

# Министерство образования и науки Российской Федерации

УДК  
ГРНТИ  
Инв. №

|   |
|---|
| <b>УТВЕРЖДЕНО:</b>  |
| Исполнитель:<br>Государственное учебно-научное учреждение<br>Факультет вычислительной математики и<br>кибернетики Московского государственного<br>университета имени М.В.Ломоносова |
| От имени Руководителя организации   |
| _____/_____/_____<br>М.П.   |

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ

о выполнении 1 этапа Государственного контракта  
№ 14.740.11.0996 от 23 мая 2011 г.

|   |
|---|
| Исполнитель: Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова   |
| Программа (мероприятие): Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., в рамках реализации мероприятия № 1.2.2 Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук. |
| Проект: Математические методы анализа и обработки стохастических изображений.   |
| Руководитель проекта:<br>_____/Шестаков Олег Владимирович<br>(подпись)  |

Москва  
2011 г.

**СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ**  
по Государственному контракту 14.740.11.0996 от 23 мая 2011 на выполнение  
поисковых научно-исследовательских работ для государственных нужд

Организация-Исполнитель: Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Руководитель темы:

кандидат физико-математических наук, доцент \_\_\_\_\_ Шестаков О. В.  
подпись, дата

Исполнители темы:

кандидат физико-математических наук, без ученого звания \_\_\_\_\_ Мизотин М. М.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Насонов А. В.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Сорокин Д. В.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Черноморец А. А.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Семашко А. С.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Сторожилова М. В.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Сергеев В. В.  
подпись, дата

кандидат физико-  
математических наук, без  
ученого звания

\_\_\_\_\_ Кудрявцев А. А.  
подпись, дата

без ученой степени, без  
ученого звания

\_\_\_\_\_ Садовой И. А.  
подпись, дата

без ученой степени, без  
ученого звания

\_\_\_\_\_ Кузнецова М. Г.  
подпись, дата

## Реферат

Отчет 76 с., 1 ч., 1 рис., 0 табл., 55 источн., 0 прил.

стохастические изображения , линейный однородный фильтр ,  
подавление шума , регуляризирующие методы

В отчете представлены результаты исследований, выполненных по 1 этапу Государственного контракта № 14.740.11.0996 "Математические методы анализа и обработки стохастических изображений." (шифр "2011-1.2.2-111-001") от 23 мая 2011 по направлению "Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук в следующих областях:- математика;- механика" в рамках мероприятия 1.2.2 "Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук.", мероприятия 1.2 "Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук и кандидатов наук" , направления 1 "Стимулирование закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий." федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы.

Цель работы - на первом этапе является составление аналитического обзора, выбор и обоснование оптимального варианта направления исследований, составление плана проведения экспериментальных и теоретических исследований, а также проведение экспериментальных и теоретических исследований: теоретического и вычислительного анализа, необходимого для построения методов обработки и анализа стохастических сигналов и изображений, а также разработка методов построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный фильтр.

При выполнении работ по первому этапу государственного контракта для решения поставленных задач были применены методы вейвлет- и вейглет-анализа, методы пороговой обработки, а также различные методы математической статистики для построения оценок параметров.

Для выполнения работ первого этапа были использованы материалы электронных библиотек издательств, подписка на которые осуществляется через РФФИ. Для проведения вычислительных экспериментов задействована вычислительная и программная база кафедры математической статистики и лаборатории математических методов обработки изображений факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Материалы теоретических исследований, раскрывающие содержание работ по решению поставленных научно-исследовательских задач, включая:  
-аналитический обзор;  
-новые постановки задач анализа и обработки стохастических сигналов и изображений;

-методы построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный фильтр.

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Введение.....   | 7  |
| Проведение I этапа исследований по проблеме «Математические методы анализа и обработки стохастических изображений» .....  | 11 |
| 1 Подготовка аналитического обзора, выбор и обоснование оптимального направления исследований при разработке методов анализа и обработки стохастических сигналов и изображений, рассматриваемых в проекте ..... | 11 |
| 2 Разработка плана проведения теоретических исследований и вычислительных экспериментов на ЭВМ .....  | 46 |
| 3 Методы построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный оператор.....  | 50 |
| 4 Заключение .....  | 71 |
| Список использованных источников .....  | 73 |

## Введение

### *Актуальность выполнения проекта*

В настоящее время методы анализа и обработки стохастических сигналов и изображений и сигналов активно применяются и широко используются в различных научных исследованиях и при решении разнообразных прикладных задач.

В то же время, актуальным является разработка адаптивных методов обработки и анализа изображений и сигналов, позволяющих эффективно настраивать параметры методов на основе характеристик входных изображений и сигналов.

Планируемые исследования включают наряду с разработкой методов решения актуальных общих теоретических задач решение ряда актуальных конкретных задач создания алгоритмов для современных информационных технологий. Они включают практические задачи реконструкции и анализа изображений, стохастических сигналов и данных, полученных после прохождения через линейный однородный преобразователь в условиях наличия шума.

При построении методов анализа и обработки стохастических сигналов и изображений крайне важной является разработка не только самих методов, но также задача подавления шума и оценка качества результатов.

Задача оценки качества изображений является принципиальной важной для методов восстановления изображений по проекционным данным. Для борьбы с зашумленностью исходных данных широко применяются методы линейной регуляризации и нелинейной пороговой обработки. Планируемые к разработке методы будут адаптироваться к свойствам сигнала и свойствам преобразователя, через который проходит сигнал. Эти методы будут применены в актуальных задачах, таких как реконструкции радиолокационных, а также термо- и опто-акустических томографических

изображений, а также в задаче суперразрешения изображений и задаче измерения поверхностного натяжения жидкости по изображению капли.

Разработка предлагаемых методов является одной из необходимых составляющих широкого класса исследований, направленных на развитие прикладной математики.

### ***Цели и задачи***

Методы анализа и обработки стохастических сигналов и изображений представляют собой интенсивно развивающуюся область прикладной математики. Это направление является крайне наукоемким, при решении задач такого класса используются методы различных наук, таких как математика, информатика, физика и радиотехника. Примерами этого служит использование методов анализа и обработки стохастических сигналов и изображений при анализе радиолокационных изображений и восстановлении стохастических термо- и опто-акустических изображений. Важными практическими задачами, решаемыми с помощью этих методов, являются сжатие сигналов и изображений, подавление шумов (случайных и неслучайных) с целью улучшения их качества и получение временной и частотной информации о сигнале или изображении.

Важными практическими задачами, решаемыми с помощью этих методов, являются сжатие сигналов и изображений, подавление шумов (случайных и неслучайных) с целью улучшения их качества и получение временной и частотной информации о сигнале или изображении.

Исследования направлены на решение принципиально важных задач построения методов обработки и анализа стохастических изображений и сигналов и характеризуются, в том числе, следующим:

- Разрабатываемые алгоритмы будут основаны на совместном использовании методов, обычно применяемых только в отдельных областях прикладной математики и информационных технологий.



Примерами этого будет использование методов обработки и анализа томографических и радиолокационных изображений.

- Разработка общих подходов к созданию регуляризирующих алгоритмов решения некорректных задач, возникающих при решении обратных задач и задач обработки изображений и сигналов, будет стимулировать как изучение общих принципов построения регуляризирующих операторов, так и учет специфики задачи при создании конкретного метода обработки и анализа изображений и сигналов.
- Полученные результаты будут иметь существенное значение для развития теоретических аспектов проблем обработки стохастических изображений и сигналов, а также разработки практических алгоритмов обработки и анализа изображений и сигналов.

Существенным аспектом научной значимости предлагаемых исследований является то, что разработанные методы и алгоритмы могут быть использованы во многих других направлениях науки, техники, медицины. В частности, задачи подавления шума являются принципиально важными для обработки аудиосигналов, снимков, обработки данных видеонаблюдения, обработки и анализ медицинских изображений, повышения качества радиосигналов и ряда других задач. Алгоритмы сжатия сигналов и изображений позволяют эффективно использовать каналы передачи данных и экономить место на носителях информации. Извлечение локальной частотной и временной информации о сигнале или изображении позволяет решать практические задачи автоматического обнаружения объектов (например, в радиолокации или системах видеонаблюдения).

### ***Ожидаемые результаты***

На первом этапе будут получены следующие результаты:

- Аналитический обзор.

- Новые постановки задач анализа и обработки стохастических сигналов и изображений.
- Методы построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный фильтр.

На втором этапе будут получены следующие результаты:

- Методы восстановления вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам сферических преобразований Радона.
- Метод регуляризации для реконструкции и оценки погрешностей при наличии шума.
- Устойчивый метод определения поверхностного натяжения жидкости методом лежащей капли.

На третьем этапе будут получены следующие результаты:

- Методы улучшения качества сигналов и изображений, основанные на нелинейной пороговой обработке вейвлет-коэффициентов.
- Методы обработки и анализа изображений и сигналов, использующие разреженное представление.
- Методы обработки и анализа изображений и сигналов, использующие системы ортогональных многочленов.

На четвертом этапе будут получены следующие результаты:

- Методы построения оценок погрешностей при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов.
- Метод повышения качества изображений на основе метода статистической дифференциации и вариационного метода суперразрешения изображений.

# **Проведение I этапа исследований по проблеме «Математические методы анализа и обработки стохастических изображений»**

## **1 Подготовка аналитического обзора, выбор и обоснование оптимального направления исследований при разработке методов анализа и обработки стохастических сигналов и изображений, рассматриваемых в проекте**

Обработка стохастических изображений является быстро развивающейся областью обработки сигналов, которая уже прочно обосновалась во множестве практических применений. Особенно хорошим примером этого являются сложные устройства для обработки медицинских изображений, которые стали жизненно важными инструментами в диагностике заболеваний. Существует и множество других мультимедийных приложений стохастической обработки изображений. В частности, данные методы включают в себя восстановление изображений, сегментацию и выделение признаков.

Одной из общих проблем в стохастической обработке изображений является построение правильной модели, которая будет точно описывать изображение, позволяя легко манипулировать данными с минимальной вычислительной сложностью.

В рамках данной НИР рассматриваются различные практические задачи, возникающие при обработке стохастических изображений и стохастические методы обработки изображений и сигналов. При этом в разрабатываемых методах широко используется аппарат представления сигнала в виде разложения по некоторому базису. В частности, в данной НИР используются вейвлет-разложения, базисы ортогональных многочленов и другие.

Как уже было сказано выше, одной из типичных задач обработки стохастических изображений является восстановление сигнала, например очистка от шума. Для решения данной задачи будет рассмотрен метод пороговой обработки вейвлет коэффициентов, позволяющий получить регуляризованное решение в рамках стохастической модели.

Также рассматриваются методы, основанные на разреженном представлении сигнала. Разреженное представление является мощным аппаратом обработки и анализа сигналов. Одно из основных достоинств этого подхода — возможность построения модели сигнала непосредственно в процессе решения задачи, с помощью большого набора образцов. Это может быть очень полезно в случае, когда построение *правильной* модели напрямую затруднительно.

Основная идея разреженного представления состоит в представлении сигнала в виде линейной комбинации небольшого числа *атомов*. При этом, атомы выбираются из так называемого переопределенного словаря (базиса), то есть, размерность которого превышает размерность исходного пространства сигналов, в результате чего возможно представление сигнала множеством различных способов. При использовании разреженного представления решаются одновременно две задачи: построение наиболее представительного набора атомов для данной модели сигнала и представление исходного сигнала в виде линейной комбинации наименьшего числа атомов.

### ***1.1 Методы пороговой обработки***

Методы пороговой обработки занимают особое место в задачах обработки и анализа различных сигналов, таких как звук, изображения, экспериментальные данные различных измерительных приборов и прочих. Основой методов пороговой обработки является представление исходного сигнала в подходящем базисе и последующее удаление коэффициентов разложения, имеющих маленькое абсолютное значение. Как правило, в

качестве такого базиса выбирается некоторый вейвлет-базис. Такое представление позволяет получить основную информацию о рассматриваемом сигнале в компактной форме, что позволяет естественным образом создавать адаптивные методы их обработки и анализа.

В развитии методов пороговой обработки можно выделить два основных направления: построение и математическое обоснование новых методов пороговой обработки для ранее не рассматривавшихся задач, и исследование и оптимизация уже имеющихся методов.

Одна из наиболее актуальных задач цифровой обработки сигналов - очистка сигнала от шума. Любой практический сигнал содержит не только полезную информацию, но и следы некоторых посторонних воздействий (помехи или шум). В большинстве случаев можно предположить, что помехи описываются моделью белого (гауссовского) шума, и информация о помехе содержится в высокочастотной области спектра сигнала, а полезная информация — в низкочастотной.

Для такой модели удаление шума при помощи вейвлет-преобразования выполняется по следующим этапам: разложение сигнала по базису вейвлетов, выбор порогового значения шума для каждого уровня разложения, пороговая фильтрация коэффициентов детализации и реконструкция сигнала.

Вейвлет-коэффициенты, значения которых меньше порога, приравниваются к нулю (режектируются) при реконструкции сигнала. Критерии выбора порогов могут быть различны. В общем случае пороги могут выбираться адаптивно на основе статистического анализа сигнала.

Принцип пороговой обработки вейвлет-коэффициентов может быть использован и для компрессии сигналов с потерями. Компрессия представляет собой метод аппроксимации сигнала. Со статистической точки зрения такая методика представляет собой непараметрическую оценку регрессионной модели сигнала с использованием ортогонального базиса.

Пусть  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  — ортонормированный базис гильбертова пространства  $H$ . Рассмотрим класс сигналов, которые разложимы по первым  $N$  векторам базиса.

Пусть  $f$  — сигнал длины  $N$ . Это значит, что данный сигнал  $f$  определяется набором чисел  $f[0], f[1], \dots, f[N-1]$ . Обозначим через  $W$  возникающие помехи или шум, которые являются реализацией некоторого случайного процесса, тогда искаженный сигнал будет определяться как

$$X = f + W.$$

Обозначим координаты  $N$ -мерных векторов  $X, f$  и  $W$  в базисе  $B = \{g_m\}_{0 \leq m < N}$  соответственно

$$X_B[m] = \langle X, g_m \rangle, f_B[m] = \langle f, g_m \rangle, W_B[m] = \langle W, g_m \rangle.$$

Скалярное произведение левой и правой частей равенства  $X = f + W$  с  $g_m$  дает

$$X_B[m] = f_B[m] + W_B[m], \quad m = 0, \dots, N-1.$$

Предположим, что  $W$  — гауссовский белый шум с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$ .

Рассмотрим оценки  $\hat{F}$  сигнала  $f$ , вычисленные с помощью диагонального оператора  $D$  в базисе  $B$ . Диагональный оператор оценивает каждую компоненту сигнала  $f_B[m]$  по соответствующей зашумленной компоненте  $X_B[m]$  с помощью функций  $d_m(x)$  :

$$\hat{F} = DX = \sum_{m=0}^{N-1} d_m(X_B[m]) g_m.$$

Запишем функции  $d_m$  в виде

$$d_m(X_B[m]) = a[m]X_B[m] \quad \text{ïðå } 0 \leq m < N,$$

где  $a[m]$  зависит от  $X_B[m]$ .

Обозначим через  $r(D, f)$  риск оценки  $\hat{F}$ , вычисляемый по формуле

$$r(D, f) = E \| f - \hat{F} \|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} E |f_B[m] - a[m]X_B[m]|^2.$$

Так как  $X_B[m] = f_B[m] + W_B[m]$ ,  $EW_B[m] = 0$  и  $E|W_B[m]|^2 = \sigma^2$ , то

$$E|f_B[m] - a[m]X_B[m]|^2 = |f_B[m]|^2 (1 - a[m])^2 + \sigma^2 a[m]^2.$$

Для линейного оператора  $D$  (т.е. когда  $a[m]$  не зависит от  $X_B[m]$ ) это выражение принимает наименьшее значение при

$$a[m] = \frac{|f_B[m]|^2}{|f_B[m]|^2 + \sigma^2},$$

и минимальный риск равен

$$r_{inf}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|f_B[m]|^2 \sigma^2}{|f_B[m]|^2 + \sigma^2}.$$

В случае, когда  $D$  нелинейный, а коэффициенты  $a[m]$  принимают значения из множества  $\{0,1\}$ , минимум выражения  $r_{inf}(f)$  достигается при

$$a[m] = \begin{cases} 1, & \text{если } |f_B[m]| \geq \sigma \\ 0, & \text{если } |f_B[m]| < \sigma. \end{cases}$$

При этом минимальный риск равен

$$r_{inf}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_B[m]|^2, \sigma^2).$$

В обоих случаях оператор  $D$  не может использоваться практически, так как  $a[m]$  зависит от  $|f_B[m]|$ , значение которого не известно.

Функции  $d_m$  будем называть пороговыми, если обработка сигнала этими функциями зависит от сравнения амплитуды сигнала с некоторой константой (порогом).

Жесткой пороговой обработкой (с жестким порогом  $T$ ) называется процедура оценивания сигнала, при которой пороговые функции  $d_m$  определяются как

$$d_m(x) = d_T(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| > T \\ 0, & \text{если } |x| \leq T. \end{cases}$$

Риск жесткой пороговой обработки равен

$$r_t(f) = \sum_{m=0}^{N-1} E |f_B[m] - d_T(X_B[m])|^2,$$

где в силу того, что  $X_B[m] = f_B[m] + W_B[m]$ ,

$$|f_B[m] - d_T(X_B[m])|^2 = \begin{cases} |W_B[m]|^2, & \text{если } |X_B[m]| > T \\ |f_B[m]|^2, & \text{если } |X_B[m]| \leq T. \end{cases}$$

Следовательно,

$$r_t(f) \geq r_{inf}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_B[m]|^2, \sigma^2).$$

Мягкой пороговой обработкой (с мягким порогом  $T$ ) называется процедура оценивания сигнала, при которой пороговые функции  $d_m$  определяются как

$$d_m(x) = d_T(x) = \begin{cases} x - T, & \text{если } x > T \\ x + T, & \text{если } x < -T \\ 0, & \text{если } |x| \leq T. \end{cases}$$

Введем функцию

$$r(\lambda, \mu) = E\{|(X - \lambda \operatorname{sign}(X))1_{|X|>\lambda} - \mu|^2\},$$

где  $X$  - нормально распределенная случайная величина со средним значением  $\mu$  и дисперсией 1, а  $1_A$  - индикатор события  $A$ .

Так как  $f_B[m]$  - константа, то зашумленные компоненты сигнала  $X_B[m] = f_B[m] + W_B[m]$  являются гауссовскими случайными величинами со средним значением  $f_B[m]$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Следовательно, риск мягкой пороговой оценки  $\hat{F}$  с порогом  $T$  определяется формулой

$$r_t(f) = \sigma^2 \sum_{m=0}^{N-1} r\left(\frac{T}{\sigma}, \frac{f_B[m]}{\sigma}\right).$$

Отметим, что при мягкой пороговой обработке пороговые функции обладают свойством непрерывности, а при жесткой — пороговые функции



разрывны. Отсюда вытекают и различия в полученных восстановленных сигналах.

Так увеличение порога приводит к большей гладкости аппроксимации при обоих видах обработки: мягкой и жесткой, — однако в ряде случаев все же остаются видимые локальные осцилляции. Причем такой эффект менее заметен при использовании процедуры мягкой пороговой обработки.

Метод пороговой обработки, как показано в [6] и [10], является близким к оптимальному (в смысле минимизации риска) для широкого класса сигналов, зашумленных аддитивным гауссовским белым шумом.

Одним из важнейших показателей качества аудиоаппаратуры, в том числе и звуковых карт, является отношение сигнал/шум (ОСШ, англ. SNR, Signal-to-Noise Ratio). Эта величина равна отношению мощности полезного сигнала к мощности шума. Чем больше это отношение, тем менее заметен шум.

Если сигнал зашумлен аддитивным гауссовским белым шумом, то наилучший результат при получении оценки пикового отношения сигнал/шум восстановленного сигнала дает обработка с жестким порогом.

## **1.2 Методы выбора порога**

### **1.2.1 Универсальный порог**

В 1993 году Донохо (D. Donoho) и Джонстон (I. Johnstone) предложили использовать порог, основанный на следующих результатах.

Пусть случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение  $N(a, \sigma^2)$ , и  $m$  — медиана абсолютного отклонения  $\xi$  от ее математического ожидания, тогда

$$\frac{m}{\sigma} = C_{3/4},$$

где  $C_{3/4}$  — 3/4-квантиль стандартного нормального распределения.

Приближенное значение квантили  $C_{3/4}$  приведено в стандартных таблицах и обычно берется равным 0,6745. Квантиль  $C_{3/4}$  является медианой случайной величины  $|z|$ , где  $z : N(0,1)$ .

При наличии выборки устойчивой оценкой  $\hat{\sigma}$  стандартного отклонения  $\sigma$  в случае нормального распределения является (с некоторой погрешностью округления квантили  $C_{3/4}$ ) величина

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0,6745} MAD,$$

где MAD (Median Absolute Deviation) — выборочное медианное абсолютное отклонение (см. [7]).

Пусть  $z_1, \dots, z_n$  — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение и

$$A_n = \{ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| > \sqrt{2 \ln n} \},$$

тогда

$$\pi_n = P(A_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Более того, если

$$B_n(t) = \{ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| > t + \sqrt{2 \ln n} \},$$

то

$$P(B_n(t)) < e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Для нашей модели  $z_i : N(0, \sigma^2)$ , поэтому события  $A_n$  и  $B_n(t)$  будут иметь вид:

$$A_n = \{ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| > \sigma \sqrt{2 \ln n} \},$$

$$B_n(t) = \{ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| > \sigma t + \sigma \sqrt{2 \ln n} \}.$$

Локально энергия шума может быть сравнима и даже значительно превосходить энергию сигнала, поэтому, удалив шум при помощи высокого порога, мы потеряем полезную информацию. Напротив, низкий порог,

оставляя входной сигнал практически без изменения, не удаляет почти всегда присутствующие слабые искажения. В этом случае и истинные нулевые коэффициенты сигнала будут вычислены с некоторой погрешностью. Тем самым в обработанный сигнал вносятся артефакты.

Порог  $T = \sigma\sqrt{2\ln n}$  во многом решает эту проблему. Согласно лемме 3.2, с большой вероятностью происходит удаление основного шума, так как вероятность  $A_n$  стремится к нулю, а оставшийся шум в обработанном сигнале будет незначительным, так как вероятность события  $B_n$  экспоненциально убывает. Неизвестный параметр  $\sigma$  можно заменить его оценкой  $\hat{\sigma}$ .

Эти рассуждения объясняют выбор порога

$$T^U = \hat{\sigma}\sqrt{2\ln n},$$

названного универсальным.

При выборе универсального порога  $T^U$  риск и мягкой, и жесткой пороговой обработки близок к риску  $r_{inf}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_B[m]|^2, \sigma^2)$ :

Риск  $r_t(f)$  мягкой или жесткой пороговой оценки удовлетворяет при всех  $N \geq 4$  неравенству

$$r_t(f) \leq (2\ln N + 1)(\sigma^2 + r_{inf}(f)).$$

### 1.2.2 SURE-порог

Риск обработки сигнала можно уменьшить, выбирая изменяющийся адаптивный порог, т.е. зависящий от зашумленных данных  $X$ . Несмещенные оценки риска принято называть SURE-оценки, по аббревиатуре слов Stein Unbiased Risk Estimator. Порог, минимизирующий такую оценку при заданных зашумленных данных, также называют SURE-порогом.

Исследуем влияние порога на риск. Обозначим через  $r_t(f, T)$  риск мягкой пороговой обработки с порогом  $T$ , который зависит от неизвестных

значений  $f_B[m]$ , и через  $\hat{r}_i(f, T)$  — оценку этого риска, зависящую от наблюдаемых зашумленных данных  $X$ . Напомним, что

$$r_i(f, T) = \sum_{m=0}^{N-1} E |f_B[m] - d_T(X_B[m])|^2.$$

Как разумно определить  $\hat{r}_i(f, T)$ ? Рассмотрим коэффициенты разложения сигнала  $X$  по базису  $B$ . Заметим, что если  $|X_B[m]| \leq T$ , то  $d_T(X_B[m]) = 0$ , следовательно вклад в риск  $m$ -го слагаемого равен  $|f_B[m]|^2$ . Это число можно оценить разностью  $|X_B[m]|^2 - \sigma^2$ , так как

$$E |X_B[m]|^2 = |f_B[m]|^2 + E |W_B[m]|^2 = |f_B[m]|^2 + \sigma^2.$$

Если  $|X_B[m]| > T$ , то  $d_T(X_B[m]) = X_B[m] \pm T$  и вклад  $m$ -го слагаемого равен

$$E |X_B[m] - W_B[m] - X_B[m] \pm T|^2 = \sigma^2 + T^2.$$

Следовательно, риск мягкой пороговой обработки можно оценить следующим образом:

$$\hat{r}_i(f, T) = \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(|X_B[m]|^2),$$

где

$$\Phi(u) = \begin{cases} u - \sigma^2, & \text{если } u \leq T^2 \\ \sigma^2 + T^2, & \text{если } u > T^2. \end{cases}$$

Определенная выше оценка риска  $\hat{r}_i(f, T)$  является SURE-оценкой: при мягкой пороговой обработке оценка риска  $\hat{r}_i(f, T)$  не смещена, т.е.

$$E \hat{r}_i(f, T) = r_i(f, T).$$

Порог  $\hat{T}$ , минимизирующий SURE-оценку  $\hat{r}_i(f, T)$ , ищется эмпирически. Упорядочим координаты  $N$ -мерного сигнала  $X_B[m]$  по убыванию амплитуды, и обозначим через  $X_B^r[k]$   $k$ -ую координату пересортированного (ранжированного) вектора. Так, что  $|X_B^r[k]| \geq |X_B^r[k+1]|$  при  $1 \leq k < N$ .

Пусть  $l$  — такой индекс, что

$$|X_B^r[l]| \leq T < |X_B^r[l-1]|.$$

Тогда выражение  $\hat{r}_t(f, T)$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{r}_t(f, T) &= \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(|X_B^r[m]|^2) = \sum_{m=0}^{l-1} \Phi(|X_B^r[m]|^2) + \\ &+ \sum_{m=l}^{N-1} \Phi(|X_B^r[m]|^2) = \sum_{m=0}^{l-1} (\sigma^2 + T^2) + \sum_{m=l}^{N-1} (|X_B^r[m]|^2 - \sigma^2) = \\ &= \sum_{m=l}^{N-1} |X_B^r[m]|^2 - (N-l)\sigma^2 + l(\sigma^2 + T^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что оценка риска  $\hat{r}_t(f, T)$  при фиксированном  $l$  возрастает по  $T$ . Следовательно, взяв левый конец интервала из неравенства  $|X_B^r[l]| \leq T < |X_B^r[l-1]|$  за значение порога, т.е. положив  $T = |X_B^r[l]|$ , мы тем самым минимизируем  $\hat{r}_t(f, T)$ . Порог  $\hat{T}$ , минимизирующий  $\hat{r}_t(f, T)$  без ограничения  $|X_B^r[l]| \leq T < |X_B^r[l-1]|$ , ищется сравнением  $N$  значений выражения для  $\hat{r}_t(f, T)$  в точках  $T_m = |X_B^r[m]|, 0 \leq m \leq N-1$ , соответственно. То значение  $|X_B^r[m]|$ , на котором достигается минимум, принимается за  $\hat{T}$ .

Однако, так вычисленное значение порога не всегда хорошо для обработки сигнала. Если энергия сигнала мала относительно энергии шума, т.е.  $\|f\|^2 = E \|W\|^2 = N\sigma^2$ , то значение  $\hat{T}$  может быть очень маленьким, вследствие чего сигнал остается сильно зашумленным. В этом случае, чтобы удалить шум, выбирают универсальный порог  $T = \sigma\sqrt{2\ln N}$ .

Так как

$$E \|X\|^2 = \|f\|^2 + N\sigma^2,$$

то  $\|X\|^2 - N\sigma^2$  является несмещенной оценкой для энергии полезного сигнала  $\|f\|^2$ . Эта оценка энергии сигнала в дальнейшем сравнивается с величиной  $\varepsilon_N = \sigma^2 N^{1/2} (\ln N)^{3/2}$ , называемой уровнем минимума энергии (см. [5] и [10]). Если она меньше этого уровня, значит шум перекрывает сигнал, и

надо выбирать универсальный порог. Таким образом, порог определяется соотношениями

$$T = \begin{cases} \sigma\sqrt{2\ln N}, & \text{если } \|X\|^2 - N\sigma^2 \leq \varepsilon_N \\ \hat{T}, & \text{если } \|X\|^2 - N\sigma^2 > \varepsilon_N. \end{cases}$$

### 1.3 Пороговая обработка вейвлет-коэффициентов

Пороговая оценка сигнала в вейвлет-базисе  $W$  представима в виде:

$$\hat{F} = \sum_{m=0}^{2^L-1} d_T(\langle X, \phi_{L,m} \rangle) \phi_{L,m} + \sum_{j=L}^{J-1} \sum_{m=0}^{2^j-1} d_T(\langle X, \psi_{j,m} \rangle) \psi_{j,m},$$

где  $d_T$  — функция жесткой или мягкой пороговой обработки.

Пусть для каждого масштаба  $2^{-j}$  в некоторых точках  $b$  достигаются локальные максимумы вейвлет-преобразования  $|W_\psi f(2^{-j}, b)|$ . При вейвлет-анализе максимумы модуля вейвлет-преобразования указывают на большие значения  $|\langle X, \psi_{j,m} \rangle|$ , и тем самым на резкие изменения сигнала. Если можно восстановить сигнал по максимумам модуля вейвлет-преобразования, то можно убрать шум или ослабить какие-либо локальные особенности сигнала, обрабатывая эти максимумы. Уменьшив амплитуду максимума, можно сгладить особенности сигнала.

При пороговой обработке, если  $|\langle X, \psi_{j,m} \rangle| \leq T$ , то эти коэффициенты заменяются нулем. Тем самым производится адаптивное сглаживание сигнала. Там, где  $|\langle X, \psi_{j,m} \rangle| \leq T$ , коэффициенты  $|\langle f, \psi_{j,m} \rangle|$  малы, что означает локальную гладкость сигнала  $f$ . Обнуление таких  $|\langle X, \psi_{j,m} \rangle|$  эквивалентно локальному усреднению зашумленного сигнала  $X$ , а это осуществляется, только если в этом месте сигнал  $f$  достаточно гладкий.

Если порог  $T$  выше максимальной амплитуды коэффициентов шума  $|\langle W, \psi_{j,m} \rangle|$ , и если  $|\langle X, \psi_{j,m} \rangle| > T$ , то из равенства

$$|\langle X, \psi_{j,m} \rangle| = |\langle f, \psi_{j,m} \rangle + \langle W, \psi_{j,m} \rangle|$$

следует, что с большой вероятностью значение  $|\langle f, \psi_{j,m} \rangle|$  имеет, по крайней мере, порядок  $T$ . При мелких масштабах  $2^{-j}$  такие коэффициенты будут соответствовать точкам резких перепадов сигнала. Сохраняя эти коэффициенты, мы сохраняем особенности изменения сигнала.

При пороговой обработке вейвлет-коэффициентов сигнала важную роль играет выбор порога  $T$ . Эта задача является одной из самых сложных, поэтому методов пороговых обработок достаточно много. Широко используются такие методы, как VisuShrink, SureShrink, BayesShrink, cross-validation, "штрафной" метод Бирге-Массарта, эмпирические методы — equal balance sparsity norm, remove near 0 и их модификации (см. [3], [6], [14], [17], [18], [20]).

Краткая характеристика некоторых из них следующая. VisuShrink — метод мягкой пороговой обработки вейвлет-коэффициентов с использованием универсального порога. Идея метода SureShrink состоит в том, чтобы выбирать SURE-порог только для тех уровней детализации, на которых сигнал имеет значительное изменение, а на остальных уровнях выбирать универсальный порог. Метод BayesShrink использует мягкую пороговую обработку и подбирает порог, минимизирующий байесовский риск. Известно, что в этом случае порог  $T$ , близкий к оптимальному, вычисляется как  $T = \sigma^2 / \sigma_X^2$ , где  $\sigma^2$  — дисперсия шума (либо его устойчивая оценка, построенная по  $\hat{\sigma} = MAD/0,6745$ ), а  $\sigma_X^2$  — дисперсия сигнала.

Большим преимуществом пороговой обработки вейвлет-коэффициентов является то обстоятельство, что мы можем ограничивать уровень коэффициентов детализации. Порог можно устанавливать для коэффициентов каждого уровня отдельно. Это позволяет строить адаптивные к изменениям сигнала способы компрессии и очистки от шума.

## ***1.4 Использование вейвлет-разложения для анализа и обработки сигналов кардиограмм***

Как уже было отмечено, вейвлет-преобразование широко используется для очистки от шума и сжатия сигналов, изображений и мультимедиа-информации. Оно легло в основу международных стандартов по сжатию изображений MPEG-4, JPEG-2000, графических программных средств Corel, видеокодеров фирмы Analog Devices, стандарта ФБР по сжатию отпечатков пальцев.

Вейвлеты применяются для обнаружения сигнала на фоне помех и его распознавания, например, для обнаружения и распознавания подводных лодок и космических спутников. Поскольку вейвлет-преобразование сравнительно легко обобщается на пространства любой конечной размерности, оно может использоваться для анализа и распознавания многомерных образов.

В России и за рубежом широко применяют вейвлет-преобразование в кардиомедицине.

Так как электрокардиосигнал является нестационарным по своей природе, то для его распознавания и обнаружения ключевых диагностических признаков хорошо подходят методы вейвлет-анализа.

Электрокардиосигналы имеют сложные частотно-временные характеристики. Как правило, такие сигналы состоят из близких по времени, короткоживущих высокочастотных компонентов и долговременных, близких по частоте низкочастотных компонентов.

Для анализа электрокардиосигналов нужен метод, способный обеспечить хорошее разрешение и по частоте, и по времени. Первое требуется для выделения низкочастотных составляющих, второе — для локализации высокочастотных компонентов.

### **Турбулентный кровоток**

Известно, что турбулентность кровотока является причиной звуков, анализ которых может оказаться очень полезным для раннего выявления



сердечных аномалий. Важную информацию содержит и изменчивость частоты сердечных сокращений (Heart Rate Variability, HRV-сигнал). Перечислим основные особенности этого сигнала. Во временной области сигнал не является ни периодическим, ни полностью случайным. Временные ряды интервалов между сердечными сокращениями нестационарны и демонстрируют сложное поведение. Типичная особенность такого рода нестационарных сигналов — присутствие "рваных" структур, меняющихся со временем. Вид этих структур на ЭКГ изменяется при наличии сердечных аномалий. Вейвлеты, примененные для анализа изменчивости частоты сердечных сокращений позволяют выявлять аномальные структуры на кардиограммах.

В частотной области HRV-сигнал состоит в основном из трех спектральных пиков: высокочастотного (HF) пика вблизи 0,20 Гц, низкочастотного (LF) — около 0,1 Гц, и сверхнизкочастотного (VLF) пика — его спектральная амплитуда растет с убыванием частоты.

При анализе оцифрованный HRV-сигнал раскладывается по вейвлет-функциям на нескольких уровнях масштаба. На каждом уровне коэффициенты представляют собой детали, возникающие при переходе от одного масштаба к другому. Регрессионный анализ лог-лог-графиков (обе оси с логарифмическим масштабом) вариации вейвлет-коэффициентов в зависимости от масштаба указывает на то, что наклон этих графиков различен у здоровых людей и у людей с патологиями. Известно, что сигналы диастолического сердечного тона в норме более гладкие у здоровых людей, чем у больных. Кроме того, некоторые высокочастотные компоненты диастолического сердечного тона ассоциируются с наличием коронарной болезни сердца.

### **Выявление нерегулярных сердечных сокращений**

Вейвлеты стали применяться и для выявления эктопических сердечных сокращений. Эта техника основана на разложении ЭКГ в ряд по вейвлетам на разных масштабах. Аномальные сокращения обычно располагаются на

крупных (низкочастотных) масштабах, а нормальные структуры — на более мелких (высокочастотных) масштабах.

### Алгоритм обнаружения QRS-комплекса

Электрокардиограмма представляет собой запись электрических потенциалов активности сердца и состоит из последовательности кардиоциклов. В типичном кардиоцикле выделяют несколько элементов: P-волна, QRS-комплекс, T-волна и U-волна (см. [9]). Для диагностики ритма сердца отправной точкой является обнаружение QRS-комплекса (т.е. установление факта его наличия на анализируемом участке) и определение его характерных точек. Сам QRS-комплекс определяется позицией своего максимума - R-зубца.

Для определения положения QRS-комплекса можно использовать вейвлет Хаара  $\psi(t)$  с соответствующей масштабирующей функцией  $\phi(t)$ . Кардиосигнал  $f(t)$  раскладывается по ортонормированному базису

$$\psi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - n), \quad j, n \in \mathbb{Z},$$

в виде

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t).$$

Каждая внутренняя сумма

$$d_j(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t)$$

интерпретируется как детали сигнала на масштабе  $2^{-j}$ .

Рассмотрим проекцию кардиосигнала на пространство  $V_j$ , порождаемое ортонормированным базисом функций  $\phi_{j,n}$ , другими словами это приближение исходного сигнала кусочно-постоянной функцией на масштабе  $2^{-j}$ :

$$(P_j f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \phi_{j,n}(t).$$

Для проекций кардиосигнала на соседних масштабах справедливо соотношение

$$(P_{j+1}f)(t) = (P_j f)(t) + \sum_{n \in Z} d_{j,n} \psi_{j,n}(t),$$

где коэффициенты  $d_{j,n}$  — детали разложения сигнала (вейвлет-коэффициенты) на масштабе  $2^{-j}$ .

Кардиосигнал  $f$  можно приближенно представить в виде

$$f(t) \approx (P_j f)(t) = \sum_{n \in Z} c_{0,n} \phi_{0,n}(t) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n \in Z} d_{j,n} \psi_{j,n}(t)$$

для некоторого выбранного уровня  $J$ .

Алгоритм обнаружения QRS-комплекса состоит из следующих этапов (см. [9]):

1. Используя вейвлеты Хаара, вычислить дискретное вейвлет-преобразование кардиосигнала в  $2^M$  точках отсчета на  $J$  уровнях.

2. На каждом уровне  $j$  определить максимальный вейвлет-коэффициент. Обозначим его через  $D_j$ .

3. На каждом уровне  $j$  по вейвлет-коэффициентам отобрать точки, в которых происходят всплески, характеризующие QRS-комплекс, причем это может быть любой из QRS-комплексов на всем исследуемом промежутке времени.

Для этого требуется сравнить между собой  $|d_{j,n}|$  и  $\alpha_1 D_j$ , где параметр  $\alpha_1 = 0,5$ . Такое значение параметра  $\alpha_1$  определено эмпирическим путем.

Если

$$|d_{j,n}| > \alpha_1 D_j,$$

то  $n$ -ый отсчет принадлежит QRS-комплексу, иначе — не принадлежит.

4. Из всех точек QRS-комплекса, определенных в пункте 3, выбрать такие, которые образуют один и тот же QRS-комплекс.

С этой целью с параметрами  $\alpha_2 = 0,1$  и  $\Delta t = 0,0005$  сек., определенными эмпирическим путем, применить следующее правило: выбрать ближайшие по значению вейвлет-коэффициенты  $d_{j,n}$  и  $d_{j,m}$ , соответствующие отсчетам  $n$  и  $m$ , и если

$$2^{-j} \Delta t |n - m| < \alpha_2,$$

то  $n$ -ый и  $m$ -ый отсчеты принадлежат одному и тому же QRS-комплексу, иначе — разным.

5. Вычислить расстояние между соседними QRS-комплексами и определить число обнаруженных QRS-комплексов.

### **Анализ ритмограммы**

Алгоритм обнаружения QRS-комплексов используется для построения так называемой ритмограммы. Ритмограмма  $RR$ -интервалов как мера variability сердечного ритма (BCP) получила в последние годы достаточно широкое распространение в диагностике сердечно-сосудистых заболеваний (ССЗ) (см. [26] и [27]). (Под  $RR$  интервалами подразумеваются временные промежутки между пиками соседних  $R$ -зубцов.) Благодаря развитию компьютерной техники стал возможным анализ десятков тысяч записей и выявление общих закономерностей. В частности, оказалось, что существует зависимость между ССЗ и спектральными характеристиками ритмограммы.

Существует ряд рекомендаций относительно построения ритмограммы. Они устанавливают минимальную продолжительность измерений, при которой, во-первых, возможно вычислить спектр для определенного диапазона частот, и, во-вторых, спектральные характеристики будут постоянны [26]. Однако в ритмограмме обычно присутствуют так называемые эктопические импульсы - очень короткие или очень длинные интервалы между биениями. Обычно сначала идет короткий  $RR$  интервал, а сразу после него - длинный. Эти импульсы имеют иную природу, в отличие от нормальных (или, как их еще называют, синусовых) интервалов [28].

Наличие всего нескольких эктопических импульсов оказывает существенное влияние на спектр ритмограммы, поэтому обычно их стараются удалить. Стоит отметить, что ритмограмма относится к сигналам с неравномерным квантованием времени, так как длина отсчета времени равна длине очередного *RR* интервала. Это необходимо учитывать при вычислении спектральных характеристик.

Весьма популярный метод удаления эктопических импульсов состоит в следующем:

1. Удалить все интервалы, короче 300мс и длиннее 2000мс.
2. Удалить все интервалы, каждый из которых отличается от предыдущего более, чем на 200мс.
3. Удалить интервалы, отличающиеся по длине более чем на 20% от среднего значения, где среднее вычисляется по пяти предыдущим синусовым интервалам.

Критические значения вычислены по базе ЭКГ Массачусетского технологического института (MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database), насчитывающей десятки тысяч записей. Эти значения являются некоторым усреднением, и поэтому вполне может случиться так, что какие-то эктопические значения не будут отсеяны и останутся в сигнале. При таком подходе фактически не учитывается форма (структура) ритмограммы и индивидуальные особенности (амплитуда колебаний). В предлагаемом методе присутствует адаптация под конкретный сигнал.

Для сравнения методов обработки ритмограмм можно использовать как реальные данные, так и математическую модель. Хотя модель всегда является лишь приближением, она обычно обладает вполне определенными параметрами, что позволяет оценивать методы непосредственно по точности вычисления этих параметров.

На практике для спектрального анализа обычно используются ритмограммы двух типов: короткие (5 минут) и длинные (24 часа). Частотные характеристики пятиминутных ритмограмм можно считать постоянными при

выполнении ряда условий, тогда как измерения, полученные за 24 часа, таким свойством не обладают. При этом длинные записи несут более полную спектральную информацию. Далее будут рассматриваться только короткие ритмограммы.

При работе с пятиминутными ритмограммами выделяют 2 диапазона частот: диапазон высоких частот ВЧ (0,15 – 0,4 Гц) и диапазон низких частот НЧ (0,04 – 0,15 Гц). Анализ данных показал, что в этих диапазонах часто можно четко выделить два биоритма: волну Майера (Mayer wave) в НЧ области и дыхательную волну (Respiratory Sinus Arrhythmia wave) в ВЧ области. Волна Майера соответствует колебаниям кровяного давления, а дыхательная волна отражает влияние дыхания на сердечный ритм.

Таким образом, в спектре ритмограммы имеются два подъема с максимумами, по одному в НЧ и ВЧ диапазонах. Это наталкивает на мысль о представлении ритмограммы в виде суммы двух синусоид с круговыми частотами, соответствующими пикам спектра в НЧ и ВЧ областях. Таким образом, получаем представление:

$$RR(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \varepsilon(t) + C,$$

где

- $RR(t)$  - ритмограмма;
- $\omega_1 = 2\pi f_1$  и  $\omega_2 = 2\pi f_2$  — круговые частоты, соответствующие частотам  $f_1$  и  $f_2$ , где  $0,04 \text{ Гц} \leq f_1 \leq 0,15 \text{ Гц}$ ,  $0,15 \text{ Гц} < f_2 \leq 0,4 \text{ Гц}$ ;
- $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды, а  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — фазы синусоид;
- $\varepsilon(t)$  — шум, нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ ;
- $C$  — некоторая константа, выполняющая роль сдвига графика ритмограммы относительно нуля.

Время меняется дискретно:  $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_N | 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N\}$ . Следует отметить, что данная модель является весьма грубой, так как форма реальной ритмограммы несколько сложнее, чем сумма двух синусоид. Однако она

вполне достаточна, ведь стоит задача оценки амплитуды синусовой части ритмограммы, а синусовая часть является довольно «гладкой» в смысле малых изменений в соседних точках, в то время, как эктопические импульсы соответствуют скачкам на графике ритмограммы.

Идея предлагаемого метода состоит в следующем:

1. Оценить параметры  $\omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2, A_1$  и  $A_2$  по спектру с помощью робастного варианта регрессии.
2. Оценить  $\sigma^2$ .
3. Построить доверительные интервалы для разностей  $RR(t_i) - RR(t_{i-k}), i=1,2,\dots,N, 1 \leq k \leq i$  с уровнем доверия не ниже  $1 - \gamma$ . В качестве  $\gamma$  можно взять, например,  $\gamma = 0.05$ .
4. Отсеять импульсы, не попадающие в доверительные интервалы для разностей процесса  $RR(t)$ .

Для разностей гармонической части  $RR_h(t) \equiv A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$  будет выполнено:

$$\begin{aligned} |RR_h(t_{i+k}) - RR_h(t_i)| &\leq \\ &\leq 4A_1 \left| \sin\left(\frac{\omega_j(t_{i+k} - t_i)}{2}\right) \right| + 4A_2 \left| \sin\left(\frac{\omega_j(t_{i+k} - t_i)}{2}\right) \right| \equiv h_i^k. \end{aligned}$$

При построении доверительных интервалов предполагается, что дисперсия шума  $\sigma^2$  известна. Тогда нормальная случайная величина с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$  с вероятностью  $1 - \gamma$  попадает в интервал  $\left(\sigma\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \sigma\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\right)$ , где  $\Phi(x)$  суть функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Причем длина этого интервала минимальна среди всех интервалов  $I$  таких, что  $P(I) = 1 - \gamma$  ( $P$  - распределение стандартной нормальной случайной величины).

Доверительные интервалы для разностей  $RR(t)$  будут выглядеть так:

$$\left( -h_i^k + \sqrt{2}\sigma\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right), h_i^k + \sqrt{2}\sigma\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \right).$$

Однако  $\sigma$  необходимо оценить. Для этого можно использовать разности  $\Delta RR_i = RR(t_i) - RR(t_{i-1})$  функции  $RR(t)$ , исключив некоторым образом из этих разностей влияние полезного сигнала. Предлагается делать это в соответствии с моделью: в качестве шума рассматривать значения

$$r_i = \Delta RR_i - (RR_h(t_i) - RR_h(t_{i-1})).$$

Коэффициенты  $RR_h$  оцениваются методом робастной регрессии.

В качестве оценки для  $\sqrt{2}\sigma$  используем нормированное абсолютное медианное отклонение от медианы  $\sigma^*$ :

$$\sigma^* = \frac{\text{med } |r_i - \text{med } r_i|}{\Phi^{-1}(3/4)}.$$

Эта оценка является наиболее робастной, ее пороговая точка (раздел 5) равна 0.5. Кроме того,  $\sigma^*$  будет состоятельной оценкой стандартного отклонения  $\sigma$  нормальной случайной величины. Таким образом, осталось вычислить  $\omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2, A_1$  и  $A_2$ .

Оценку параметров предлагается провести робастным вариантом линейной регрессии. Под робастностью понимают нечувствительность к небольшим отклонениям от начальных предположений. Следует отметить, что наличие больших ошибок в измерениях, составляющих небольшую часть выборки, считается небольшим отклонением. В рассматриваемом случае такими ошибочными измерениями являются эктопические импульсы.

Классическое решение задачи линейной регрессии методом наименьших квадратов строится следующим образом. Необходимо оценить  $p$  неизвестных параметров  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T$  по  $N$  наблюдениям  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ , причем имеет место связь:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} + \mathbf{u}.$$



где  $x_{ij}$  — некоторые известные постоянные коэффициенты,  $u_i$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Эта задача сводится к решению задачи:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}.$$

Если матрица  $\mathbf{X}$  имеет ранг  $p$ , то решение системы будет выглядеть так:

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}.$$

Формула не является робастной, так как квадратичная функция слишком чувствительна к ошибкам, особенно большим. Выход заключается в замене ее на некоторую менее быстро растущую функцию остатков  $\rho$  и решении следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^N \rho \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij} \theta_j \right) \rightarrow \min,$$

Ограничения на  $\rho$ : выпуклость, немонотонность, наличие ограниченных производных достаточно высоких порядков. В частности,  $\psi = \rho'$  должна быть непрерывной ограниченной функцией. В этом случае возможен переход к системе

$$\sum_{i=1}^N \psi \left( y_i - \sum_{k=1}^p x_{ik} \theta_k \right) x_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad \psi = \rho'.$$

В качестве  $\rho$  предлагается использовать следующую функцию:

$$\hat{\rho}(x) = \begin{cases} c \left( 1 - \cos \left( \frac{x}{c} \right) \right) & \text{при } |x| < c\pi, \\ 2c & \text{при } |x| \geq c\pi. \end{cases}$$

Ее производная равна

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} \sin \left( \frac{x}{c} \right) & \text{при } |x| < c\pi, \\ 0 & \text{при } |x| \geq c\pi. \end{cases}$$

Вблизи нуля функция  $\hat{\rho}$  имеет квадратичный порядок роста, а начиная с некоторого значения - нулевой. В качестве  $c$  берется значение  $\hat{c} = 0.85$ , которое было подобрано опытным путем. Полезным свойством данной функции является то, что очень большие по модулю значения аргумента не оказывают влияния на сумму, так как значение функции  $\hat{\psi}$  в этих точках равно нулю. Это полностью согласуется с практикой, которая говорит, что очень длинные ( $\geq 2000$ мс) и очень короткие интервалы ( $\leq 300$ мс) однозначно являются эктопическими. Именно такие интервалы дают большие абсолютные значения разностей.

В робастном варианте регрессии возникает задача оценки масштаба, т.к. функции  $\rho$  и  $\psi$  практически всегда имеют разный порядок роста для разных значений аргумента. Соответственно, параметр масштаба  $s$  позволяет выполнить нормировку данных для эффективного деления на большие и маленькие значения. Нужно решать систему

$$\sum_{i=1}^N \psi \left( \frac{y_i - \sum_{k=1}^p x_{ik} \theta_k}{s} \right) x_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Значения  $s$  и  $\theta$  находятся итеративным путем, но, так как функции  $\sum_j x_{ij} \theta_j$  являются линейными относительно  $\theta_j$ , то решение находится за один шаг. В качестве начального значения параметра масштаба  $\tilde{s}$  можно взять абсолютное медианное отклонение от медианы (АМО)

$$\tilde{s} = \text{med} |RR_i - \text{med}(RR_i)|,$$

которое обладает хорошими теоретическими свойствами, в частности, АМО имеет пороговую точку  $\varepsilon^* = 0.5$ . На интуитивном уровне понятие пороговой точки можно объяснить как максимальную долю паразитных импульсов, с которыми может справиться оценка.

Начальной оценкой для  $\theta$  является решение упомянутой выше системы, которое обозначим  $\theta^0$ . Шаг метода заключается в вычислении винзоризованных остатков  $r_i$ :

$$r_i = \psi \left( \frac{y_i - \sum_{k=1}^p x_{ik} \theta_k^0}{\hat{s}} \right) \hat{s}, \quad i = 1, \dots, N$$

и решении относительно  $\tau$  системы

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \tau = \mathbf{X}^T \mathbf{r}.$$

Если решение обозначить  $\hat{\tau}$ , то  $\hat{\theta}$  равно

$$\hat{\theta} = \theta^0 + \hat{\tau}.$$

В качестве факторов регрессии предлагается взять ортогонализированные единичный и тригонометрические векторы. Под единичным подразумевается вектор, полностью составленный из единиц. Такой вид линейной регрессии называется компенсированным дискретным преобразованием Фурье (КДПФ) (date-compensated discrete Fourier transform) [32]. Дело в том, что неравномерное квантование времени, а именно такое квантование имеет место при записи ритмограммы, нарушает ортогональность и нормировку тригонометрических векторов  $\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{X}_3$  и единичного вектора  $\mathbf{X}_1$ :

$$\mathbf{X}_1 = (1, 1, \dots, 1).$$

$$\mathbf{X}_2 = (\cos(\omega t_1), \cos(\omega t_2), \dots, \cos(\omega t_N)),$$

$$\mathbf{X}_3 = (\sin(\omega t_1), \sin(\omega t_2), \dots, \sin(\omega t_N))$$

В результате, амплитуда частотных компонент оценивается неправильно, причем в отдельных случаях отличия от реальных значений амплитуд весьма существенные [33].

КДПФ решает эту проблему. К трем векторам применяется процедура ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\mathbf{x}_1 = a_1 \mathbf{X}_1,$$

$$\mathbf{x}_2 = a_2[\mathbf{X}_2 - \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2)],$$

$$\mathbf{x}_3 = a_3[\mathbf{X}_3 - \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{X}_3) - \mathbf{x}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{X}_3)],$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение. Коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  находятся из условия ортонормированности векторов  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  и  $\mathbf{x}_3$ . Здесь частота  $\omega$  фиксирована, и  $p=3$ . Поэтому коэффициенты регрессии выглядят так:

$$\theta_1 = (\mathbf{z}, \mathbf{x}_1) = a_1(\mathbf{z}, \mathbf{X}_1),$$

$$\theta_2 = (\mathbf{z}, \mathbf{x}_2) = a_2[(\mathbf{z}, \mathbf{X}_2) - a_1\theta_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)],$$

$$\theta_3 = (\mathbf{z}, \mathbf{x}_3) = a_3[(\mathbf{z}, \mathbf{X}_3) - a_1\theta_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3) -$$

$$- a_2\theta_2[(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) - a_1^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)]]$$

Подставляя вместо вектора  $\mathbf{z}$  вектор наблюдений  $\mathbf{y}$  и вектор винзоризованных остатков  $\mathbf{r}$ , получим, соответственно, векторы коэффициентов  $\theta^0$  и  $\hat{\tau}$ . Далее находим значение амплитуды для частоты  $\omega$ :

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{\hat{\theta}_2^2 + \hat{\theta}_3^2}{N/2}}.$$

Остается посчитать для некоторого набора частот  $\omega^l$ ,  $0.04\text{Гц} \leq \frac{\omega^l}{2\pi} \leq 0.4\text{Гц}$  значения соответствующих амплитуд и найти максимумы в НЧ и ВЧ:

$$A_1 = \max_{0.04 \leq \omega^l \leq 0.15} \{A(\omega^l)\}, \quad A_2 = \max_{0.15 < \omega^l \leq 0.4} \{A(\omega^l)\}$$

Соответствующие им  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  будут искомыми.

Имея оценки всех параметров модели, можно приступить непосредственно к фильтрации эктопических выбросов. Первая точка ритмограммы должна относиться к синусовому ритму, это необходимо для правильной работы алгоритма. Предположим, что до момента времени  $t_{i-1}$  включительно ритмограмма отфильтрована, то есть последний из предшествующих синусовых интервалов соответствует моменту времени  $t_{i-1}$ .

Рассмотрим момент времени  $t_{i+k}$ ,  $k$  - целое число. Начинаем со значения  $k = 0$ .

- Если разность  $RR(t_{i+k}) - RR(t_{i-1})$  попадает в доверительный интервал, то точка  $RR(t_{i+k})$  соответствует модели, она объявляется синусовой, обновляются значения  $i$  и  $k$ :  $i = i + k + 1$ ,  $k = 0$ . Выполняется переход к моменту времени  $t_i$  ( $i$  - обновленное).
- Если же разность в интервал не попала, то точка  $RR(t_{i+k})$  удаляется из ритмограммы как эктопический импульс. Далее  $k$  увеличивается на единицу, и рассматривается момент  $t_{i+k}$  ( $k$  - обновленное).

Необходимо отметить, что обычно  $k \leq 3$ , так что существенного увеличения доверительного интервала и, как следствие, ухудшения работы метода ожидать не стоит.

### ***1.5 Анализ и прогнозирование временных рядов***

Вейвлет-преобразование находит все более широкое применение в исследовании и прогнозировании временных рядов. Фактически временным рядом является любая функция, значения которой даны в отдельные моменты времени. Временным рядом может быть последовательность отсчетов температуры или давления среды, стоимость акций или курс доллара в определенные моменты времени, статистика интенсивности Интернет-трафика и т.п.

Известны успешные попытки применения вейвлет-преобразования для предсказания погоды, прогнозирования возникновения землетрясений, цунами и других природных катаклизмов. Также известны другие интересные примеры применения вейвлет-преобразования: предсказание разноса авиационного двигателя; выявление финансового кризиса путем построения вейвлет-спектра курса закрытия акций компании Лукойл.

#### **Разномасштабный анализ рыночной динамики**

Волатильность – основная мера риска рыночного финансового инструмента. Волатильность является случайной составляющей изменения

цены финансового инструмента или временным рядом с нулевым математическим ожиданием.

Прежде чем начать играть на рынке ценных бумаг, трейдер сначала анализирует динамику их цен на основании уже имеющихся исторических данных. Многие из этих данных имеются в свободном доступе в сети Интернет (например, на сайте [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com)).

Предположим, что у нас имеется временной ряд значений индекса Dow Jones за последние двадцать лет. В целом динамика индекса отражает общий экономический рост США. Трейдера не слишком интересует этот рост, охватывающий десятилетние временные интервалы. Значительно большее внимание он уделит небольшим кратковременным подъемам и спадам цен, которые можно было бы использовать для спекуляции и извлечения дополнительной прибыли.

Трейдер обратит внимание на тот промежуток времени, где цены испытали несколько очевидных скачков. Чтобы выявить какие-то закономерности в этом явлении, он попытается изучить указанный промежуток времени более подробно, "через лупу".

В новом масштабе картина будет выглядеть совсем по-другому. Вместо постоянного роста, отражающего долгосрочное развитие экономики, цены теперь испытывают довольно большое количество значительных подъемов и спадов. Причем эти изменения сопровождаются мелким "дрожанием" цен. Если взглянуть на график в еще меньшем масштабе, то можно заметить, что характер поведения цен вновь изменился.

Указанные наблюдения над разномасштабным поведением цен наводят на мысль, что есть смысл исследовать различные временные масштабы отдельно. Иными словами, надо попытаться выявить характер поведения цены, свойственный заранее намеченному временному масштабу, отсеивая те особенности, которые свойственны более крупному и более мелкому масштабам.

Для такого рода исследований уже давно применялся "Фурье-анализ", где понятию частота временного ряда соответствовал определенный временной масштаб. Но, как уже отмечалось ранее, Фурье-анализ хорошо зарекомендовал себя при изучении эволюции временных рядов, имеющих периодический характер, в непериодическом случае применение Фурье-анализа нецелесообразно. Поведение цен носит как раз неблагоприятный для Фурье-анализа характер. Для исследования их эволюции более пригоден вейвлет-анализ. Его методы позволяют построить действительно работающие прогностические модели. Благодаря обилию точных данных в мире финансов, легко можно проверить адекватность этих моделей на практике.

Вейвлет-анализ пришел на службу анализу финансовых рынков относительно недавно. Он позволяет:

1. Отделить "трендовую" компоненту цены от нетрендовой.
2. Выявить возможное влияние экономических событий на цены финансовых инструментов и товаров и выяснить, какие из них под влиянием этих событий начинают эволюционировать совместно, а какие нет.
3. Определить тенденции к уменьшению или увеличению волатильности цен.
4. Установить корреляции между положением на рынке ценных бумаг в целом и резкими изменениями цен отдельных бумаг.

### ***1.6 Методы расчета поверхностного натяжения по изображению профиля лежащей капли***

Поверхностное натяжение является одним из важнейших свойств жидкости, и его точное измерение является необходимым для изучения различных явлений и разработки технологических процессов. Существует целый ряд способов измерения поверхностного натяжения, однако среди всех них можно выделить метод лежащей или висящей капли. Основные достоинства метода заключаются в очень широкой области применения – от легких текучих жидкостей до жидких металлов, и относительная простота

экспериментальной установки по сравнению с другими методами. Причем, в связи с развитием цифровой вычислительной и фототехники стало возможным производить анализ практически мгновенно.

Суть метода состоит в следующем: капля помещается на горизонтальную подложку (метод лежащей капли) или подвешивается на капиллярной трубке (метод висящей капли) и затем изучается ее фотография в профиль. Измерение геометрических параметров равновесной капли, форма которой определяется соотношением плотности и поверхностного натяжения жидкости, позволяет восстановить искомое поверхностное натяжение.

Несмотря на достаточно хорошо разработанную экспериментальную методику, до сих пор требуется специальная дорогостоящая установка для съемки капли. В рамках данной НИР предполагается использовать простую установку, сконструированную из широкодоступных компонентов. Недостатки установки по сравнению со специализированным лабораторным оборудованием предполагается компенсировать с помощью разрабатываемых методов обработки изображений.

### **1.6.1 Метод лежащей капли**

Основное уравнение метода лежащей капли – уравнение Юнга-Лапласа, описывает поверхность капли с симметрией вращения на горизонтальной подложке. Основа метода была заложена еще в ранней работе Башфорта и Адамса, посвященной решению прямой задачи для лежащей капли [38]. В их работе были получены решения прямой задачи для различных значений параметров и составлены соответствующие таблицы. Пользуясь такой таблицей можно было по экспериментально измеренному профилю капли с помощью интерполяции найти приближенные значения параметров. Метод активно развивался, был применен для висящих капель [39-43], и, наконец, была осуществлена программная реализация [44]. Однако по-прежнему измерение проводилось с помощью выбора некоторых заранее выбранных особых точек на профиле капли, которые необходимо измерять



особо точно, так как небольшие ошибки в их измерении сильно влияют на результат. Кроме того, возможности метода ограничивались наличием таблиц только для определенного диапазона параметров.

Для решения этой проблемы в статье [45] был разработан новый алгоритм. На измеренном профиле капли (на одной из симметричных половин) выбирались несколько произвольных и равноправных с точки зрения алгоритма точек, после чего 2 параметра (радиус кривизны в апексе капли и капиллярная постоянная) подбирались так, чтобы наилучшим образом приблизить выбранные точки. Для начала расчета необходимо выбрать хорошее начальное приближение, например, из таблиц Башфорта и Адамса, в противном случае алгоритм не сойдется.

Несмотря на прогресс в стратегии определения параметров, данный алгоритм также имел ряд существенных недостатков. Функция ошибки, то есть «разность» между теоретическим и экспериментальным профилем, рассчитывалась только по горизонтальным расстояниям между теоретическим и экспериментальным профилями. Данный способ не подходит для лежащих капель, так как их форма в основном определяется гравитацией. Например, при низком поверхностном натяжении большие капли становятся плоскими в окрестности апекса, поэтому точка в окрестности апекса может привести к существенной ошибке, даже если она находится близко к кривой наилучшего приближения. Кроме того, для работы алгоритма было чрезвычайно важно точное задание точки апекса, так как она служит точкой отсчета для рассчитываемых кривых. В работе [46] был предложен похожий подход, только была использована грубая аппроксимация расстояния по нормали [47], а апекс капли также должен быть известен заранее.

В статье [48] для улучшения устойчивости метода была использован устойчивый метод сравнения форм [49]. Для устранения ошибочных точек, сильно влияющих на результат – так называемых «выбросов», вместо сравнения точек на двух кривых, сравнивались сегменты

экспериментального профиля с соответствующими сегментами теоретического профиля. Однако, результат зависел не только от точности определения профиля капли, но и от выбора начала отсчета, например, апекса или центра капли.

Ротенбергом в работе [50] был создан более мощный метод, Axisymmetric Drop Shape Analysis (ADSA), в котором измеренный профиль аппроксимируется профилем Лапласа с помощью нелинейной оптимизации. В методе ADSA целевой функцией является сумма квадратов нормальных расстояний между теоретической кривой и экспериментальными точками. Кроме того, положение точки апекса капли считается неизвестным, и ее координаты также являются параметрами целевой функции. Таким образом, измерения можно проводить на любом удобном кадре. Оптимизация параметров производилась с помощью метода Ньютона. Численная процедура унифицирована для лежащих и висящих капель, не требует таблиц.

Простота и точность метода были улучшены в [51], где было предложено автоматизированное определение контура капли с помощью методов обработки изображений. В результате это еще больше увеличило точность метода. Оценка точности [52] показала, что первое поколение метода ADSA хорошо работает за исключением случаев очень больших и плоских капель. Также, было определено, что достаточно трудно достичь идеального выравнивания камеры по горизонтали, поэтому требуется ручное выравнивание по отвесам на экране компьютера с помощью мыши.

Наконец, в работе del Río [53] создано второе поколение метода ADSA, в котором практически решены все трудности, обнаруженные в первом поколении. Для улучшения устойчивости алгоритма к шуму (неточностям профиля), вместо радиуса кривизны в точке апекса капли использована непосредственно кривизна, а также добавлен параметр угла наклона камеры в процедуру оптимизации. Кроме того, он также предложил совершенно другой подход, названный Axisymmetric Liquid–Fluid Interface (ALFI),

который работает в противоположном ключе по сравнению с ADSA. В методе ALFI генерируются теоретические кривые Лапласа для известных параметров кривизны и поверхностного натяжения и сравниваются с измеренной. Фактически, производится автоматизация метода Башфорта и Адамса [38].

Для того чтобы проинтегрировать уравнение Юнга-Лапласа вводится параметризация кривой  $\{x(t), y(t)\}$ , где  $t$  – длина дуги кривой от вершины капли (рис. 1.1).

Эта параметризация удовлетворяет условию  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ , и приводит к системе уравнений

$$\ddot{y} = -\dot{x} \left[ -\frac{y - y_0}{\alpha^2} + \frac{\dot{y}}{x - x_0} + \frac{2}{R_0} \right];$$

$$\ddot{x} = \dot{y} \left[ -\frac{y - y_0}{\alpha^2} + \frac{\dot{y}}{x - x_0} + \frac{2}{R_0} \right],$$

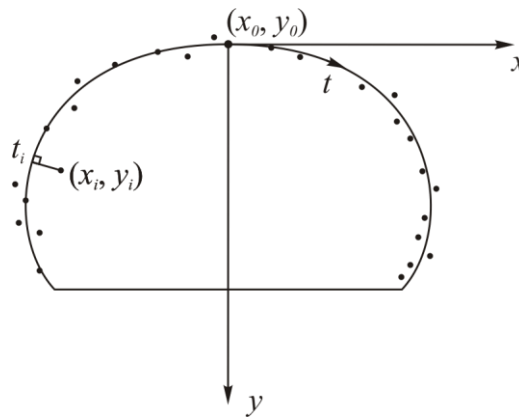


Рисунок 1.1 – Параметризация контура капли.

с начальными условиями  $y(0) = y_0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  и дополнительным условием  $\dot{y}/x|_{t=0} = -1/R_0$ . Данная система уравнений является нелинейной, поэтому для её решения необходимо использовать численные методы. В данном случае целесообразно применение методов типа Рунге-Кутты, например [54].

Для восстановления параметров лежащей капли необходимо решить обратную задачу определения капиллярной постоянной  $\alpha^2$ , координат апекса

капли  $\{x_0, y_0\}$  и ее радиуса кривизны  $R_0$  по функции радиуса горизонтального сечения капли от высоты над подложкой. Эта функция измерена с ошибкой и, в ряде случаев, доступны измерения только части контура капли. При решении данной обратной задачи минимизируется ошибка

$$E = \sum d(\{x_i, y_i\}, \{x(t), y(t)\})$$

между экспериментальными точками  $\{x_i, y_i\}$  и кривой  $\{x(t), y(t)\}$ , полученной в результате численного решения задачи. Разность между экспериментальными точками и кривой определяется как корень из суммы квадратов расстояний от каждой экспериментальной точки до кривой.

В связи с этим возникают следующие задачи обработки изображений: автоматическое получение контура капли  $\{x_i, y_i\}$ , что осложняется наличием пыли и мусора на снимках (что связано с применением обычной камеры в «бытовых» условиях), а также сложными условиями съемки, недостаточности освещения, что приводит к появлению на снимках стохастического шума, связанного с цифровым сенсором.

### 1.6.2 Выделение контура капли

После получения изображения капли с помощью микроскопа и цифровой камеры, необходимо автоматически выделить контур капли. В литературе [51, 52] для этого используется метод Собеля, который заключается в дискретной свертке изображения с масками размером 3x3:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Фактически, оператор Собеля представляет собой разностную производную с усреднением по 3 соседним строкам или столбцам, в зависимости от направления. Пиксели, в которых такой аппроксимированный модуль градиента выше некоторого порога, считаются пикселями края.

Данный подход имеет несколько недостатков: во-первых, при наличии посторонних объектов в кадре на границах их контуров также будут найдены точки края, и необходимо отделить их от контура капли. Обычно, это делает оператор, выделяя вручную область, где находится капля. Во-вторых, простое пороговое ограничение работает удовлетворительно только при хорошо контролируемых условиях съемки (освещение и др.), что в ряде случаев невозможно в силу условий (высокие температура/давление, съемки в растворах и др.). В других случаях наблюдаются следующие проблемы:

- контур капли выделяется не полностью, так как имеет разный контраст на своем протяжении, например, в результате нахождения одной части капли в тени. При этом простое понижение порога невозможно, так как приведет к выделению большого количества шумовых контуров;
- контур может быть размыт, при этом пороговое ограничение дает линию шириной в несколько пикселей, что существенно снижает точностью метода. Понижение порога опять приводит к нежелательным последствиям, как правило, часть контура пропадает.

Для решения этих проблем будет рассмотрено применение метода Канни [55] для обнаружения контура капли, а также автоматизированный алгоритм выбора контура только капли из всего набора обнаруженных контуров.

## **2 Разработка плана проведения теоретических исследований и вычислительных экспериментов на ЭВМ**

На основе подготовленного аналитического обзора был составлен теоретических исследований и вычислительных экспериментов. Сочетание теоретических разработок с практическими тестами позволит успешно выполнить поставленных в рамках проекта задачи.

### **2.1 Этап 1 НИР**

#### **2.1.1 Проведение теоретического и вычислительного анализа, необходимого для построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный фильтр**

- Построение математической модели сигнала, пропущенного через линейный однородный фильтр.
- Анализ различных методов пороговой обработки сигнала для вейвлет-представлений.
- Построение устойчивой оценки сигнала, пропущенного через линейный однородный фильтр на основе вейвлет-представления с использованием нелинейной пороговой обработки.

### **2.2 Этап 2 НИР**

#### **2.2.1 Создание и теоретическое обоснование метода восстановления вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам сферических преобразований Радона**

- Описание класса случайных функций, описывающих стохастические изображения.
- Построение метода реконструкции распределений случайных функций по распределениями сферических преобразований Радона.

### **2.2.2 Разработка устойчивого метода реконструкции стохастических радиолокационных, термо- и опто-акустических томографических изображений**

- Описание и обоснование математической модели стохастических радиолокационных, термо- и опто-акустических томографических изображений.
- Разработка регуляризованного метода реконструкции стохастических изображений по радиолокационным данным и томографическим проекциям.
- Доказательство устойчивости метода к шумам в измеряемых данных.
- Оценка погрешностей в реконструируемых стохастических изображениях.

### **2.2.3 Разработка устойчивого метода расчета поверхностного натяжения по профилю лежащей капли.**

- Разработка устойчивого к шуму метода нахождения контура капли на изображениях профиля капли.
- Создание устойчивого метода восстановления параметров капли по контуру, содержащему ошибки измерения.
- Проведение вычислительных экспериментов по оценке точности и надежности разработанного метода с помощью моделирования ошибок измерения стохастическим шумом.

## **2.3 Этап 3 НИР**

### **2.3.1 Разработка методов нелинейной пороговой обработки сигналов и изображений, направленных на подавление шума**

- Описание модели шума и обоснование выбора вейвлет-базисов, вида пороговой обработки и величины порога.

- Разработка методов нелинейной регуляризации, направленных на подавление шума.

### **2.3.2 Разработка методов обработки и анализа изображений с помощью разреженных представлений**

- Постановка задачи обработки и анализа изображений как задачи поиска представления решения в виде разложения по переопределенному базису (словарю) с наименьшим количеством ненулевых компонент.
- Разработка жадного алгоритма для быстрого построения приближенного разложения решения по словарю с наименьшим количеством ненулевых компонент.
- Разработка итерационного метода построения словаря.

### **2.3.3 Создание методов обработки и анализа изображений на основе систем ортогональных многочленов**

- Разработка метода представления характеристик локальной окрестности изображения с помощью двумерной системы Гаусса-Лагерра.
- Разработка алгоритма сопоставления изображений с помощью выделения и описания ключевых точек Гаусса-Лагерра. Сравнение предложенного алгоритма с мировым уровнем с помощью стандартных и собственных тестовых изображений.
- Создание метода частотно-временного анализа сигналов с помощью представления в виде ряда по системам ортогональных многочленов, вычислительно локализованных в частотной и временной области.

## **2.4 Этап 4 НИР**

### **2.4.1 Построение критериев качества оценок сигналов и изображений и изучение их свойств**

- Построение критериев качества оценок сигналов и изображений.



- Описание оценок среднеквадратичной ошибки методов нелинейной регуляризации.
- Изучение асимптотических свойств оценок среднеквадратичной ошибки методов нелинейной регуляризации.

#### **2.4.2 Разработка метода повышения качества изображений на основе метода статистической дифференциации и вариационных методов суперразрешения изображений.**

- Разработка эффективного итерационного метода для задачи регуляризирующего повышения разрешения изображений.
- Внедрение метода статистической дифференциации для повышения качества изображений.
- Разработка метода выделения резких изолированных границ для их последующего использования в определении уровня эффекта Гиббса.
- Разработка алгоритма выделения на изображении областей различных типов для использования переменного параметра регуляризации и переменного параметра подавления эффекта Гиббса.

### **3 Методы построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный оператор**

Идеи вейвлет-анализа оказались очень полезны для решения некоторых задач вычислительной томографии. Томографические методы используются в медицине, биологии, геологии, астрономии, сейсмологии, электронной микроскопии, диагностике плазмы, химии и во многих других областях. Эти методы основаны на реконструкции двумерного изображения наблюдаемого объекта по его проекциям. Математической моделью для описания проекций чаще всего выступает преобразование Радона, которое представляет из себя линейный однородный оператор. Таким образом, для реконструкции изображения необходимо обратить это преобразование.

Для получения проекций может использоваться излучение различной физической природы: ультразвук, радио- и оптические сигналы, рентгеновские и  $\gamma$ -лучи, явление ядерно-магнитного резонанса и т.д. Если речь идет о медицинских или биологических приложениях, то это излучение может быть вредным для наблюдаемого объекта, поэтому желательно как можно больше снизить его дозу. В частности, было бы желательно облучать не весь объект, а только тот участок, который представляет интерес. К сожалению, преобразование Радона не локально в том смысле, что для реконструкции изображения в какой-либо точке необходимы все его проекции. Это означает, что для реконструкции изображения даже небольшого участка объекта необходимо облучать его целиком. Вейвлет-анализ позволяет частично локализовать задачу реконструкции.

Кроме того, в реальных приложениях проекции регистрируются с некоторой погрешностью, возникающей из-за несовершенства оборудования, случайных помех при измерении, ошибок интерполяции и других причин. Метод пороговой обработки уменьшает погрешности в восстанавливаемых изображениях.

### 3.1 Применение вейвлет-анализа в задачах вычислительной томографии

Рассмотрим формальную постановку задачи реконструкции томографических изображений. Пусть изображение описывается функцией  $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  с компактным носителем. Проинтегрируем эту функцию по прямой  $L$ , которая описывается уравнением

$$x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0,$$

где  $s$  — расстояние от начала координат до прямой, а  $\theta$  — угол, образованный с осью  $x$  перпендикуляром, опущенным из начала координат на эту прямую. Результат интегрирования обозначим через  $R_L f$ . Очевидно, что этот результат зависит от параметров  $s$  и  $\theta$ . Таким образом,  $R_L f = R_\theta f(s)$ . При интегрировании функции  $f(x, y)$  по всем возможным прямым получается функция  $R_\theta f(s)$ , которая называется преобразованием Радона. О функции  $R_\theta f(s)$  также говорят как о проекции  $f(x, y)$  или как о функции, которая описывает проекционные данные. Этим отражается геометрический смысл преобразования Радона, а именно тот факт, что в этом преобразовании все значения функции  $f(x, y)$ , лежащие на прямой, как бы интегрально проецируются в соответствующую точку  $(s, \theta)$ .

Продemonстрируем связь преобразования Радона, например, с рентгеновской томографией. Рассмотрим срез ткани. В общем случае, ткань ослабляет интенсивность рентгеновского луча, проходящего через нее. Обозначим через  $f(x, y)$  коэффициент ослабления рентгеновского луча в точке  $(x, y)$  среза ткани, определяемый как относительное изменение интенсивности луча в этой точке. Различные типы ткани, такие как кость, жир, мышцы и т.д. имеют различные, характеризующие их коэффициенты ослабления, следовательно, реконструкция функции  $f$  может многое сказать об анатомической структуре среза ткани.

Если срез ткани облучается моноэнергетическим рентгеновским лучом с постоянной интенсивностью  $I_0$ , лежащим в той же плоскости, что и срез

ткани, ослабление интенсивности луча в точке  $(x, y)$ , лежащей на прямой  $L$  следования луча, моделируется уравнением (см. [25])

$$\frac{dI}{I} = -f(x, y)dl,$$

где  $I(x, y)$  и  $f(x, y)$  — это соответственно интенсивность излучения и коэффициент ослабления в точке  $(x, y)$ . Таким образом,

$$I_L = I_0 \exp\left(-\int_L f(x, y)dl\right),$$

где  $I_L$  — средняя интенсивность прошедшего через срез излучения. Логарифмируя это равенство, получаем

$$\int_L f(x, y)dl = \ln I_0 - \ln I_L.$$

Обозначим

$$R_L f = \ln I_0 - \ln I_L = \int_L f(x, y)dl.$$

Измеряя интенсивность прошедшего через срез ткани рентгеновского излучения по всевозможным прямым  $L$  и зная  $I_0$ , можно вычислить все значения функции  $R_L f$ . Эта функция и является радоновским образом искомой функции  $f$ .

Согласно определению проекции, имеем

$$\begin{aligned} R_\theta f(s) &= \int_{x \cos \theta + y \sin \theta = s} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy. \end{aligned}$$

Далее сделав в интеграле следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= s' \cos \theta - t \sin \theta, & y &= s' \sin \theta + t \cos \theta, \\ s' &= x \cos \theta + y \sin \theta, & t &= -x \sin \theta + y \cos \theta, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
R_{\theta}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s' \cos \theta - t \sin \theta, s' \sin \theta + t \cos \theta) \times \\
&\quad \times \delta(s' - s) dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt.
\end{aligned}$$

В общем случае функция, описывающая проекционные данные, обладает важным свойством симметричности:

$$R_{\theta+\pi}f(-s) = R_{\theta}f(s).$$

Смысл этого свойства состоит в том, что любые пары  $(s, \theta)$  и  $(-s, \theta + \pi)$  задают одну и ту же прямую.

Формальная задача вычислительной томографии ставится следующим образом: функция  $f(x, y)$  неизвестна, но известна функция  $R_{\theta}f(s)$ , являющаяся проекцией  $f(x, y)$ ; требуется по функции  $R_{\theta}f(s)$  определить  $f(x, y)$ .

Ключевую роль в методе реконструкции томографических изображений играет теорема о центральном сечении: для любого  $\theta \in [0, 2\pi)$  справедливо

$$\hat{R}_{\theta}f(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta),$$

где  $\hat{R}_{\theta}f(\omega)$  — одномерное преобразование Фурье от  $R_{\theta}f(s)$  по переменной  $s$ , а  $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$  — двумерное преобразование Фурье от функции  $f(x, y)$ .

Эта теорема называется теоремой о центральном сечении, поскольку в плоскости  $\{\omega_1, \omega_2\}$  множество  $\omega_1 = \omega \cos \theta, \omega_2 = \omega \sin \theta$  при фиксированном  $\theta$  и всех  $\omega \in (-\infty, \infty)$  является прямой, проходящей через начало координат под углом  $\theta$  к оси  $\omega_1$ . Таким образом, теорема о центральном сечении утверждает, что одномерное преобразование Фурье от проекции  $R_{\theta}f(s)$  по переменной  $s$  равно функции, описывающей центральное сечение

двумерного преобразования Фурье функции  $f(x, y)$ , соответствующего тому значению  $\theta$ , при котором вычисляется преобразование Фурье функции  $R_\theta f(s)$ .

Для получения формулы реконструкции выразим функцию  $f(x, y)$  через ее преобразование Фурье:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2.$$

Сделаем замену переменных, перейдя в плоскости  $\{\omega_1, \omega_2\}$  к полярным координатам  $\{\omega, \theta\}$ , так что  $\omega_1 = \omega \cos \theta$ ,  $\omega_2 = \omega \sin \theta$ :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \omega \hat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega.$$

Теперь воспользуемся теоремой о центральном сечении и подставим функцию  $\hat{R}_\theta f(\omega)/\sqrt{2\pi}$  вместо  $\hat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ , после чего получим

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \omega \hat{R}_\theta f(\omega) e^{i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega.$$

Это равенство и является искомой формулой обращения, позволяющей по  $R_\theta f(s)$  найти функцию  $f(x, y)$ . Однако привлечение этой формулы для обработки данных томографических экспериментов оказывается неудобным из-за используемой в ней области интегрирования. Поэтому, воспользовавшись свойством симметричности преобразования Радона и произведя некоторые элементарные преобразования, получаем следующую формулу обращения:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \hat{R}_\theta f(\omega) e^{i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega.$$

Формулу можно также представить в несколько другом виде. Во-первых, заметим, что в силу свойства симметричности

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \hat{R}_\theta f(\omega) e^{i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \hat{R}_{\theta} f(\omega) e^{i\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} d\omega,$$

поэтому

$$f(x, y) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \hat{R}_{\theta} f(\omega) e^{i\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} d\omega.$$

Для функции  $g_{\theta}(s) = g(\theta, s)$  ( $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $s \in R$ ) определим оператор обратного проецирования  $R^{\#}$  следующим образом:

$$R^{\#}[g_{\theta}](x, y) = \int_0^{2\pi} g(\theta, x\cos\theta + y\sin\theta) d\theta.$$

Также определим (формально) оператор  $I^{-1}$  (потенциал Рисса):

$$\hat{I}^{-1}[h](\omega) = |\omega| \hat{h}(\omega).$$

С учетом введенных определений формулу обращения можно записать в следующем виде:

$$f(x, y) = R^{\#} \left[ \frac{1}{4\pi} I^{-1}[R_{\theta} f] \right] (x, y).$$

Важную роль играет следующее соотношение.

Пусть функции  $f(x, y)$  и  $g_{\theta}(s) = g(\theta, s)$  ( $(x, y) \in R^2$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $s \in R$ ) интегрируемы и имеют компактный носитель, тогда

$$f * R^{\#}[g_{\theta}](x, y) = R^{\#}[R_{\theta} f * g_{\theta}](x, y),$$

где свертка в левой части осуществляется относительно двух переменных  $(x, y)$ , а свертка в правой части — относительно одной переменной  $s$ .

Эта формула лежит в основе многих методов реконструкции. Если взять функцию  $g_{\theta}(s)$  такой, что  $R^{\#}[g_{\theta}](x, y)$  аппроксимирует  $\delta$ -функцию, то можно получить хорошую аппроксимацию для функции  $f(x, y)$ .

Для того чтобы объяснить преимущества использования вейвлет-анализа в задаче локальной реконструкции томографических изображений, полезно сначала исследовать вопрос о том, почему метод обращения

преобразования Радона не является локальным в том смысле, что для реконструкции изображения в какой-либо точке требуется использование всех проекций - даже по прямым, которые не проходят вблизи этой точки. Для этого рассмотрим формулу

$$f * G(x, y) = R^\# [R_\theta f * g_\theta](x, y),$$

где через  $G(x, y)$  обозначена функция  $R^\#[g_\theta](x, y)$ . Имеем

$$G(x, y) = R^\# \left[ \frac{1}{4\pi} I^{-1} [R_\theta G] \right](x, y),$$

поэтому

$$g_\theta(s) = \frac{1}{4\pi} I^{-1} [R_\theta G](s).$$

По определению оператора  $I^{-1}$  и теореме о центральном сечении  $g_\theta(s)$  удовлетворяет соотношению

$$\hat{g}_\theta(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{G}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta).$$

Для локального обращения преобразования Радона с использованием проекций только по тем прямым, которые проходят вблизи точек реконструкции было бы достаточно, чтобы обе функции -  $g_\theta(s)$  и  $G(x, y)$  — имели компактный носитель. В этом случае можно было бы выбрать положительные числа  $a'$  и  $a$  ( $a' > a$ ) таким образом, чтобы  $\text{supp}(G) \subseteq \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq a' - a\}$  и  $\text{supp}(g_\theta) \subseteq [-a' + a, a' - a]$  для всех  $\theta \in [0, 2\pi)$ . (Здесь  $\text{supp}(G)$  - носитель  $G(x, y)$ , а  $\text{supp}(g_\theta)$  - носитель  $g_\theta(s)$ ). Это позволило бы точно восстановить функцию  $f * G(x, y)$  для  $\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$ , используя  $R_\theta f(s)$  только при  $s \in [-a', a']$ . Предполагая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) dx dy = 1,$$



и положив  $G_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-2}G(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$ , мы могли бы аппроксимировать  $f(x, y)$  при  $\{(x, y): \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$  сколь угодно точно, так как свертку  $f * G_\varepsilon(x, y)$  можно сделать поточечно сколь угодно близкой к  $f(x, y)$ , выбирая соответствующее  $\varepsilon > 0$ .

Однако  $g_\theta(s)$  и  $G(x, y)$  не могут одновременно иметь компактный носитель по следующей причине. Предположим, например, что  $G(x, y)$  имеет компактный носитель, тогда хорошо известно, что  $\hat{G}(\omega_1, \omega_2)$  можно аналитически продолжить до целой функции в  $C^2$ , поэтому для любого  $\theta \in [0, 2\pi)$  функция  $\hat{G}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$  представляет сужение на  $R$  целой функции в  $C$ . Следовательно, для того чтобы функция  $g_\theta(s)$  имела компактный носитель, необходимо, чтобы функция  $|\omega| \hat{G}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$  представляла собой сужение целой функции на  $R$ . Но это невозможно, так как предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) dx dy = 2\pi \hat{G}(0, 0) = 1,$$

а производная функции  $|\omega|$  терпит разрыв в точке  $\omega = 0$ . Следовательно, функция  $g_\theta(s)$  не может иметь компактный носитель, и локальная реконструкция невозможна.

Хотя компактность носителя функции  $g_\theta(s)$  невозможно обеспечить, если компактный носитель имеет  $G(x, y)$ , можно обеспечить быстрое убывание  $g_\theta(s)$  на бесконечности. Этого можно достичь требованием, чтобы функция  $|\omega| \hat{G}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$  была как можно более гладкой. Поскольку  $|\omega| \hat{G}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$  бесконечно дифференцируема везде за исключением точки  $\omega = 0$ , для достижения желаемой гладкости необходимо, чтобы  $\hat{G}(\omega_1, \omega_2)$  имела ноль достаточно высокого порядка в точке  $(0, 0)$ . Это означает наличие у  $G(x, y)$  достаточно большого числа нулевых моментов.

Приведенные выше рассуждения показывают, что самое большее, на что можно надеяться, это "почти" локально восстановить  $f * G(x, y)$ , где  $G(x, y)$  имеет достаточно большое количество нулевых моментов. Выбирая  $G(x, y)$  соответствующим образом, мы приходим к вейвлет-преобразованию функции  $f(x, y)$ .

Пусть  $\Psi(x, y)$  - допустимая вещественная вейвлет-функция, обладающая круговой симметрией и удовлетворяющая при некотором  $C > 0$  условию

$$|\hat{\Psi}(\omega_1, \omega_2)| \leq C(1 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})^{-2} \text{ при всех } (\omega_1, \omega_2) \in R^2.$$

Определим четную функцию  $\rho(s) = \rho(\theta, s)$  с помощью следующего соотношения:

$$\hat{\rho}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{\Psi}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta).$$

(в силу круговой симметрии эта функция не зависит от  $\theta$ ), тогда функция  $\rho(s)$  представляет собой допустимую вейвлет-функцию, и для любой функции  $f(x, y) \in L^1(R^2) \cap L^2(R^2)$  с конечным носителем

$$W_{\Psi} f(a, b_1, b_2) = a^{-1/2} \int_0^{2\pi} W_{\rho}[R_{\theta} f](a, b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) d\theta,$$

$$a > 0, b_1, b_2 \in R.$$

Таким образом, вейвлет-преобразование функции  $f(x, y)$  можно вычислить, применив оператор обратного проецирования к вейвлет-преобразованиям проекций  $R_{\theta} f(s)$ , используя допустимую вейвлет-функцию для каждого  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Справедливо также следующее утверждение.

Пусть  $\rho(s)$  - допустимая четная вещественная вейвлет-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\rho}(\omega)|^2}{\omega^3} d\omega < \infty.$$

Определим функцию  $\Psi(x, y)$  (обладающую круговой симметрией) соотношением

$$\hat{\Psi}(\omega_1, \omega_2) = 2\sqrt{2\pi} \frac{\hat{\rho}(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}},$$

тогда  $\Psi(x, y)$  является допустимой вейвлет-функцией, и

$$W_{\Psi} f(a, b_1, b_2) = a^{-1/2} \int_0^{2\pi} W_{\rho}[R_{\theta} f](a, b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) d\theta,$$

$$a > 0, b_1, b_2 \in R.$$

В данном утверждении вейвлет-функция  $\rho(s)$  фиксирована, и с помощью этой функции определяется вейвлет-функция  $\Psi(x, y)$ . Приведенные утверждения помогают понять, как вейвлет-преобразования можно использовать для обработки изображений и локализации задачи реконструкции. Для задач обработки изображений обычно заранее выбирается функция  $\Psi(x, y)$ , обладающая подходящими свойствами, а затем рассматриваются свойства  $\rho(s)$  (см. [12]). Для локализации нужна вейвлет-функция  $\rho(s)$  с маленьким носителем и достаточно большим числом нулевых моментов. В этом случае область, в которой функция  $\Psi(x, y)$  заметно отлична от нуля, будет иметь почти такой же радиус, что и носитель  $\rho(s)$ . Следовательно, вейвлет-преобразование функции  $f(x, y)$  можно вычислить локально, используя локальную информацию о преобразовании Радона.

После вычисления вейвлет-преобразования  $f(x, y)$  можно воспользоваться формулой обращения для непрерывного вейвлет-преобразования и получить саму функцию  $f(x, y)$ .

Степень локализации зависит от скорости убывания оператора  $I^{-1}$  от вейвлет-функции. Оценка этой скорости зависит от количества нулевых моментов у вейвлет-функции.

Если функция  $h(s)$  удовлетворяет следующим условиям:

1.  $h(s)$  имеет компактный носитель,

2.  $\int_{-\infty}^{\infty} s^j h(s) ds = 0$  при  $j = 0, \dots, m$  для некоторого  $m \geq 0$ ,

3.  $\int_{-\infty}^{\infty} |\omega^j \hat{h}^{(k)}(\omega)| d\omega < \infty$  при  $j = 0, 1$ , и  $k = 0, \dots, m+1$ , где  $\hat{h}^{(k)}(\omega)$  -  $k$ -я

производная  $\hat{h}(\omega)$ , и

4.  $\int_{-\infty}^{\infty} |\omega^j \hat{h}^{(k)}(\omega)|^2 d\omega < \infty$  при  $j = 0, 1$ , и  $k = 0, \dots, m+1$ ,

тогда

$$I^{-1}[h](s) = o(|s|^{-(m+1)}) \text{ и } |s| \rightarrow \infty,$$

и

$$s^{m+1} I^{-1}[h](s) \in L^2(R).$$

Первая формула показывает скорость убывания функции  $I^{-1}[h](s)$  для больших значений  $s$ , а вторая формула дает усредненную оценку убывания и показывает, что "энергия"  $I^{-1}[h](s)$  мала вдали от начала координат.

Опишем теперь процедуру реконструкции коэффициентов аппроксимации и коэффициентов детализации, участвующих в кратномасштабном анализе томографического изображения. Аппроксимацию функции изображения можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{J, m, n} \Phi_{J, m, n}(x, y) = \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{j^0, m, n} \Phi_{j^0, m, n}(x, y) + \sum_{l=1}^3 \sum_{j=j^0}^{J-1} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} b_{j, m, n}^{[l]} \Psi_{j, m, n}^{[l]}(x, y), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y),$$

$$\Psi^{[1]}(x, y) = \phi(x)\psi(y),$$

$$\Psi^{[2]}(x, y) = \phi(y)\psi(x),$$

$$\Psi^{[3]}(x, y) = \psi(x)\psi(y),$$

$$\Phi_{j^0, m, n}(x, y) = 2^{j^0} \Phi(2^{j^0} x - m, 2^{j^0} y - n),$$

$$\Psi_{j, m, n}^{[l]}(x, y) = 2^j \Psi^{[l]}(2^j x - m, 2^j y - n),$$

а  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  — масштабирующая функция и вейвлет-функция, ассоциированные с одномерным кратномасштабным анализом (см [2]). При этом

$$a_{j^0, m, n} = \langle f, \Phi_{j^0, m, n} \rangle, b_{j, m, n}^{[l]} = \langle f, \Psi_{j, m, n}^{[l]} \rangle$$

Пусть  $\Phi(x, y)$  и  $\Psi^{[l]}(x, y)$ ,  $l = 1, 2, 3$ , - соответственно масштабирующая функция и вейвлет-функции, ассоциированные с кратномасштабным анализом. Определим для каждого  $\theta \in [0, 2\pi)$  функции  $o_\theta(s)$  и  $\rho_\theta^{[l]}(s)$ ,  $l = 1, 2, 3$ , с помощью следующих соотношений:

$$\hat{o}_\theta(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{\phi}(\omega \cos \theta) \hat{\phi}(\omega \sin \theta),$$

$$\hat{\rho}_\theta^{[1]}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{\phi}(\omega \cos \theta) \hat{\psi}(\omega \sin \theta),$$

$$\hat{\rho}_\theta^{[2]}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{\psi}(\omega \cos \theta) \hat{\phi}(\omega \sin \theta),$$

$$\hat{\rho}_\theta^{[3]}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{\psi}(\omega \cos \theta) \hat{\psi}(\omega \sin \theta),$$

тогда

$$a_{j^0, m, n} = 2^{j^0/2} \int_0^{2\pi} W_{o_\theta} [R_\theta f](2^{-j^0}, 2^{-j^0} (m \cos \theta + n \sin \theta)) d\theta,$$

$$b_{j,m,n}^{[l]} = 2^{j/2} \int_0^{2\pi} W_{\rho_\theta^{[l]}} [R_\theta f](2^{-j}, 2^{-j}(m \cos \theta + n \sin \theta)) d\theta.$$

Важным обстоятельством является тот факт, что если вейвлет-функция  $\psi(x)$  имеет компактный носитель и достаточно большое число нулевых моментов, то функции  $\rho_\theta^{[l]}(s)$ ,  $l=1,2,3$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , существенно отличны от нуля только в области примерно такого же радиуса, что и радиус носителя вейвлет-функций  $\Psi^{[l]}(x, y)$ . Следовательно, при  $j = j^0, \dots, J-1$  и фиксированных  $m$  и  $n$  коэффициенты  $b_{j,m,n}^{[l]}$  можно вычислить достаточно точно, используя значения  $R_\theta f(s)$  при  $\theta \in [0, 2\pi)$  и  $s$  из интервала радиуса  $2^{-j}T$  с центром в точке  $2^{-j}(m \cos \theta + n \sin \theta)$ , где  $T$  - радиус области, в которой функции  $\Psi^{[l]}(x, y)$  существенно отличны от нуля. Эти значения  $R_\theta f(s)$  представляют собой проекции функции  $f(x, y)$  по прямым, проходящим в круге радиуса  $2^{-j}T$  с центром в точке  $(2^{-j}m, 2^{-j}n)$ . Радиус круга становится меньше с ростом  $j$ , т.е. для восстановления более мелких деталей изображения требуется более локальная информация, чем для восстановления крупных деталей. Зачастую в томографическом эксперименте представляют интерес именно мелкие детали. Это обстоятельство позволяет значительно снизить дозу облучения в процессе получения проекционных данных.

В реальном томографическом эксперименте регистрация проекций всегда происходит с некоторой случайной погрешностью, и непосредственное применение формул обращения преобразования Радона часто приводит к очень большим ошибкам, поскольку задача обращения преобразования Радона относится к классу некорректно поставленных задач. Классический подход к преодолению этой трудности заключается в применении линейной регуляризации по Тихонову (см., например, [24]). Верхняя часть спектра восстанавливаемой функции "подавляется" с помощью "окна", роль которого играет функция  $g_\theta(s)$ . При этом функция

$g_\theta(s)$  обычно выбирается независимой от  $\theta$ . Однако такой способ приводит к чрезмерному сглаживанию изображения, поскольку часто важная информация находится именно в верхней (высокочастотной) части спектра. Для того чтобы решить эту проблему, был разработан метод нелинейной регуляризации, основанный на пороговой обработке вейвлет-коэффициентов (см. [8]).

Определим функции  $o_{j^0,m,n}(\theta, s)$  и  $\rho^{[l]}_{j,m,n}(\theta, s)$ ,  $l=1,2,3$ , с помощью следующих соотношений:

$$\hat{o}_{j^0,m,n}(\theta, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{\Phi}_{j^0,m,n}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta),$$

$$\hat{\rho}^{[l]}_{j,m,n}(\theta, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{\Psi}^{[l]}_{j,m,n}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta),$$

и обозначим  $Rf(\theta, s) = R_\theta f(s)$ . Тогда с помощью теоремы о центральном сечении легко убедиться в том, что

$$a_{j^0,m,n} = \langle f, \Phi_{j^0,m,n} \rangle = \langle Rf, o_{j^0,m,n} \rangle,$$

$$b_{j,m,n}^{[l]} = \langle f, \Psi_{j,m,n}^{[l]} \rangle = \langle Rf, \rho_{j,m,n}^{[l]} \rangle.$$

Таким образом:

$$f(x, y) \approx \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Rf, o_{j^0,m,n} \rangle \Phi_{j^0,m,n}(x, y) +$$

$$+ \sum_{l=1}^3 \sum_{j=j^0}^{J-1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Rf, \rho_{j,m,n}^{[l]} \rangle \Psi_{j,m,n}^{[l]}(x, y).$$

Вспоминая определение функций  $\Phi_{j^0,m,n}(x, y)$  и  $\Psi_{j,m,n}^{[l]}(x, y)$ , можно убедиться в том, что

$$o_{j^0,m,n}(\theta, s) = 2^{j^0} o_{0,0,0}(\theta, 2^{j^0} s - m \cos \theta - n \sin \theta),$$

$$\rho_{j,m,n}^{[l]}(\theta, s) = 2^j \rho_{0,0,0}^{[l]}(\theta, 2^j s - m \cos \theta - n \sin \theta).$$

Таким образом, функции  $o_{j^0,m,n}(\theta, s)$  и  $\rho_{j,m,n}^{[l]}(\theta, s)$  в некотором смысле представляют из себя сдвиги и сжатия "базовых" функций  $o_{0,0,0}(\theta, s)$  и

$\rho_{0,0,0}^{[l]}(\theta, s)$ , как и в случае вейвлет-базисов. Также можно убедиться в том, что (см. [4] и [8])

$$\begin{aligned}\|o_{j^0, m, n}\| &= 2^{j^0/2} \|o_{0,0,0}\|, \\ \|\rho_{j, m, n}^{[l]}\| &= 2^{j/2} \|\rho_{0,0,0}^{[l]}\|.\end{aligned}$$

Как показывает это соотношение, с ростом  $j$  нормы функций  $\rho_{j, m, n}^{[l]}(\theta, s)$ , растут со скоростью  $2^{j/2}$ . Это и характеризует некорректность задачи реконструкции.

В практической ситуации проекционные данные регистрируются для дискретных отсчетов  $\{\theta_r\}_{r=0}^{M-1}$  и  $\{s_t\}_{t=1}^N$  по переменным  $\theta$  и  $s$ . Не ограничивая общности, будем полагать, что носителем функции, описывающей томографическое изображение, является круг единичного радиуса с центром в начале координат. Таким образом,  $\theta \in [0, \pi)$  и  $s \in [-1, 1]$ . Рассмотрим проекционные данные в виде

$$R_{\theta_r}^e f(s_t) = \int_{L(\theta_r, s_t)} f(x, y) dl + n_{r,t} = R_{\theta_r} f(s_t) + n_{r,t},$$

где прямая  $L(\theta, s)$ , как и раньше, задается уравнением

$$x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0,$$

а  $n_{r,t}$  - независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Для регуляризации метода реконструкции воспользуемся методом пороговой обработки с универсальным порогом.

В условиях приведенной модели эмпирические аналоги вейвлет-коэффициентов определяются следующими выражениями (см. [8]):

$$\begin{aligned}\langle Rf^e, o_{j^0, m, n} \rangle &\approx \frac{2\pi}{MN} \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{t=1}^N o_{j^0, m, n}(\theta_r, s_t) R_{\theta_r}^e f(s_t), \\ \langle Rf^e, \rho_{j, m, n}^{[l]} \rangle &\approx \frac{2\pi}{MN} \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{t=1}^N \rho_{j, m, n}^{[l]}(\theta_r, s_t) R_{\theta_r}^e f(s_t).\end{aligned}$$



Из такого определения следует, что коэффициенты распределены нормально со средними, приблизительно равными

$$E\langle Rf^e, o_{j^0, m, n} \rangle \approx \langle Rf, o_{j^0, m, n} \rangle = \langle f, \Phi_{j^0, m, n} \rangle,$$

$$E\langle Rf^e, \rho_{j, m, n}^{[l]} \rangle \approx \langle Rf, \rho_{j, m, n}^{[l]} \rangle = \langle f, \Psi_{j, m, n}^{[l]} \rangle,$$

и дисперсиями, приблизительно равными

$$D\langle Rf^e, o_{j^0, m, n} \rangle \approx \sigma^2 \left\| o_{j^0, m, n} \right\|^2 C_{M, N} = 2^{j^0} \sigma^2 \left\| o_{0, 0, 0} \right\|^2 C_{M, N},$$

$$D\langle Rf^e, \rho_{j, m, n}^{[l]} \rangle \approx \sigma^2 \left\| \rho_{j, m, n}^{[l]} \right\|^2 C_{M, N} = 2^j \sigma^2 \left\| \rho_{0, 0, 0}^{[l]} \right\|^2 C_{M, N},$$

где  $C_{M, N} = 2\pi/(MN)$ .

Последовательность функций

$$\{o_{j^0, m, n}(\theta, s), \rho_{j, m, n}^{[l]}(\theta, s)\}_{j^0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$$

образует в пространстве  $L^2(T)$ , где  $T = [0, \pi) \times R$ , устойчивый базис (базис Рисса) (см., например, [8]). Как показано в [4], это означает, что эмпирические коэффициенты можно считать практически независимыми. Таким образом, эмпирические коэффициенты моделируются выражениями

$$\langle Rf^e, o_{j^0, m, n} \rangle \approx \langle Rf, o_{j^0, m, n} \rangle + m'_{j^0, m, n} = \langle f, \Psi_{j^0, m, n}^{[l]} \rangle + m'_{j^0, m, n},$$

$$\langle Rf^e, \rho_{j, m, n}^{[l]} \rangle \approx \langle Rf, \rho_{j, m, n}^{[l]} \rangle + n'^{[l]}_{j, m, n} = \langle f, \Psi_{j, m, n}^{[l]} \rangle + n'^{[l]}_{j, m, n},$$

где

$$m'_{j^0, m, n} : N(0, 2^{j^0} \sigma^2 \left\| o_{0, 0, 0} \right\|^2 C_{M, N})$$

и

$$n'^{[l]}_{j, m, n} : N(0, 2^j \sigma^2 \left\| \rho_{0, 0, 0}^{[l]} \right\|^2 C_{M, N})$$

независимы. Основной отличительной особенностью этой модели является то обстоятельство, что дисперсия (уровень шума) не является постоянной и зависит от масштаба  $j$ , что является прямым следствием некорректности задачи реконструкции.

Увеличение уровня шума указывает на то, что использование пороговой обработки с одинаковым порогом на всех масштабах  $j$  не является адекватным. Вместо этого следует использовать свой порог на каждом масштабе. В частности, если для описания изображения на каждом масштабе  $j$  для каждого вида вейвлет-функций используется  $2^j \times 2^j$  коэффициентов (как, например, в [8]), то, пользуясь методикой получения универсального порога, мы приходим к порогам

$$T_{j^0}^{[0]} = 2^{j^0/2} [2 \log(2^{2j^0})]^{1/2} \sigma \|o_{0,0,0}\| C_{M,N}^{1/2},$$

$$T_j^{[l]} = 2^{j/2} [2 \log(2^{2j})]^{1/2} \sigma \|o_{0,0,0}^{[l]}\| C_{M,N}^{1/2}, \quad j = j^0, \dots, J-1.$$

Таким образом, окончательно мы приходим к следующему регуляризованному варианту формулы для представления функции  $f$  :

$$f(x, y) \approx \sum_{m,n \in Z} d_{T_{j^0}^{[0]}}(\langle Rf^e, o_{j^0, m, n} \rangle) \Phi_{j^0, m, n}(x, y) + \sum_{l=1}^3 \sum_{j=j^0}^{J-1} \sum_{m,n \in Z} d_{T_j^{[l]}}(\langle Rf^e, \rho_{j, m, n}^{[l]} \rangle) \Psi_{j, m, n}^{[l]}(x, y),$$

где  $d_{T_{j^0}^{[0]}}(z)$  и  $d_{T_j^{[l]}}(z)$  - функции жесткой или мягкой пороговой обработки с порогами  $T_{j^0}^{[0]}$  и  $T_j^{[l]}$ .

Предложенный здесь метод регуляризации учитывает тот факт, что в верхней части спектра изображения может содержаться важная информация (мелкие детали, резкие границы), поскольку коэффициенты при высокочастотных компонентах (для больших  $j$ ) обнуляются не в любом случае (как при линейной регуляризации по Тихонову), а только если они не превосходят по своей абсолютной величине заданного порога.

Помимо регуляризации пороговая обработка также позволяет осуществить компрессию изображения, поскольку коэффициенты, имеющие небольшие абсолютные значения, обнуляются, и надобность в их хранении отпадает.

### 3.2 Вейвлет-разложения сигнала, пропущенного через линейный однородный оператор

Во многих прикладных задачах анализа телекоммуникационного трафика, физики плазмы, компьютерной томографии, астрономии и других областей данные (представляющие собой некоторый сигнал) измеряются не напрямую, а после прохождения через некоторый линейный оператор (например, через некоторый линейный фильтр). Кроме того, в измерениях всегда присутствует шум, обусловленный несовершенством оборудования и различными случайными помехами.

Таким образом, рассматривается следующая модель:

$$X_i = (Kf)_i + \varepsilon_i,$$

где индекс  $i$  обозначает номер отсчета измеряемого сигнала,  $X_i$  - наблюдаемые данные,  $K$  - некоторое линейное преобразование,  $f$  - истинная (незашумленная) функция сигнала, а  $\varepsilon_i$  - случайные погрешности измерения. Будем предполагать, что все  $\varepsilon_i$  независимы и имеют одинаковое гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

В последние десятилетия значительно возросла популярность нелинейных методов обработки сигналов и изображений с помощью аппарата вейвлет-анализа. Объясняется это тем, что вейвлет-анализ позволяет гораздо более эффективно исследовать нестационарные сигналы, чем традиционный Фурье-анализ. Мы предполагаем, что линейный преобразователь  $K$ , через который проходит сигнал, является однородным с показателем  $\alpha$ , т.е.

$$K[f(a(x - x_0))] = a^{-\alpha} (Kf)[a(x - x_0)]$$

для любого  $x_0$  и любого  $a > 0$ , и рассматриваем метод представления сигнала, предложенный в работе [34] и получивший название вейвлет-вейвлет разложение (Vaguelette-Wavelet Decomposition). Примерами однородных линейных преобразований служат оператор интегрирования, преобразование Абеля и некоторые виды операторов свертки.

В работе [4] предложен метод вейвлет-вейглет разложения сигнала, идея которого заключается в представлении функции сигнала  $f \in L^2(\mathbb{R})$  в виде ряда из сдвигов и растяжений некоторой вейвлет-функции  $\psi$  :

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

где  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$  (семейство  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  образует ортонормированный базис в  $L^2(\mathbb{R})$ ). Индекс  $j$  называется масштабом, а индекс  $k$  - сдвигом. Функция  $\psi$  должна удовлетворять определенным требованиям (см. [11]), однако ее можно выбрать таким образом, чтобы она обладала некоторыми полезными свойствами, например имела компактный носитель, была дифференцируемой нужное число раз и имела заданное число  $M$  нулевых моментов, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, M-1.$$

Мы предполагаем выполнение некоторых условий гладкости. Будем считать, что функция  $Kf \in L^2(\mathbb{R})$  задана на конечном отрезке  $[a, b]$  и равномерно регулярна по Липшицу с некоторым параметром  $\gamma > 0$ , т.е. (см. [11]) существует константа  $L > 0$  и полином  $P_y$  степени  $n = \lfloor \gamma \rfloor$  такой, что для любого  $y \in [a, b]$  и любого  $x \in \mathbb{R}$

$$|Kf(x) - P_y(x)| \leq L|x - y|^\gamma.$$

Для таких функций известно, что если вейвлет-функция  $M$  раз непрерывно дифференцируема ( $M \geq \gamma$ ), имеет  $M$  нулевых моментов и быстро убывает на бесконечности вместе со своими производными, т.е. для всех  $0 \leq k \leq M$  и любого  $m \in \mathbb{N}$  найдется константа  $C_m$ , что при всех  $x \in \mathbb{R}$

$$|\psi^{(k)}(x)| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m},$$

то найдется такая константа  $C > 0$ , что

$$\langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \leq \frac{C}{2^{j(\gamma+1/2)}}.$$

Причем, как правило, в рассматриваемых задачах линейное преобразование  $K$  обладает тем свойством, что функция  $Kf$  оказывается более гладкой, чем функция  $f$ . Таким образом, ограничения на гладкость  $f$  могут быть менее жесткими.

Поскольку наблюдается не сигнал  $f$ , а его линейное преобразование  $Kf$ , коэффициенты разложения вычислить напрямую нельзя. В работе [4] предлагается использовать последовательность функций  $\xi_{j,k}$  (получивших название «вейглеты») таких, что

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \langle Kf, \xi_{j,k} \rangle.$$

Если преобразование  $K$  однородно, то функции  $\xi_{j,k}$  так же представляют собой сдвиги и растяжения некоторой функции  $\xi$  (см. [4]). При этом семейство  $\{\xi_{j,k}\}$  уже не обладает свойством ортонормированности, однако образует устойчивый базис, т.е. существуют такие константы  $0 < A \leq B < \infty$ , что

$$A \sum_{j,k} c_{j,k}^2 \leq \left\| \sum_{j,k} c_{j,k} \xi_{j,k} \right\|^2 \leq B \sum_{j,k} c_{j,k}^2$$

для всех квадратично суммируемых последовательностей  $\{c_{j,k}\}$ .

Иногда это свойство называют «почти ортогональностью».

В работе [34] предложен альтернативный метод, получивший название вейглет-вейвлет разложения сигнала. В этом методе в ряд по функциям  $\psi_{j,k}$  раскладывается не функция сигнала  $f$ , а ее линейное преобразование  $Kf$ :

$$Kf = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Здесь для удобства мы не изменили обозначения для функций  $\psi_{j,k}$ , но в общем случае они отличаются от функций  $\psi_{j,k}$  в вейвлет-вейглет разложении.

Заметим, что если преобразование  $K$  однородно, то  $K^{-1}$  тоже однородно. Действительно, пусть  $K$  однородно с показателем  $\alpha$ . Положим  $g = Kf$ , тогда

$$\begin{aligned} K^{-1}[g(a(x-x_0))] &= K^{-1}[(Kf)[a(x-x_0)]] = a^\alpha K^{-1}[K[f(a(x-x_0))]] = \\ &= a^\alpha f(a(x-x_0)) = a^\alpha (K^{-1}g)[a(x-x_0)]. \end{aligned}$$

Откуда  $K^{-1}$  однородно с показателем  $-\alpha$ .

Далее, пусть  $\beta_{j,k} = \|K^{-1}\psi_{j,k}\|$ . Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{j,k} &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (K^{-1}[2^{j/2}\psi(2^j x - k)])^2 dx \right)^{1/2} = 2^{j/2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (2^{\alpha j} (K^{-1}\psi)[2^j x - k])^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= 2^{(1/2+\alpha)j} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} ((K^{-1}\psi)[2^j x - k])^2 dx \right)^{1/2} = 2^{\alpha j} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} ((K^{-1}\psi)[y])^2 dy \right)^{1/2} = 2^{\alpha j} \beta_{0,0}. \end{aligned}$$

Функция  $f$  представляется в виде ряда

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle u_{j,k},$$

где  $u_{j,k} = K^{-1}\psi_{j,k}/\beta_{j,k}$  (по аналогии с предыдущим методом функции  $u_{j,k}$  также называются «вейглетами»). Последовательность  $\{u_{j,k}\}$  не образует ортонормированную систему, однако если выполнены некоторые условия гладкости на  $K^*\psi$  и  $K^{-1}\psi$ , а именно: существуют такие константы  $A_i > 0$ ,  $a_i > 0$  и  $b_i > 1$  ( $i=1,2$ ), что

$$\hat{K}^{-1}\psi(\omega) \leq A_1 |\omega|^{a_1} (1 + |\omega|^2)^{-(b_1+a_1)/2}$$

и

$$\hat{K}^*\psi(\omega) \leq A_2 |\omega|^{a_2} (1 + |\omega|^2)^{-(b_2+a_2)/2}$$

то последовательность  $\{u_{j,k}\}$  образует устойчивый базис.

При практической реализации метода вместо ряда функция  $Kf$  аппроксимируется конечной суммой следующего вида

$$Kf = \langle Kf, \varphi_{0,0} \rangle \varphi_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

где  $\varphi_{0,0}$  - так называемая масштабирующая функция, которая фактически описывает среднее значение измеряемых данных (см. [4]).

Соответственно, функция сигнала задается формулой

$$f = \langle Kf, \varphi_{0,0} \rangle K^{-1} \varphi_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle u_{j,k}.$$

Поскольку в измерениях присутствует шум, необходимо использовать некоторые процедуры для его удаления. Мы рассмотрим процедуру мягкой пороговой обработки с порогом  $T_j = \sqrt{2 \ln 2^j} \sigma$ . В результате функция сигнала  $f$  оценивается следующим образом:

$$\hat{f} = X_{0,0}^A K^{-1} \varphi_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{j,k} d_{T_j} (X_{j,k}^W) u_{j,k},$$

где  $X_{0,0}^A$  представляет собой зашумленный коэффициент при  $K^{-1} \varphi_{0,0}$ , а  $X_{j,k}^W$  - зашумленные вейвлет-коэффициенты. Коэффициент  $X_{0,0}^A$  обычно не подвергается пороговой обработке, так как входит в ту часть оценки, которая описывает среднее значение измеряемых данных, и дисперсия шума в этом коэффициенте много меньше его абсолютного значения, поэтому мы не рассматриваем его влияние, полагая, что  $X_{0,0}^A = \langle Kf, \varphi_{0,0} \rangle$ , т.е. что  $X_{0,0}^A$  не содержит шума.

#### 4 Заключение

На первом этапе были получены следующие результаты:

- Аналитический обзор.

- Новые постановки задач анализа и обработки стохастических сигналов и изображений.
- Методы построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный фильтр.

Проведен анализ методов выбора порога для нелинейной регуляризации сигналов и изображений.

На примере кардиограмм и финансовых временных рядов продемонстрированы преимущества использования вейвлет-анализа при обработке нестационарных сигналов. Описаны методы построения доверительных интервалов для ритмограмм, позволяющий удалять эктопические импульсы.

Описаны возможности применения вейвлет-разложения для локализации реконструкции томографических изображений и подавления шума.

Предложены методы построения оценок сигналов и изображений, пропущенных через линейный однородный фильтр, основанные на вейвлет-вейвлет разложении. Показано, что при определенном выборе вейвлет-базиса соответствующий вейвлет-базис оказывается устойчивым.



## **Список использованных источников**

1. Berenstein C.A., Walnut D. Wavelets and local tomography//Wavelets in Medicine and Biology, A. Aldroubi and M. Unser (eds.). CRC Press. 1996. P. 231–261.
2. Boggess A., Narkowich F. A First Course in Wavelets with Fourier Analysis. Prentice Hall, 2001.
3. Chang S.G., Yu B., Vetterli M. Adaptive Wavelet Thresholding for image Denoising and Compression//IEEE Trans. Image Processing. 2000. 9. N 9. P. 1532–1546.
4. Donoho D. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition//Appl. Comput. Harm. Anal. 1995. 2. P. 101–126.
5. Donoho D., Johnstone I. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage//J. Am. Statist. Assoc. 1995. 90. P. 1200–1224.
6. Donoho D., Johnstone I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage//Biometrika. 1994. 81. P. 425–455.
7. Hoaglin D., Tukey J., Mosteller F. Understanding Robust and Exploratory Data Analysis. John Wiley and Sons, 1983.
8. Kolaczyk E.D. A wavelet shrinkage approach to tomographic image reconstruction//J. Am. Statist. Assoc. 1996. 91. P. 1079–1090.
9. Kozakevicius A.J., Rodrigues C.R., Nunes R.C., Guerra Gilho R. Adaptive ECG Filtering and QRS Detection using Orthogonal Wavelet Transform//Proceedings of IASTED International Conference on BioMedical Engineering. 2005. P. 109–114.
10. Mallat S. A wavelet tour of signal processing, Second Edition. Academic Press, 1999.
11. Mallat S. Zero-crossings of a wavelet transform//IEEE Trans. Inform. Theory. 1991. 37. N 4. P. 1019–1033.

12. Mallat S., Zhong S. Wavelet transform maxima and multiscale edges//Wavelets and their Applications, M.B. Ruskai et al. (eds.). Jones and Bartlett Publishers. 1992. P. 67–104.
13. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1988.
14. Powell K.J., Sapatinas T., Bailey T.C., Krzanowski W.J. Application of wavelets to the Pre-processing of underwater sounds//Statistics and Computing. 1995. 5. P. 265–273.
15. Rashid-Farokhi F., Lin K.J.R., Berenstein C.A., Walnut D. Wavelet-based Multiresolution Local Tomography//IEEE Ttrans. Image Processing. 1997. 6. N 10. P. 1412–1430.
16. Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution//Ann. Statist. 1981. 9. N 6. P. 1135–1151.
17. Vidacovic B., Ruggeri F. BAMS method: theory and simulations//Sankhya. Ser. B. 2001. 63. N 2. P. 234–249.
18. Vidacovic B. Statistical Modeling by Wavelets. Wiley and Sons, 1999.
19. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения//УФН. 1996. 166. С. 11–45.
20. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000.
21. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
22. Лидбеттер М., Линдгрэн Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
23. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974.
24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
25. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989.

26. Malik M. Heart rate variability // *European Heart Journal*, volume 17, number 3, 1996, pp. 354–381.
27. Azuaje F., Clifford G., McSharry P. *Advanced methods and tools for ECG data analysis*. Artech House Publishers, 2005.
28. Clifford G., McSharry P., Tarassenko L. Characterizing artefact in the normal human 24-hour RR time series to aid identification and artificial replication of circadian variations in human beat to beat heart rate using a simple threshold // *Computers in Cardiology*, 2002, pp. 129–132.
29. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. *Математическая статистика*. Высш. шк., 1984.
30. Хьюбер П. *Робастность в статистике*. Мир, 1984.
31. Andrews D. A robust method for multiple linear regression // *Technometrics*, volume 16, number 4, 1974, pp. 523–531.
32. Ferraz-Mello S. Estimation of Periods from Unequally Spaced Observations // *The Astronomical Journal*, volume 86, number 4, 1981, pp. 619–624.
33. Foster G. The cleanest Fourier spectrum // *The Astronomical Journal*, volume 109, number 4, 1995, pp. 1889–1902.
34. Abramovich F., Silverman B. W. Wavelet Decomposition Approaches to Statistical Inverse Problems // *Biometrika*, 1998. Vol. 85. No. 1. P. 115–129.
35. Захарова Т.В., Шестаков О.В. *Вейвлет-анализ и его приложения*. М.: МАКС Пресс. 2009. 152 С.
36. Маркин А.В., Шестаков О.В. Отсев эктопических импульсов из ритмограммы с использованием робастных оценок // *Информатика и ее применения*. 2008. Т 2. № 2. С. 47-54.
37. Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. Асимптотика оценки риска при вейвлет-вейвлет разложении наблюдаемого сигнала // *T-Comm — Телекоммуникации и Транспорт*. 2011. №2 С. 54-57.
38. *Bashforth F, Adams JC. An attempt to test the theory of capillary action*. Cambridge, 1892.

39. *Blaisdell BE*. The Physical Properties of Fluid Interfaces of Large Radius of Curvature, *J. Math Phys* 1940; 19:186.
40. *Tawde NR, Parvatikar KG*. Unstable pendant drops in relation to drop-weight method of surface tension. *Indian J Phys* 1958;32:174.
41. *Fordham S*. On the Calculation of Surface Tension from Measurements of Pendant Drops. *Proc R Soc Lond* 1948;194A:1.
42. *Mills OS*. Tables for use in the measurement of interfacial tensions between liquids with small density differences. *Br J Appl Phys* 1953;4:24.
43. *Paddy JF*. In: Matijevic E, editor. Surface Tension. Part II. The Measurement of Surface Tension, vol.1. New York: Wiley; 1968.
44. *Hartland S, Hartley RW*. Axisymmetric fluid–liquid interfaces. Amsterdam: Elsevier; 1976.
45. *Maze C., Burnet G*. A Non-linear Regression Method for Calculating the Surface Tension and Contact Angle from the Shape of a Sessile Drop // *Surf. Sci.* 1969. V. 13. P. 451.
46. *Huh C, Reed RL*. *J Colloid Interface Sci* vol. 91, 1983, p. 472.
47. *Boyce JF, Schürch S, Rotenberg Y, Neumann AW*. The measurement of surface and interfacial tension by the axisymmetric drop technique. *Colloids Surf.* Vol. 9, , 1984, p. 307.
48. The determination of interfacial tension by video image processing of pendant fluid drops / Anastasiadis SH, Chen JK, Koberstein JT, et al. *J Colloid Interface Sci*, vol. 119, p. 55, 1986.
49. *Hoggs RV*. An introduction to robust estimation. New York: Academic Press; 1979.
50. *Rotenberg Y, Boruvka L, Neumann AW*. Determination of surface tension and contact angle from the shapes of axisymmetric fluid interfaces. *J Colloid Interface Sci*, vol. 93, 1983, p. 169.
51. Automation of axisymmetric drop shape analysis for measurements of interfacial tensions and contact angles / Cheng P, Li D, Boruvka L, Rotenberg Y, Neumann AW. *Colloids Surf.* vol. 43, 1990, p. 151.
52. *Cheng P, Neumann AW*. Computational evaluation of axisymmetric drop shape analysis-profile (ADSA-P). *Colloids Surf* vol. 62, 1992, p. 297.
53. *del Río OI, Neumann AW*. Axisymmetric drop shape analysis: Computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops. *J Colloid Interface Sci.* vol. 196, 1997, p. 136.
54. *Dormand, J.R., Prince, P.J.*, A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6 (1): 19–26 (1980).
55. *Canny, J.*, A Computational Approach To Edge Detection // *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, 1986.