И.В.Рублев

Обобщенные формулы Хопфа для неавтономного уравнения Гамильтона-Якоби

1. Введение

В данной работе изучается следующая задача Коши для уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+H\left(t,\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)=0,\quad (t,x)\in G=(0,T)\times R^n,$$
$$V(T,x)=\varphi(x),\quad x\in R^n. \tag{1.1}$$

Такие уравнения возникают в частности для задач теории оптимального управления с интегрально-терминальным функционалом вида

$$\dot{x}=f(\tau,u),\ \ u(\tau)\in P(\tau),\ \ 0\le\tau,t\le T,\ \ x(t)=\xi,$$
$$\int_t^T h(\tau,u)d\tau+\varphi(x(T))\to\inf_{u(\cdot)}, \tag{1.2}$$
$$V(t,\xi)=\inf_{u(\cdot)}\{\int_t^T h(\tau,u)d\tau+\varphi(x(T))\}.$$

Известно, что функция цены $V(t,x)$ в соответствующих задачах является обобщенным решением уравнения Гамильтона-Якоби. При этом существует много эквивалентных способов введения понятия обобщенного решения. Здесь мы будем пользоваться понятием минимаксных решений ([1], [2]).

Задача (1.1) уже изучалась в работах [3] и [4]. При этом решение было представлено через многозначный интеграл. В данной работе предпочтение отдано представлению решения (1.1) как решения некоторой задачи конечномерной оптимизации. Такая форма представления достаточно удобна как для теоретических исследований, так и для численных расчетов. К классическим формулам такого вида относится формула Хопфа ([5]). Последняя применима лишь в случае, когда гамильтониан уравнения $H(t,x,s)$ не зависит ни от времени t, ни от пространственных координат x. Изучаемая здесь формула снимает в какой-то мере ограничение независимости гамильтониана от времени и является естественным обобщением классической формулы Хопфа. При этом платой за это является то, что класс функций φ, входящих в краевое условие, для которых соответствующая формула определяет решение задачи Коши, является лишь подмножеством класса выпуклых функций и зависит, конечно, от гамильтониана.

Итак, если функция φ выпукла, то при определенных условиях на гамильтониан уравнения $H(t,s)$ справедлива формула

$$V(t,x)=\sup_{s\in R^n}\left((s,x)+\int_t^T H(\tau,s)d\tau-\varphi^*(s)\right),\quad (t,x)\in\overline{G}, \tag{1.3}$$

где $V(t,x)$ – решение задачи (1.1). Здесь φ^* обозначает сопряженную по Фенхелю к φ функцию ([6]). Очевидно, что в случае, когда $H(t,s)\equiv H^0(s)$, (1.3) сводится к классической формуле, полученной Хопфом ([5]). К сожалению, в отличие от классического случая, в ситуации, когда рассматривается задача (1.1), выпуклость требуется не только от функции φ, но и от самого гамильтониана на так называемом множестве максимизаторов, то есть тех s, которые доставляют в (1.3) супремум. Ниже будет показано, что в классическом случае последнее условие выполняется автоматически. Здесь также будут приведены достаточные условия того, чтобы (1.3) определяла минимаксное решение (1.1) для всех выпуклых функций φ. В частности, для этого достаточно, чтобы гамильтониан $H(t,s)$ был выпуклым или вогнутым по s. Этот случай относится к задачам оптимального управления вида (1.2), и поэтому формула (1.3) может быть по существу получена средствами выпуклого анализа. Заметим, что в работе [4] для гамильтониана $H(t,s)$, вогнутого по s, показано, что формула, определенная с помощью многозначного интеграла, приводится к формуле (1.3). В общем случае, когда рассматривается произвольный гамильтониан $H(t,s)$, формула (1.3) представляет собой лишь нижнее решение, то есть оценку снизу решения (1.1).

Кроме того, рассматривается следующая задача Коши для уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\begin{gathered}\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+H\left(t,V(t,x),\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)=0, \quad (t,x)\in G,\\ V(T,x)=\varphi(x), \quad x\in R^n.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Такие уравнения возникают для задач оптимального управления с чебышевским функционалом вида

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(\tau,u), \ \ u(\tau)\in P(\tau), \ \ 0\le\tau,t\le T, \ \ x(t)=\xi,\\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\le\tau\le T} h(\tau,u)\vee\varphi(x(T))\to\inf_{u(\cdot)},\\ V(t,\xi)=\inf_{u(\cdot)}\{\operatorname*{ess\,sup}_{t\le\tau\le T} h(\tau,u)\vee\varphi(x(T))\}.\end{gathered}$$

Здесь $a\vee b$ обозначает $\max\{a,b\}$. Дополнительные подробности о задачах такого вида изложены в работе [7]. Полученная здесь формула является естественным обобщением формулы типа Лакса-Хопфа, полученной в работе [8]. Условия, при которых соответствующая формула Хопфа определяет решение задачи (1.4), аналогичны условиям для формулы (1.3).

2. Обобщенные формулы Хопфа

Будем рассматривать уравнение Гамильтона-Якоби вида (1.1):

$$\begin{gathered}\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+H\left(t,\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)=0, \quad (t,x)\in G,\\ V(T,x)=\varphi(x), \quad x\in R^n,\end{gathered}$$

где $G=(0,T)\times R^n$.

Сформулируем основные предположения, касающиеся $H(t,s)$ и $\varphi(x)$.

(A) Функция $\varphi:R^n\to R$ выпукла;

(B) Функция $H:(0,T)\times R^n\to R$ непрерывна по t на $(0,T)$ для любого $s\in R^n$ и

(i) для всех $(t,s)\in(0,T)\times S$, где $S=\{s\in R^n:\|s\|=1\}$, существует $\lim_{r\downarrow 0} rH(t,s/r)=H_0(t,s)$, при этом $H_0(\cdot,s)$ непрерывна на $(0,T)$ для любого $s\in S$;

(ii) для любых $t\in(0,T)$, $(s',r'),(s'',r'')\in\overline{B}_+$ выполнено

$$\left|r'H(t,s'/r')-r''H(t,s''/r'')\right|\le L\cdot(\|s'-s''\|^2+(r'-r'')^2)^{1/2},$$

где $\overline{B}_+=\{(s,r)\in R^n\times R:\|s\|^2+r^2\le 1, r>0\}$;

(iii) для всех $s\in R^n$ функция $H(\cdot,s)$ суммируема на $(0,T)$.

Прежде чем перейти к основным результатам, приведем определения минимаксных решений из [1]. Введем следующие многозначные отображения

$$\overline{F}_{\hat{A}}(t,q)=\{(f,g)\in\sqrt{2}L\cdot\overline{B}:(q,f)+g\ge H(t,q)\},$$

$$\overline{F}_{\hat{I}}(t,p)=\{(f,g)\in\sqrt{2}L\cdot\overline{B}:(p,f)+g\le H(t,p)\}.$$

Здесь $\overline{B}=\{(s,r)\in R^n\times R:\|s\|^2+r^2\le 1\}$. Тогда из [1] известно, что при всех $p,q\in R^n$ отображения $\overline{F}_{\hat{A}}(t,q)$ и $\overline{F}_{\hat{I}}(t,p)$ полунепрерывны сверху, принимают непустые выпуклые компактные значения и

$$\begin{aligned}&\sup_{q\in R^n}\min\{(s,f)+g\mid(f,g)\in\overline{F}_{\hat{A}}\}=H(t,s),\\&\inf_{p\in R^n}\max\{(s,f)+g\mid(f,g)\in\overline{F}_{\hat{I}}\}=H(t,s).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Определение 2.1. *Полунепрерывная снизу функция $V(t,x)$ называется верхним минимаксным решением (1.1), если $V(T,x)\ge\varphi(x)$ и*

$$\sup_{q\in R^n}\min\{\partial^-_{1,f}V(t,x)+g\mid(f,g)\in\overline{F}_{\hat{A}}(t,q)\}\le 0,\quad (t,x)\in G.$$

Полунепрерывная сверху функция $V(t,x)$ называется нижним минимаксным решением (1.1), если $V(T,x)\le\varphi(x)$ и

$$\inf_{p\in R^n}\max\{\partial^+_{1,f}V(t,x)+g\mid(f,g)\in\overline{F}_{\hat{I}}(t,p)\}\ge 0,\quad (t,x)\in G.$$

Непрерывная функция $V(t,x)$ называется минимаксным решением (1.1), если она является нижним и верхним решением (1.1) одновременно.

Здесь $\partial^-_{1,f}V(t,x)$ и $\partial^+_{1,f}V(t,x)$ обозначают нижнюю и верхнюю производную по направлению $(1,f)$ соответственно, которые определяются из следующих соотношений:

$$\partial^-_{1,f}V(t,x)=\liminf_{\delta\to 0,g\to f}[V(t+\delta,x+\delta g)-V(t,x)]/\delta,$$

$$\partial^+_{1,f}V(t,x)=\limsup_{\delta\to 0,g\to f}[V(t+\delta,x+\delta g)-V(t,x)]/\delta.$$

Перейдем теперь непосредственно к обобщенной формуле Хопфа. Введем для удобства следующее

Определение 2.2. *Пусть задано множество $S\subset R^n$. Будем называть функцию $\sigma:\mathrm{co}\,S\to R$ псевдовыпуклой на S, где $\mathrm{co}\,S$ есть выпуклая оболочка S, если для любых $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\ge 0$ таких, что $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$, а также любых $s_1,s_2,\ldots,s_{n+1}\in S$ выполнено неравенство*

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i\right)\le\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\sigma(s_i).$$

Замечание 2.1. *В определении 2.2 множество S может быть и невыпуклым. Если же S выпукло, то определения выпуклости и псевдовыпуклости эквивалентны.*

При помощи теоремы Каратеодори нетрудно показать, что справедлива следующая

Лемма 2.1. *Если функция $\sigma : \operatorname{co} S \to R$ псевдовыпукла на $S \subset R^n$, тогда для любого натурального N, любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \geq 0$ таких, что $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, а также любых $s_1, s_2, \dots, s_N \in S$ выполнено*

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i s_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sigma(s_i).$$

Замечание 2.2. *Если в определении 2.2 множество $S \subset R^n$ является компактом, а функция σ непрерывна, тогда для любой вероятностной меры π с носителем в S выполнено неравенство*

$$\int_S \sigma(s)\pi(ds) \geq \sigma\left(\int_S s\pi(ds)\right).$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (A) и (B).*

1) *Предположим, что функция φ липшицева. Определим множество максимизаторов*

$$S_0(t,x) = \{s \in R^n : (s,x) + \int_t^T H(\tau,s)d\tau - \varphi^*(s) =$$

$$= \sup_{s \in R^n}\left((s,x) + \int_t^T H(\tau,s)d\tau - \varphi^*(s)\right)\}.$$

При вышеуказанных условиях формула (1.3)

$$V(t,x) = \sup_{s \in R^n}\left((s,x) + \int_t^T H(\tau,s)d\tau - \varphi^*(s)\right), \quad (t,x) \in \overline{G}$$

определяет непрерывное нижнее решение уравнения (1.1). Для того, чтобы (1.3) являлась верхним решением (а значит, и просто решением) необходимо и достаточно, чтобы для любых $(t,x) \in G$ функция $H(t,\cdot)$ была псевдовыпукла на $S_0(t,x)$. Формула (1.3) может быть записана в виде:

$$V(t,x) = \left(\varphi^*(s) - \int_t^T H(\tau,s)d\tau\right)^*(x).$$

2) *Для произвольной выпуклой φ формула (1.3) определяет непрерывное нижнее решение. Для того, чтобы (1.3) представляла решение (1.1) для произвольных выпуклых φ, достаточно, чтобы она определяла решение (1.1) для всех выпуклых липшицевых φ.*

Доказательство:

В доказательстве теоремы 2.1 мы будем следовать [1]. Очевидно, что $V(T,x) = \varphi(x)$ в силу теоремы двойственности. Докажем сначала первую часть теоремы, когда φ липшицева и выпукла. Согласно теореме (13.3.3) из [6] $\operatorname{dom}\varphi^*$ является ограниченным. Тогда $S_0(t,x)$ в силу замкнутости φ^* является непустым компактом. С помощью леммы 5.1 из [1] можно показать, что $V(t,x)$ непрерывна, липшицева для любой ограниченной выпуклой области $D \subset G$ и

$$\partial_{1,f} V(t,x) = \max[(s,f) - H(t,s) \mid s \in S_0(t,x)].$$

Покажем, что формула (1.3) определяет нижнее решение. Для всех $(t,x) \in G$

$$\inf_p \max\{\partial_{1,f} V(t,x) + g \mid (f,g) \in \overline{F}_l\ (t,p)\} \geq$$

$$\inf_p \max\{(s,f) + g - H(t,s) \mid (f,g) \in \overline{F}_l\ (t,p)\} = 0.$$

Последнее выполнено в силу (2.1).

Далее выведем необходимое и достаточное условие для того, чтобы формула (1.3) определяла верхнее решение. Итак, $S_0(t,x)$ непустой компакт, тогда пусть $\Pi = \Pi(S_0(t,x))$ – класс вероятностных мер с носителем в $S_0(t,x)$. Легко показать, что если задана непрерывная функция $f : S_0(t,x) \to R$, то

$$\max_{s \in S_0(t,x)} f(s) = \max_{\pi \in \Pi}\{ \int_{S_0(t,x)} f(s)\pi(ds)\}.$$

Тогда, согласно предыдущему,

$$\sup_q \min\{\partial_{1,f} V(t,x) + g \mid (f,g) \in \overline{F}_A(t,q)\} =$$

$$\sup_q \min_{(f,g) \in \overline{F}_A} \max_{\pi \in \Pi}\{ \int_{S_0(t,x)} ((s,f) + g - H(t,s))\pi(ds)\} =$$

$$\sup_q \min_{(f,g) \in \overline{F}_A} \max_{\pi \in \Pi}\{(s_\pi, f) + g - \int_{S_0(t,x)} H(t,s)\pi(ds)\},$$

где $s_\pi = \int_{S_0(t,x)} s\pi(ds)$. Пусть

$$\Theta((f,g),\pi) = (s_\pi, f) + g - \int_{S_0(t,x)} H(t,s)\pi(ds),$$

$(f,g) \in \overline{F}_A(t,q)$, $\pi \in \Pi$. Тогда Θ линейно по (f,g) и π, а множества $\overline{F}_A(t,q)$ и Π – выпуклые компакты, поэтому применима теорема о минимаксе, откуда

$$\sup_q \min\{\partial_{1,f} V(t,x) + g \mid (f,g) \in \overline{F}_A(t,q)\} =$$

$$\max_{\pi \in \Pi} \sup_q \min_{(f,g) \in \overline{F}_A} \{(s_\pi, f) + g - \int_{S_0(t,x)} H(t,s)\pi(ds)\} =$$

$$\max_{\pi \in \Pi}\{H(t,s_\pi) - \int_{S_0(t,x)} H(t,s)\pi(ds)\} =$$

$$\max_{\pi \in \Pi}\{H(t, \int_{S_0(t,x)} s\pi(ds)) - \int_{S_0(t,x)} H(t,s)\pi(ds)\}.$$

Но в силу замечания 2.2

$$\max_{\pi \in \Pi}\{H(t, \int_{S_0(t,x)} s\pi(ds)) - \int_{S_0(t,x)} H(t,s)\pi(ds)\} \leq 0$$

тогда и только тогда, когда $H(t,\cdot)$ псевдовыпукла на $S_0(t,x)$.

Покажем, что справедлива вторая часть теоремы. Возьмем последовательность функций $\varphi_k^*(s) = \varphi^*(s) + \delta(s \mid B_k(0))$, где

$$\delta(s\,|\,A)=\begin{cases}0, & s\in A,\\ \infty, & s\notin A,\end{cases}$$

а $B_k(0)=\{s\in R^n : \|s\|\le k\}$. Тогда φ_k^* соответствует последовательность, состоящая из функций $\varphi_k(x)=(\varphi_k^*)^*(x)$, которые, согласно теореме (13.3.3) из [6], выпуклы, липшицевы, монотонно возрастают, стремясь снизу к φ. Поэтому по теореме Дини для любого компакта M из R^n последовательность φ_k сходится к φ равномерно. Кроме того, по условию теоремы

$$V(t,x)=\sup_{s\in B_k(0)}\left((s,x)+\int_t^T H(\tau,s)d\tau-\varphi^*(s)\right),\quad (t,x)\in\overline{G}$$

является решением (нижним решением) (1.1) с краевым условием φ_k. По теореме об устойчивости решения уравнения по гамильтониану и начальным данным (см. [1, теорема 4.3], [9, теорема I.2], [10, теорема 1.4]) $V_k(t,x)$ стремится к $V(t,x)$, определенной формулой (1.3), которая является решением (нижним решением) задачи Коши (1.1). Теорема доказана.

Установим, какой информацией о поведении $H(t,s)$ на множестве максимизаторов $S_0(t,x)$ мы обладаем. Справедлива

Лемма 2.2. *Предположим, что выполнены условия (A) и (B), тогда для любых $(t,x)\in G$, любых $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}\ge 0$ таких, что $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$, и всех $s_1,s_2,\dots,s_{n+1}\in S_0(t,x)$*

$$\int_t^T\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i H(\tau,s_i)d\tau\ge\int_t^T H(\tau,\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i)d\tau. \qquad (2.2)$$

Доказательство:

Для $i=\overline{1,n+1}$ и для $s=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i$ справедливо неравенство:

$$(s_i,x)+\int_t^T H(\tau,s_i)d\tau-\varphi^*(s_i)\ge(s,x)+\int_t^T H(\tau,s)d\tau-\varphi^*(s).$$

Осталось умножить эти неравенства на α_i, сложить, воспользоваться конечностью φ^* в $S_0\subset\operatorname{dom}\varphi^*$, а также неравенством

$$\varphi^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i\right)\le\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\varphi^*(s_i),$$

справедливым в силу выпуклости φ^*. Лемма доказана.

Теперь установим достаточные условия, при которых (1.3) определяет решение задачи (1.1) для всех выпуклых функций φ.

Следствие 2.1. *Формула (1.3) определяет решение (1.1), если выполнены условия (A) и (B), а $H(t,s)$ вогнута (выпукла) по s при любом $t\in(0,T)$.*

Доказательство:

Случай выпуклой $H(t,\cdot)$ очевиден. Пусть теперь $H(t,\cdot)$ вогнута при $t\in(0,T)$. Заметим, что тогда $S_0(t,x)$ выпукло. Для произвольных $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}\ge 0$ таких, что $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$, произвольных $s_1,s_2,\dots,s_{n+1}\in R^n$ в силу вогнутости для любого $t\in(0,T)$ выполнено неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i H(t,s_i) \le H(t,\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i). \qquad (2.3)$$

Достаточно проверить в случае, когда $s_1,s_2,\ldots,s_{n+1}\in S_0(t,x)$, выполнение следующего неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i H(t,s_i) \ge H(t,\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i).$$

Предположим, что это неверно, то есть найдутся $(t_0,x_0)\in G$, а также $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\ge 0$, где $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$, $s_1,s_2,\ldots,s_{n+1}\in S_0(t_0,x_0)$ такие, что выполнено

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i H(t_0,s_i) - H(t_0,\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i) = -\varepsilon < 0.$$

Но тогда из непрерывности $H(\cdot,s)$ для любого $s\in R^n$ на $(0,T)$, а также из (2.3) мы можем получить неравенство

$$\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i H(\tau,s_i)d\tau - \int_{t_0}^{T}H(\tau,\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i s_i)d\tau < 0,$$

которое противоречит неравенству (2.2). Лемма доказана.

Замечание 2.3. *Как уже было отмечено, в случае вогнутого по s гамильтониана множество $S_0(t,x)$ является выпуклым. Тогда из того, что на множестве $S_0(t,x)$ функция $H(t,s)$ выпукла и вогнута по s одновременно, следует ее аффинность на $S_0(t,x)$.*

С помощью леммы 2.2 нетрудно установить, что справедливо

Следствие 2.2. *Пусть для гамильтониана $H(t,s)=H^0(s)\psi(t)$ и для функции φ выполнены условия (A) и (B), $\psi(t)>0$ (или <0) при всех $t\in(0,T)$. Тогда решением соответствующей задачи Коши (1.1) будет функция*

$$V(t,x)=\sup_{s\in R^n}\left((s,x)+H^0(s)\int_t^T\psi(\tau)d\tau-\varphi^*(s)\right), \quad (t,x)\in\overline{G}.$$

Легко видеть, что при $\psi(t)\equiv 1$ мы получаем классическую формулу Хопфа

$$V(t,x)=\sup_{s\in R^n}\big((s,x)+(T-t)H^0(s)-\varphi^*(s)\big), \quad (t,x)\in\overline{G}.$$

Замечание 2.4. *В случае классической формулы Хопфа получается решение, которое выпукло по совокупности переменных. В более общей формуле (1.3) мы получаем решение, которое выпукло лишь по x при любом фиксированном $t\in[0,T]$.*

К сожалению, в общем случае формула (1.3) не представляет решение (1.1) для всех выпуклых функций φ. Справедливо

Следствие 2.3. *Формула (1.3) определяет решение задачи (1.1), если $H(t,s)$ и φ удовлетворяют условиям (A) и (B), а $|S_0(t,x)|=1$ для всех $(t,x)\in G$, то есть при всех (t,x) максимизатор в (1.3) единственен.*

Из следствия 2.3 можно получить, что (1.3) является решением, когда функция φ аффинна.

Теперь приведем обобщение формулы типа Лакса-Хопфа, полученной в работе [8]. Пусть рассматривается следующее уравнение (1.4):

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + H\left(t, V(t,x), \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right) = 0, \quad (t,x) \in G,$$
$$V(T,x) = \varphi(x), \quad x \in R^n.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(C) Функция $\varphi : R^n \to R$ непрерывна и квазивыпукла;

(D) Функция $H:(0,T)\times R \times R^n \to R$ непрерывна по совокупности переменных и

(iii) $H(t,\gamma,\lambda s) = \lambda H(t,\gamma,s)$ для всех $(t,\gamma)\in(0,T)\times R$, $\lambda \geq 0$, $s\in R^n$;

(iv) для любых $(t,\gamma)\in(0,T)\times R$, $s', s'' \in R^n$ выполнено

$$|H(t,\gamma,s') - H(t,\gamma,s'')| \leq L\cdot\|s' - s''\|;$$

(v) $\gamma \mapsto H(t,\gamma,s)$ невозрастает для всех $(t,s)\in(0,T)\times R^n$;

(vi) для всех $(\gamma,s)\in R\times R^n$ функция $H(\cdot,\gamma,s)$ суммируема на $(0,T)$.

Введем в рассмотрение следующие операции квазивыпуклого сопряжения ([8]):

$$f^{\#}(\gamma,s) = \sup\{(s,x) \mid x \in R^n, f(x) \leq \gamma\}, \quad (\gamma,s)\in R\times R^n,$$
$$f^{\#\#}(x) = \inf\{\gamma\in R \mid \sup_{s\in R^n}\left((s,x) - f^{\#}(\gamma,s)\right) \leq 0\}, \quad x \in R^n.$$

Мы считаем выполненным соглашение о том, что $\sup(\varnothing) = -\infty$, $\inf(\varnothing) = +\infty$. Справедлива

Теорема 2.2. *При выполнении условий (C) и (D) следующая ниже формула (2.4) представляет непрерывное вязкостное субрешение задачи (1.4). Для того, чтобы (2.4) определяла непрерывное вязкостное суперрешение (а значит, и решение), достаточно, чтобы для всех $(t,\gamma)\in(0,T)\times R$ функция $H(t,\gamma,\cdot)$ была псевдовыпукла на множестве $S_0(t,x,\gamma)$, где*

$$S_0(t,x,\gamma) = \{s\in B : (s,x) - \varphi^{\#}(\gamma,s) + \int_t^T H(\tau,\gamma,s)d\tau =$$
$$= \sup_{q\in B}\left((q,x) - \varphi^{\#}(\gamma,q) + \int_t^T H(\tau,\gamma,q)d\tau\right)\}.$$

$$V(t,x) = \inf\{\gamma\in R \mid \sup_{s\in R^n}\left((s,x) - \varphi^{\#}(\gamma,s) + \int_t^T H(\tau,\gamma,s)d\tau\right) \leq 0\}. \quad (2.4)$$

Здесь $B = \{s\in R^n : \|s\| \leq 1\}$. Иными словами, при помощи операций квазивыпуклого сопряжения формула (2.4) может быть записана в виде:

$$V(t,x) = \left(\varphi^{\#}(\gamma,s) - \int_t^T H(\tau,\gamma,s)d\tau\right)^{\#}(x).$$

Замечание 2.5. *Как и в случае формулы (1.3), мы можем показать, что справедливы аналоги следствий 2.1, 2.2 и 2.3.*

Замечание 2.6. *В отличие от приведенной в [8] формулы, (2.4) дает решение, которое квазивыпукло лишь только по x при любом $t\in[0,T]$.*

Доказательство данной теоремы абсолютно аналогично, исключая небольшие детали, доказательству, приведенному в работе [8].

В заключение автор благодарит профессора А.Б. Куржанского за постановку задачи и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства общего и профессионального образования, грант "Университеты России" N5393.

Литература

1. Субботин А.И. Минимаксные решения и уравнение Гамильтона-Якоби. – М.:Наука, 1991, 214 с.

2. Субботин А.И. Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка//Успехи мат. наук, 1996. т.51, вып.2. С.105-138.

3. Силин Д.Б. Многозначное интегрирование и вязкие решения уравнения Гамильтона-Якоби//Дифференциальные уравнения, 1995. т.31. С.129-137.

4. Silin D.B. Viscosity solutions via unbounded set-valued integration//Nonlinear Anal. T.M.A., 1998. Vol.31. P.55-90.

5. Hopf E. Generalized solutions of nonlinear equations of first order//J. Math. Mech., 1965. Vol.14. P.951-973.

6. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. – М.:Мир, 1973, 472 с.

7. Barron E.N., Ishii H. The Bellman equation for minimizing the maximum cost//Nonlinear Anal. T.M.A., 1989. Vol.13. P.1067-1090.

8. Barron E.N., Jensen R., Liu W. Hopf-Lax formula for $u_t + H(u, Du) = 0$: II//Comm. in PDE, 1997. Vol.22. P.1141-1160.

9. Crandall M.G., Evans L.C. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations//Trans. Amer. Math. Soc., 1983. Vol.277. P.1-42.

10. Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.--L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations//Trans. Amer. Math. Soc., 1984. Vol.282. P.487-502.