. Фазовый профиль $u(\mathbf{x},T)$. в. Профиль $g_1(\mathbf{x})$-x_1.



а. Целевой профиль $u_1(\mathbf{x},T)$. в. Профиль $g_2(\mathbf{x})$-x_2.

Рис. 4. Результаты оптимизации для двумерной локализованной целевой функции.

На основе проведенных расчетов можно сделать следующие выводы об особенностях формирования локализованных решений с помощью управления преобразованием пространственных аргументов:

1. Локализованные структуры могут быть получены с помощью преобразований аргументов, не являющихся обратимыми в окрестности каждого пика локализации. Аналогичный вывод в пространственно-одномерном случае был ранее сделан в [9].
2. Если начальное и целевое состояния системы не зависят от одной из переменных, то и соответствующая компонента оптимизированного преобразования может быть взята тождественной по этой переменной.
3. Одновременная локализация по двум переменным приводит к оптимизированному преобразованию, у которого каждая компонента в значительной мере отвечает за локализацию именно по «своей» переменной.

Литература

1. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1989.
2. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., Larichev A.V., Zheleznykh N.I. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // J. Opt. Soc. Amer. B. 1992. Vol. 9, № 1, pp.78-90.
3. Разгулин А.В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33, № 1. С. 69-80.
4. Razgulin A.V. Rotational multi-petal waves in optical systems with 2-D feedback // Chaos in Optics. Proceedings SPIE. 1993. Vol. 2039, pp. 342-352.
5. Skubachevskii A.L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear analysis: theory, methods and applications. 1998. Vol. 32, № 2, pp. 261-278.

6. Разгулин А.В. Об одном классе функционально-дифференциальных параболических уравнений нелинейной оптики // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 3. С. 400-407.
7. Чушкин В.А., Разгулин А.В. Стационарные структуры в уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // Вестник московского ун-та. Сер. 15, Вычислит. матем. и киберн. 2003, № 2.
8. Потапов М.М. Уравнения нелинейной оптики с преобразованиями пространственной независимой переменной в роли управляющих воздействий // Вестник московского ун-та. Сер. 15, Вычислит. матем. и киберн. 1997, № 3. С. 13-16.
9. Razgulin A.V. Localized and periodic patterns in nonlinear optical system with controlled transforms of spatial arguments // Nonlinear Optical Phenomena in Information Technologies. Proceedings SPIE. 1998. Vol. 3733, pp. 211-217.
10. Razgulin A.V. Control of 2D argument transforms in parabolic functional-differential equation // International Conference Dedicated to the 90^{th} Anniversary of L.S. Pontryagin. Optimal Control and Appendices. Moscow. 1998, pp. 165-167.
11. Разгулин А.В. Аппроксимация задачи управления преобразованием аргументов в нелинейном параболическом уравнении // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, № 12. С. 1844-1856.
12. Разгулин А.В., Роганович И.Б. О сходимости проекционно-разностной схемы для нелинейного параболического уравнения с преобразованием пространственного аргумента // Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМиК МГУ. 2000, № 6. С. 84-94.
13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 2001.