Разгулин А. В.

О зависимости решений нелинейного уравнения типа Шредингера от параметров диссипации

1. Введение.

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного уравнения типа Шредингера относительно комплекснозначной функции $E = E(x,z)$:

$$\partial_z E + i\Delta E + i\alpha|E|^p E + \beta|E|^q E = 0, \quad z > 0, \tag{1}$$

$$E|_{z=0} = E_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad E|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, Ω - область в R^2 с границей $\partial\Omega$ класса C^2, вещественные коэффициенты α, β, p, q подчинены ограничениям $q > p \geq 0$, $\beta > 0$. Уравнение (1) используется, например, в нелинейной оптике (см. [1] и др.) для моделирования процесса самовоздействия (самофокусировка при $\alpha > 0$, самодефокусировка при $\alpha < 0$) световых пучков; слагаемое $\beta|E|^q E$ при $\beta > 0$ описывает диссипацию энергии. Отметим, что в [2] доказано существование и единственность решения задачи (1)-(2) при $\beta > 0$ в классе $E(z) \in L^\infty(0,Z;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\partial_z E(z) \in L^\infty(0,Z;L^2(\Omega))$ на произвольном отрезке $[0,Z]$, $Z > 0$. В случае $\beta = 0$ (нет диссипации) решение существует, вообще говоря, лишь локально, продолжается на максимальный полуинтервал $[0, z_{\max})$, $z_{\max} < +\infty$ и неограниченно при $z \to z_{\max}$ в некоторой норме (см. подробнее [3]). Таким образом, можно говорить об ухудшении свойств решения задачи (1)-(2) при $\beta \to 0$; результаты численного исследования зависимости решений от параметров α и β приведены в [4].

В настоящей работе исследуются вопросы поведения решения задачи (1)-(2) при $\beta \to 0$ и его близости к решению вырожденного уравнения ($\beta = 0$). Получены оценки соболевских норм решения задачи (1)-(2) через параметры диссипации β и q. Показано, что условие согласования $q(\beta) = p + \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, обеспечивает равномерную по β ограниченность этих норм при $\beta \to 0$. В случае $\alpha \leq 0$ и фиксированного q установлена равномерная по β ограниченность решений задачи (1)-(2) на некотором отрезке $[0; z_0]$ и их сходимость при $\beta \to 0$ к решению вырожденной задачи ($\beta = 0$) в норме $C([0,Z]; L^2(\Omega))$ для $Z < \min\{z_0; z_{\max}\}$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения.

При $r \geq 1$ обозначим через $L^r(\Omega)$ комплекснозначное пространство Лебега со стандартной нормой $\|\cdot\|_{L^r(\Omega)}$; H - гильбертово пространство $L^2(\Omega)$ со стандартным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и соответствующей евклидовой нормой $\|\cdot\|$; $H^s(\Omega)$ - пространства Соболева целого порядка $s=1,2$, $H_0^1(\Omega)$ - замкнутое подпространство функций из $H^1(\Omega)$, следы которых на $\partial\Omega$ равны нулю, $H^{-1}(\Omega)=(H_0^1(\Omega))^*$, где * - значок двойственного пространства. $C([0,Z];B)$ (соответственно $L^s(0,Z;B)$, $1\le s\le+\infty$)- банахово пространство сильно непрерывных (соответственно измеримых по Бохнеру) функций со значениями в банаховом пространстве B с нормой $\|f\|_{C([0,Z];B)}=\max\limits_{0\le z\le Z}\|f(z)\|_B$ (соответственно $\|f\|_{L^s(0,Z;B)}=\left(\int\limits_0^Z\|f(z)\|_B^s dz\right)^{1/s}$, $1\le s<+\infty$, $\|f\|_{L^\infty(0,Z;B)}=\operatorname*{esssup}\limits_{0<z<Z}\|f(z)\|_B$). Символом Δ обозначен оператор Лапласа $\Delta=\partial_{xx}^2+\partial_{yy}^2$ в H с областью определения $V=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, а также его различные самосопряженные расширения:

$$\Delta\in L(V\to H)\cap L(H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega))\cap L(H\to V^*). \tag{3}$$

При этом $\|\cdot\|_V=\|\Delta(\cdot)\|$ - одна из эквивалентных норм в V. Производная $\partial_z E$ понимается в смысле распределений из $D'(0,Z;V)$: $\int\limits_0^Z\partial_z E(z)\varphi(z)dz=-\int\limits_0^Z E(z)\varphi'(z)dz$ в пространстве V для любой бесконечно гладкой финитной на $(0,Z)$ функции $\varphi(z)$.

Лемма 1. Пусть при $p\ge0, q\ge0$ функция $E(z)$ определена на некотором отрезке $[0,z_0]$, $z_0>0$, удовлетворяет включениям

$$E(z)\in L^\infty(0,z_0;V),\quad \partial_z E(z)\in L^\infty(0,z_0;H) \tag{4}$$

и является решением задачи (1)-(2). Тогда

$$E(z)\in C([0,z_0];V),\quad \partial_z E(z)\in C([0,z_0];H) \tag{5}$$

и справедливо энергетическое равенство для всех $z\in[0,z_0]$:

$$\|\partial_z E(z)\|^2=\|\partial_z E(0)\|^2-2\operatorname{Re}\int\limits_0^z\langle\partial_z F(E(\xi)),\partial_z E(\xi)\rangle d\xi, \tag{6}$$

где $F(E)=i\alpha|E|^pE+\beta|E|^qE$.

Доказательство. Обозначим $f(s,E)=|E|^sE,\ s\ge0$. При выполнении (4) нетрудно установить включение $f(s,E)\in L^\infty(0,z_0;H)$ и существование производной

$$\partial_z f(s,E)=|E|^s\partial_z E+s|E|^{s-2}E\operatorname{Re}(E^*\partial_z E)\in L^\infty(0,z_0;H). \tag{7}$$

Тогда уравнение (1) можно продифференцировать по z и получить выражение

$$\partial_{zz}^2 E(z)=-i\Delta\partial_z E-\partial_z F(E)\in L^\infty(0,z_0;V^*), \tag{8}$$

где последнее включение следует из (3) и (7).

Соотношения (4) и (8) позволяют на основе леммы 8.2 из [5, с. 308] сделать вывод о скалярной непрерывности решения:

$$E(z) \in C_s([0,z_0];V), \quad \partial_z E(z) \in C_s([0,z_0];H), \tag{9}$$

т.е. $E(z)$ и $\partial_z E(z)$ на самом деле определены при всех $z \in [0,z_0]$ (а не п.в., как это следует из (4)) как элементы V и H соответственно и непрерывно зависят от z в слабой топологии этих пространств.

Докажем равенство (6). Заметим, что в силу (7) и (9) каждое слагаемое в (6) имеет смысл, причем выражение для $\partial_z E(0)$ может быть получено в результате слабого в H предельного перехода при $z \to 0+0$ в уравнении (1):

$$\partial_z E(0) = -i\Delta E_0 - F(E_0) \in H.$$

В дальнейшем будем считать, что решение $E(z)$ продолжено на всю прямую $R = (-\infty;+\infty)$ (например, с помощью метода отражений из [5, п. 2.2]), финитна в R и удовлетворяет оценке

$$\|E\|_{L^2(R;V)} + \|\partial_z E\|_{L^2(R;H)} + \|\partial_{zz}^2 E\|_{L^2(R;V^*)} \le$$
$$\le C(\|E\|_{L^2(0,z_0;V)} + \|\partial_z E\|_{L^2(0,z_0;H)} + \|\partial_{zz}^2 E\|_{L^2(0,z_0;V^*)}),$$

где за продолженной функцией сохранено прежнее обозначение. Тогда справедливо равенство (см. подробнее [5, с. 310])

$$2\,\mathrm{Re}\langle(\rho_n * \rho_n * Q_0 \partial_z E)(z), \partial_z E(z)\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle(\rho_n * \rho_n * Q_0 \partial_z E)(0), \partial_z E(0)\rangle = I_n, \tag{10}$$

где $I_n = 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle(\rho_n * Q_0 \partial_{zz}^2 E)(\xi), (\rho_n * Q_0 \partial_z E)(\xi)\rangle d\xi$, а четное бесконечно гладкое ядро усреднения $\rho_n(\xi) \ge 0$ имеет носитель $\mathrm{supp}\,\rho_n = (-1/n, 1/n)$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(\xi)d\xi = 1$, $(\rho_n * f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(z-\xi)f(\xi)d\xi$, $Q_0(z)$ - характеристическая функция отрезка $[0,z]$, $0 < z \le z_0$. Аналогично [5, с. 311] доказывается поточечная сходимость первых двух слагаемых в (10) при $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} &2\,\mathrm{Re}\langle(\rho_n * \rho_n * Q_0 \partial_z E)(z), \partial_z E(z)\rangle \to \mathrm{Re}\langle\partial_z E(z), \partial_z E(z)\rangle = \|\partial_z E(z)\|^2, \\ &2\,\mathrm{Re}\langle(\rho_n * \rho_n * Q_0 \partial_z E)(0), \partial_z E(0)\rangle \to \|\partial_z E(0)\|^2, \quad 0 \le z \le z_0. \end{aligned} \tag{11}$$

В силу (8) выполнено равенство $\rho_n * Q_0 \partial_{zz}^2 E(z) = -i\Delta\rho_n * Q_0 \partial_z E - \rho_n * Q_0 \partial_z F(E)$, после подстановки которого в выражение для I_n, использования вещественности скалярного произведения $\langle\Delta(\rho_n * Q_0 \partial_z E)(\xi), (\rho_n * Q_0 \partial_z E)(\xi)\rangle$ и аппроксимационных свойств усреднений (см., например, [5, с. 24]) , получаем при $n \to +\infty$:

$$I_n = -2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle(\rho_n * Q_0\partial_z F(E))(\xi),(\rho_n * Q_0\partial_z E)(\xi)\right\rangle d\xi \to$$

$$\to -2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle Q_0\partial_z F(E(\xi)),Q_0\partial_z E(\xi)\right\rangle d\xi \equiv -2\,\mathrm{Re}\int_0^z\left\langle \partial_z F(E(\xi)),\partial_z E(\xi)\right\rangle d\xi.$$

Отсюда и из (10), (11) следует (6).

В силу (9) для доказательства включения $\partial_z E(z) \in C([0,z_0];H)$ достаточно установить сходимость нормы

$$\left\|\partial_z E(z_k) - \partial_z E(z)\right\| \to 0 \tag{12}$$

для произвольной последовательности $z_k \to z$, $z_k, z \in [0,z_0]$. В силу свойств гильбертовой нормы и (6) имеет место равенство

$$\left\|\partial_z E(z_k) - \partial_z E(z)\right\|^2 = \left\|\partial_z E(0)\right\|^2 + \left\|\partial_z E(z)\right\|^2 -$$
$$-2\,\mathrm{Re}\int_0^{z_k}\left\langle \partial_z F(E(\xi)),\partial_z E(\xi)\right\rangle d\xi - 2\,\mathrm{Re}\left\langle \partial_z E(z_k),\partial_z E(z)\right\rangle. \tag{13}$$

Благодаря абсолютной непрерывности интеграла Лебега, (9) и (6), последние два слагаемых в (13) стремятся при $z_k \to z$ к выражению $-\left\|\partial_z E(0)\right\|^2 - \left\|\partial_z E(z)\right\|^2$, и, следовательно, справедливо (12).

Докажем, что $E(z) \in C([0,z_0];V)$. Из определения нормы в V, (9) и уравнения (1) имеем:

$$\left\|E(z_k) - E(z)\right\|_V = \left\|\Delta(E(z_k) - E(z))\right\| \le \left\|\partial_z E(z_k) - \partial_z E(z)\right\| + \left\|F(E(z_k)) - F(E(z))\right\|.$$

Оценим разность нелинейных членов с помощью элементарного неравенства $\left||a|^s a - |b|^s b\right| \le C_1(|a|^s + |b|^s)|a-b|$ (например в [2] $C_1 = \frac{2s+3}{2}$), неравенства Гельдера, теоремы вложения $H_0^1(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ (см. [6, гл. 3]) для $s = 4, 4p, 4q$ и вытекающего из (4) свойства $E(z) \in C([0,z_0]; H_0^1(\Omega))$ (см., например, [5, теорема 3.1]) следующим образом

$$\left\||E(z_k)|^s E(z_k) - |E(z)|^s E(z)\right\| \le$$
$$\le C_1\left(\left\|E(z_k)\right\|^s_{L^{4s}(\Omega)} + \left\|E(z)\right\|^s_{L^{4s}(\Omega)}\right)\left\|E(z_k) - E(z)\right\|_{L^4(\Omega)} \le$$
$$\le C_2\left\|E\right\|^s_{C([0,z_0];H_0^1(\Omega))}\left\|E(z_k) - E(z)\right\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad s = p, q.$$

Поэтому норма $\left\|F(E(z_k)) - F(E(z))\right\|$ мажорируется стремящимся к нулю при $z_k \to z$ выражением

$C_3(\left\|E\right\|^p_{C([0,z_0];H_0^1(\Omega))} + \left\|E\right\|^q_{C([0,z_0];H_0^1(\Omega))})\left\|E(z_k) - E(z)\right\|_{H_0^1(\Omega)}$. Отсюда и из (12) следует искомое включение (5). Лемма 1 доказана.

3. Ограниченность решений при изменении параметров диссипации.

Теорема 1. Пусть $p \ge 0$ и выполнено условие согласования

$$q(\beta) = p + \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\max\{1; \ln\|E_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}}, \tag{14}$$

Тогда для любого $z_0 > 0$ существует единственное обобщенное решение $E(z)$ задачи (1)-(2) из класса (5), причем имеет место оценка

$$\|E\|_{C([0,z_0];H_0^1(\Omega))} + \|\partial_z E\|_{C([0,z_0];H)} \le M_0, \tag{15}$$

где M_0 не зависит от $\beta \in (0, \beta_1]$, $\quad 0 < \beta_1 < \min\{1; \exp\left(\frac{p-1}{\varepsilon}\right)\}$.

Доказательство. В условиях теоремы выполнено неравенство $q > p \ge 0$ и, следовательно, можно воспользоваться доказанной для этого случая в [2] теоремой существования глобального решения в классе (4). В силу леммы 1 такое решение принадлежит классу (5).

Получим оценки решения в норме $C([0,z_0]; H_0^1(\Omega))$. Умножим уравнение (1) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $-\Delta E(z)$, выделим вещественную часть и воспользуемся формулой $2\,\mathrm{Re}\langle \partial_z E(z), -\Delta E(z)\rangle = \partial_z \|E(z)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$. Имеем

$$\frac{1}{2}\partial_z \|E(z)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=1;2} \int_\Omega \left(\alpha \,\mathrm{Im}\, I_{p,j} - \beta \,\mathrm{Re}\, I_{q,j}\right) dx,$$

где $I_{s,j} = \partial_{x_j}(|E|^s E)\partial_{x_j}(E^*)$, $s = p,\ q$. В силу [2, лемма 1] справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\, I_{p,j} + c\,\mathrm{Im}\, I_{p,j} \ge 0 \tag{16}$$

п.в. в $\Omega \times (0, z_0)$ для всех c: $|c| \le c_p = \frac{2\sqrt{p+1}}{p}$. Тогда

$$|\mathrm{Im}\, I_{p,j}| \le \frac{p+1}{c_p}|E|^p |\partial_{x_j} E|^2, \quad -\mathrm{Re}\, I_{q,j} \le -|E|^q |\partial_{x_j} E|^2.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\partial_z \|E(z)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=1;2} \int_\Omega \varphi(|E(x,z)|)|\partial_{x_j} E(x,z)| dx, \tag{17}$$

где $\varphi(y) = \frac{|\alpha|(p+1)}{c_p} y^p - \beta y^q$. Нетрудно проверить, что

$$\sup_{y \ge 0} \varphi(y) \le M_*(\beta, q) = \frac{|\alpha|(p+1)}{c_p}\left(\frac{|\alpha|(p+1)p}{c_p \beta q}\right)^{\frac{p}{q-p}}. \tag{18}$$

Тогда из (17) вытекает дифференциальное неравенство $\partial_z \|E(z)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le 2M_*(\beta, q)\|E(z)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, следствием которого является оценка

$$\|E\|_{C([0,z_0];H_0^1(\Omega))} \le \|E_0\|_{H_0^1(\Omega)} \exp(M_*(\beta,q)z_0)\,. \qquad (19)$$

Получим оценку для производной $\partial_z E(z)$. Из доказанного в лемме 1 энергетического равенства (6) имеем:

$$\|\partial_z E(z)\|^2 = \|\partial_z E(0)\|^2 + 2\int_0^z \int_\Omega (\alpha \operatorname{Im} J_p - \beta \operatorname{Re} J_q)\,dx\,d\xi\,, \qquad (20)$$

где $J_s = \partial_z(|E|^s E)\partial_z E^*$, $s = p,q$. Воспользовавшись неравенством типа (16), аналогично выводу (17)-(19) из (20) получаем

$$\|\partial_z E\|_{C([0,z_0];H)} \le \|\partial_z E(0)\| \; \exp(M_*(\beta,q)z_0)\,. \qquad (21)$$

Убедимся, что при выполнении сформулированного в условии теоремы согласования параметров диссипации правые части в (19) и (21) ограничены равномерно по β. Обозначив для краткости $M = \dfrac{|\alpha|(p+1)p}{c_p}$, нетрудно провести следующие оценки:

$$M_*(\beta,q) = \frac{M}{p}\exp\left[p\left(\frac{\ln M}{\varepsilon \ln(1/\beta)} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\ln q}{\varepsilon \ln(1/\beta)}\right)\right] \le M_{**} = \frac{M}{p}\exp\left[p\left(\frac{|\ln M|}{\varepsilon \ln(1/\beta_1)} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right], \qquad (22)$$

где $0 < \beta \le \beta_1$, β_1 - фиксированное число, $0 < \beta_1 < \min\{1; \exp\left(\frac{p-1}{\varepsilon}\right)\}$. Зависящий от параметров диссипации множитель $\|\partial_z E(0)\|$ в (21) оценим из уравнения (1) при $z = 0$:

$$\|\partial_z E(0)\| = \|-i\Delta E_0 - F(E_0)\| \le \|\Delta E_0\| + |\alpha| \|E_0\|^{p+1}_{L^{2p+2}(\Omega)} + \beta \|E_0\|^{q+1}_{L^{2q+2}(\Omega)}\,.$$

При этом в силу имеющегося ограничения (14) справедливы оценки

$$\beta \|E_0\|^{q+1}_{L^{2q+2}(\Omega)} \le \beta \|E_0\|^{q+1}_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{1/2} = \beta^{1-\varepsilon \ln\|E_0\|_{L^\infty(\Omega)}} \|E_0\|^{p+1}_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \le \|E_0\|^{p+1}_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{1/2}\,.$$

Тогда

$$\|\partial_z E(0)\| \le \|\Delta E_0\| + (|\alpha|+1) \|E_0\|^{p+1}_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{1/2}\,, \qquad (23)$$

и после подстановки (22), (23) в (20), (21) приходим к оценке (15) с константой

$$M_0 = \left(\|E_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\Delta E_0\| + (|\alpha|+1)\|E_0\|^{p+1}_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{1/2}\right) \exp(M_{**}\, z_0)$$

для всех $\beta \in (0;\beta_1)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\alpha \le 0, p \ge 0, q > p, 0 < \beta \le \beta_0$, где β_0 - фиксированное положительное число. Тогда найдется такое $z_1 = z_1(\|E_0\|_V, \alpha, p, q, \beta_0)$, что на отрезке $[0; z_0]$, $z_0 < z_1$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(2) из класса (5), причем справедлива оценка

$$\|E\|_{C([0,z_0];V)} + \|\partial_z E\|_{C([0,z_0];H)} \le M_1. \qquad (24)$$

Доказательство. Существование решений в классе (5) следует из результатов [2] и леммы 1. Для вывода оценки (24) установим сначала равномерную по β ограниченность решений в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Для этого умножим уравнение (1) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $\partial_z E(z)$, выделим мнимую часть и воспользуемся формулами $2\mathrm{Re}\langle -\Delta E(z), \partial_z E(z)\rangle = \partial_z \|E(z)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ и $\left\langle |E(z)|^p, \mathrm{Re}(E(z)\partial_z E^*(z))\right\rangle = \frac{2}{p+2}\partial_z \|E(z)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}$. В результате приходим к тождеству

$$I_1(E(z)) = I_1(E_0) + 2\beta\int_0^z \mathrm{Im}\left\langle |E(\xi)|^q E(\xi), \partial_z E(\xi)\right\rangle d\xi, \tag{25}$$

где $I_1(E) = \|E\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{2\alpha}{p+2}\|E\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}$.

Имеет место неравенство

$$\mathrm{Im}\left\langle |E(\xi)|^q E(\xi), \partial_z E(\xi)\right\rangle \le 0. \tag{26}$$

Действительно, умножая уравнение (1) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $|E|^q E$ и выделяя мнимую часть, получаем

$$\mathrm{Im}\left\langle \partial_z E, |E|^q E\right\rangle - \mathrm{Re}\sum_{j=1;2}\left\langle \partial_{x_j} E, \partial_{x_j}(|E|^q E)\right\rangle + \alpha\|E\|^{p+q+2}_{L^{p+q+2}(\Omega)} = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись условием $\alpha \le 0$, равенством $\mathrm{Im}\langle a,b\rangle = -\mathrm{Im}\langle b,a\rangle$ и оценкой $\mathrm{Re}\left\langle \partial_{x_j} E, \partial_{x_j}(|E|^q E)\right\rangle \ge 0$, нетрудно вывести (26). Тогда из (25) и (26) следует оценка

$$\|E(z)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le I_1(E_0). \tag{27}$$

Переходя к выводу (24) воспользуемся равенством (6) из леммы 1. С помощью (7) и неравенства $\mathrm{Re}\left\langle \partial_z(|E|^q E), \partial_z E\right\rangle \ge 0$ получаем соотношение

$$\left\|\partial_z E(z)\right\|^2 \le \left\|\partial_z E(0)\right\|^2 + 2|\alpha| p\int_0^z \left\langle |E(\xi)|^p, |\partial_z E(\xi)|^2\right\rangle d\xi. \tag{28}$$

Из (1), (27) и теорем вложения Соболева $H^1(\Omega)\subset L^s(\Omega)$, $s = 2p+2, 2q+2$ (см. [6, гл. 3]), имеем

$$\begin{gathered}\|\Delta E(z)\| \le \left\|\partial_z E(z)\right\| + |\alpha|\|E(z)\|^{p+1}_{L^{2p+2}(\Omega)} + \beta\|E(z)\|^{q+1}_{L^{2q+2}(\Omega)} \le \left\|\partial_z E(z)\right\| + C_5,\\ C_5 = |\alpha| C_3^{p+1} I_1(E_0)^{(p+1)/2} + \beta_0 C_4^{q+1} I_1(E_0)^{(q+1)/2}.\end{gathered} \tag{29}$$

На основе мультипликативного неравенства $\|E(z)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_6\|E(z)\|^{1/3}\|\Delta E(z)\|^{2/3}$, справедливого для функций из V (см. [7]), с помощью (27) и (29) оценим скалярное произведение в (28)

$$\left|\left\langle |E(\xi)|^p, |\partial_z E(\xi)|^2 \right\rangle\right| \le \|E(\xi)\|^p_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_z E(\xi)\|^2 \le$$

$$\le C_6^p \|E(\xi)\|^{p/3} \|\Delta E(\xi)\|^{2p/3} \|\partial_z E(\xi)\|^2 \le C_7\left(1 + \|\partial_z E(\xi)\|^{2(1+p/3)}\right).$$

После подстановки в (28) с учетом ограниченности нормы $\|\partial_z E(0)\|$ при $\beta \in (0;\beta_0]$ получаем оценку

$$\|\partial_z E(z)\|^2 \le C_9 + C_8 \int_0^z \left(\|\partial_z E(\xi)\|^2\right)^{1+p/3} d\xi .$$

Отсюда и из известных результатов о нелинейных интегральных неравенствах (см., например, [8, гл. 2]) следует оценка

$$\|\partial_z E(z)\|^2 \le C_9 \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{-3/p}, \quad z_1 = \frac{3}{p\, C_8\, C_9^{p/3}}, \tag{30}$$

справедливая для всех $z \in [0; z_0]$, $z_0 < z_1$. Из (30) и (29) следует (24). Теорема доказана.

Замечание. Равномерная по β ограниченность решений в теоремах 1, 2 установлена при различных требованиях к параметрам диссипации. В теореме 1 стремление к нулю значения β “компенсируется” увеличением q; при этом решение остается ограниченным глобально, на произвольном конечном отрезке $[0; z_0]$. В теореме 2 значение q фиксировано, и, соответственно, равномерная по β ограниченность гарантируется локально по z, но в более сильной по сравнению с теоремой 1 норме.

4. Сходимость к решению вырожденной задачи.

Исследуем вопрос близости решения E исходной задачи и решения A следующей вырожденной задачи, формально полученной из (1) при $\beta = 0$ (т.е. нет диссипации)

$$\partial_z A + i\Delta A + i\alpha |A|^p A = 0, \quad A|_{\partial\Omega} = 0, \quad A|_{z=0} = E_0, \tag{31}$$

с тем же самым начальным условием E_0, что и в (2). Известно (см. подробнее [3]), что решение задачи (31) в классе (5) существует, вообще говоря, лишь локально и продолжается на максимальный полуинтервал $[0, z_{max})$, $z_{max} < +\infty$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $z_2 = \min\{z_1; z_{max}\}$. Тогда для любого фиксированного $Z \in [0, z_2)$ при $\beta \to 0$ справедлива оценка

$$\|E - A\|_{C([0,Z];H)} \le C_{10} \beta^{\frac{1}{2(q+2)}} . \tag{32}$$

Доказательство. В силу выбора Z из результатов [3] следует существование и единственность решения A задачи (31) из класса (5) на всем отрезке $[0; Z]$ и выполнение оценки

$$\|A\|_{C([0,Z];V)} + \|\partial_z A\|_{C([0,Z];H)} \le C_{11} . \tag{33}$$

Тогда для разности $v = E - A$ из (1) и (31) получаем задачу

$$\partial_z v + i\Delta v + i\alpha(|E|^p E - |A|^p A) + \beta |E|^q E = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{z=0} = 0. \qquad (34)$$

Умножая уравнение в (34) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $v(z)$ и выделяя действительную часть, имеем

$$\frac{1}{2}\partial_z \|v(z)\|^2 \le |\alpha| \left\langle \left| |E(z)|^p E(z) - |A(z)|^p A(z) \right|, |v(z)| \right\rangle + \beta \left\langle |E(z)|^{q+1}, |v(z)| \right\rangle = R_1 + R_2. \; (35)$$

Оценивая в выражении R_1 разность нелинейных членов подобно лемме 1, получаем

$$R_1 \le |\alpha| C_1 \left\langle |E(z)|^p + |A(z)|^p, |v(z)|^2 \right\rangle \le |\alpha| C_1 \left(\|E(z)\|^p_{L^\infty(\Omega)} + \|A(z)\|^p_{L^\infty(\Omega)} \right) \|v(z)\|^2 \le C_{11} \|v(z)\|^2,$$

где последнее неравенство следует из теоремы вложения $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ (см., например, [5, гл. 1, п. 9.4]) и оценок (24), (33). Аналогичные соображения используются для оценки R_2:

$$R_2 = \beta \left\langle |E(z)|^{q+1}, |v(z)| \right\rangle \le \beta \|E(z)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} \left(\|E(z)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|A(z)\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \le C_{12} \beta \|E(z)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}.$$

Подставляя оценки для R_1 и R_2 в (35) и интегрируя полученный результат по $[0;z]$, $z \in [0, Z]$, с учетом начального условия в (34) имеем:

$$\|v(z)\|^2 \le 2C_{11} \int_0^z \|v(\xi)\|^2 d\xi + 2C_{12}\beta \int_{\Omega\times(0,Z)} |E(x,\xi)|^{q+1} dx d\xi. \qquad (36)$$

Для оценки последнего интеграла в (36) применим неравенство Гельдера с показателями $\frac{q+2}{q+1}$ и $q+2$:

$$\beta \int_{\Omega\times(0,Z)} |E(x,\xi)|^{q+1} dx d\xi \le \beta \left(\int_{\Omega\times(0,Z)} |E(x,\xi)|^{q+2} dx d\xi \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \left(|\Omega| Z \right)^{\frac{1}{q+2}} =$$

$$= C_{13} \beta^{\frac{1}{q+2}} \left(\beta \int_{\Omega\times(0,Z)} |E(x,\xi)|^{q+2} dx d\xi \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \le C_{13} \beta^{\frac{1}{q+2}} \left(0.5 \|E_0\|^2 \right)^{\frac{q+1}{q+2}}.$$

Здесь при выводе последнего неравенства использовалось тождество $\|E(z)\|^2 + 2\beta \int_0^z \|E(\xi)\|^{q+2}_{L^{q+2}(\Omega)} d\xi = \|E_0\|^2$, которое получается после умножения (1) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $E(z)$ и выделения действительной части. После подстановки полученных оценок в (36) и применения неравенства Гронуолла приходим к утверждению теоремы.

Литература.

1. Луговой В.И., Прохоров А.М. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде // Успехи физич. наук., 1973, т. 111, вып. 2, с. 203-247.

2. Владимиров М.В. Разрешимость смешанной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера // Математ. сборник, 1986, т. 130(172), № 4(8), с. 520-536.

3. Насибов Ш.М. Об устойчивости, разрушении, затухании и самоканализации решений одного нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН СССР, 1985, т. 285, № 4, с. 807-811.

4. Владимиров М.В., Жилейкин Я.М. Распространение оптических пучков в нелинейных слабопоглощающих средах // В сб. Современные проблемы математического моделирования .-М., Изд-во Моск. ун-та, 1984, с. 144-151.

5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.: Мир, 1971.

6. Бесов О.В., *Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций* и теоремы вложения. - М.: Наука, 1996.

7. Иванаускас Ф.Ф. Мультипликативная оценка нормы функции в C через нормы L^2, W_2^n и сходимость разностных методов для нелинейных эволюционных уравнений // Литовский математ. сборник., 1991, т. 31, № 2, с. 311-322.

8. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1976.