Рудаков К.В., Чехович Ю.В.

О ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ОБУЧАЕМЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДОВ (АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

1. Построение проблемно-ориентированных теорий на основе алгебраического подхода к задачам распознавания образов

Основы алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов были заложены в 70-х годах прошлого века в работах академика РАН Ю.И. Журавлева [1-2]. В этих работах были развиты "прямые методы" построения корректных, то есть точных на прецедентах, алгоритмов классификации путем применения специальных алгебраических операций к эвристическим распознающим операторам. При этом были введены основополагающие понятия (регулярность, полнота и т.д.), область потенциального применения которых существенно шире, чем задачи и алгоритмы распознавания и классификации.

В настоящее время представляется несомненным, что алгебраический подход представляет собой не специализированную теорию, а скорее математическую технологию построения проблемно-ориентированных теорий синтеза высококачественных алгоритмов на базе соответствующих эвристических информационных моделей, то есть параметрических семейств операторов, отражающих те или иные экспертные знания о предметной области. Можно сказать, что выработалась определенная культура применения алгебраических методов при исследовании конкретных предметных областей, которая позволяет сформулировать правильную последовательность вопросов, ответы на которые и составляют проблемно-ориентированную теорию.

Прежде всего, отметим, что решениями задач, для которых предназначен алгебраический подход, являются не ответы на конкретные содержательные вопросы, а алгоритмы, способные давать такие ответы. При этом объектом изучения оказывается не сама предметная область, а собственно алгоритмы или их фрагменты, семейства алгоритмов, а также операции над алгоритмами. В соответствии с этим под качеством решения понимается качество построенного алгоритма, определяемое чаще всего точностью его работы на прецедентах и его соответствием различного рода дополнительным требованиям.

Основной технический прием алгебраического подхода состоит в том, что эвристические информационные модели (параметрические семейства) используются не в качестве области оптимизации, а как источник базовых операторов, применение к которым соответствующих так называемых корректирующих операций и приводит к построению высококачественного алгоритма – решения.

При разработке конкретной проблемно-ориентированной теории первый шаг состоит в точном описании класса задач, которые должны решаться искомыми алгоритмами. Такое описание включает в себя фиксацию множества начальных информаций (входов алгоритмов), множества финальных информаций (выходов алгоритмов) и структурной информации (вида прецедентов и дополнительных ограничений) [1, 3, 4].

Существенно, что уже на первом шаге возникает возможность постановки и решения ряда содержательных вопросов. А именно, устанавливаются условия, обеспечивающие разрешимость изучаемых задач. Эти условия определяют по сути дела непротиворечивость прецедентной и дополнительной информации. Они же, естественно, оказываются условиями существования корректного алгоритма – решения.

Как правило, наряду с разрешимостью изучается вопрос о так называемой регулярности рассматриваемых задач. Под регулярностью понимается при этом усиление свойства разрешимости, сводящееся к требованию разрешимости не только для самой задачи, но и для задач в некотором смысле близких к рассматриваемой. Установление критериев регулярности задач автоматически приводит к критериям полноты для семейств алгоритмов - под полнотой семейства понимается существование в нем решений для всех регулярных задач.

В тех случаях, когда на множестве задач оказывается возможным введение адекватной метрики, решается вопрос и о получении оценок для так называемых радиусов регулярности и разрешимости, понимаемых как расстояние от данной регулярной (разрешимой) задачи до ближайшей нерегулярной (неразрешимой). Существенность этого вопроса вытекает из того обстоятельства, что и регулярность, и разрешимость задачи могут оказаться обусловленными избыточно точными измерениями или описаниями в начальной информации.

Итак, в результате описанного первого шага, который можно назвать этапом построения абстрактной теории предметной области, возникают описания класса задач и система критериев регулярности, разрешимости и полноты.

Следующий шаг построения проблемно-ориентированной теории состоит в конструировании эвристических моделей алгоритмов и подборе семейств корректирующих операций. В качестве эвристических семейств алгоритмов берутся параметрические семейства отображений из множества начальных информаций во множество финальных информаций. Часто эти отображения исходно строятся как суперпозиции отображений из множества начальных информаций в некоторое множество оценок и отображения из этого множества оценок во множество финальных информаций. Более того, доказано [1,2], что возможность представления этих отображений в виде суперпозиций указанного вида имеется практически во всех случаях. Семейства корректирующих операций конструируются на базе операций, определенных на множестве оценок. Эвристические модели и семейства корректирующих операций строятся при этом так, чтобы они удовлетворяли установленным на первом этапе критериям, что гарантирует возможность построения с их помощью корректных алгоритмов для всех регулярных или разрешимых задач.

2. Проблема синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов

В настоящей работе будем рассматривать конечные множества точек на плоскости. Таким множествам могут соответствовать различного рода временные ряды, результаты измерений параметров физических процессов, ценовые и объемные характеристики биржевых торгов и тому подобное. Будем называть такие множества конечными плоскими конфигурациями (КПК).

Не исключено, что подобные конфигурации обладают “плохой”, в некотором смысле, структурой. Например, точки могут быть равномерно распределены в некоторой прямоугольной области и не подтверждать наличия какой-либо зависимости исследуемой величины от времени даже при экспертном анализе. Но, как правило, при решении прикладных задач существует уверенность в том, что положение точек соответствует некой достаточно “просто устроенной” кривой. Под простотой при этом подразумевается малое количество экстремумов относительно числа точек КПК.

И именно выявление положения экстремумов на аппроксимирующей кривой, как правило, является основным результатом изучения исходного множества. Поведение же кривой на участках монотонности обычно не представляет существенного интереса. В силу этого тенденцией изменения или трендом исследуемого процесса будем называть промежуток монотонности на аппроксимирующей кривой и соответствующий этому промежутку фрагмент КПК.

Разбиение исходной КПК на тренды производится путем решения задачи классификации, причем каждой точке исходного множества сопоставляется номер определенного класса, интерпретируемого, скажем, как «класс максимумов», «класс минимумов», «класс точек монотонности» [Ч].

Очевидно, что задача выделения трендов в КПК рода не имеет, вообще говоря, единственного решения. При содержательном анализе конфигурации границы трендов могут выбираться экспертом достаточно произвольно. Более того, для одной и той же КПК в зависимости от собственных представлений, типа анализа или какой-либо внешней информации выделенные экспертом тренды могут быть существенно различными. Этим обстоятельством определяется целесообразность изучения задачи синтеза алгоритмов выделения трендов, настраиваемых на определенный тип анализа.

В настоящей работе исследуется возможность применения алгебраического подхода к задаче построения обучаемых алгоритмов выделения трендов. При этом предполагается использование следующей технологии. В режиме обучения на вход алгоритма подаются конфигурации, некоторые точки которых отнесены экспертом к тому или иному классу. После осуществления обучения формируется алгоритм, способный точно таким же образом расклассифицировать (разметить) конфигурации обучения, а также размечать любые конфигурации поданные на вход.

Далее будут изложены начальные этапы построения проблемно-ориентированной теории данной предметной области. А именно, будут формально описаны пространства начальных информаций (входы алгоритмов), финальных информаций (выходы алгоритмов), вид прецедентов и дополнительных ограничений, получены критерии разрешимости и регулярности задачи построения алгоритмов выделения трендов.

3. Критерии разрешимости и регулярности

3.1. Конфигурации и разметка

Будем рассматривать объекты S, расположенные на плоскости: $S \in R^2$. Без ущерба для дальнейшего рассмотрения предположим, что $S \in R_+^2$. Будем называть объекты $S = (t, v)$ точками или узлами на плоскости.

Вектор $\bar{S}^d = (S^1, ..., S^d) = ((t^1, v^1), ..., (t^d, v^d))$, $d \geq 1$ будем называть *конечной плоской конфигурацией* (КПК) или *вектор-объектом*.

Будем считать, что задан либо а) строгий порядок на t: $t^1 < ... < t^d$, либо б) лексикографический порядок на S: $t^1 \leq ... \leq t^d$, если $t^i = t^{i+1}$, то $v^i < v^{i+1}$, $i = 1, ...d$.

В первом случае будем называть конфигурации *однозначными*, а во втором, соответственно, - *неоднозначными*.

Множество всех d -точечных неоднозначных плоских конфигураций обозначим $C^d = \left\{ \bar{S}^d \right\}$, а d -точечных однозначных плоских конфигураций соответственно $C_1^d = \left\{ \bar{S}^d \right\}$. Очевидно $C_1^d \subseteq C^d$.

Также определим множества всех неоднозначных $C = \bigcup_{d=1}^{\infty} C^d$ и однозначных $C_1 = \bigcup_{d=1}^{\infty} C_1^d$ конфигураций. Очевидно, что $C_1 \subseteq C$. Поэтому далее, как правило, будем считать, что $\bar{S}^d \in C^d$. При необходимости случай $\bar{S}^d \in C_1^d$ будет рассматриваться отдельно.

Определение 1. Конфигурации $\bar{S}_1^d$ и $\bar{S}_2^d$ называется *сдвиг-эквивалентными* тогда и только тогда, когда
$\exists_{R_+^2} \; p^* = \left(t^*, v^*\right) : S_1^i = S_2^i + p^*$, для всех $i = 1,...,d$, где $S_1^i \in \bar{S}_1^d$, $S_2^i \in \bar{S}_2^d$

Определение 2. *Словарем разметки* или *множеством меток* называется абстрактное множество $M = \left\{ \mu_1,...,\mu_r \right\}$, $r \geq 1$.

Множество $M_0 = M \cup \left\{ \Delta \right\}$, $\Delta \notin M$, где Δ - специальная метка, интерпретируемая как «не размечено», будем называть *расширенным множеством меток* или *расширенным словарем разметки*.

Примеры разметок:

A. $M = \left\{ \max, \min, non \right\}$, где “max” – метка для обозначения точки максимума, “min” – минимума, “non” – неэкстремальной точки.

B. $M = \left\{ \max, \min, plt, non \right\}$, где “plt” – метка для обозначения плато, “max”, ”min”, “non” – аналогично п. A.

C. $M = \left\{ \max, \min, up, down, plt \right\}$, где “up” – метка для обозначения точек возрастания, “down” – убывания, “max”, “min”, “plt”, - аналогично п. B.

D. $M = \left\{ \max, \min, up, down, plt\&up, plt\&down, up\&plt, down\&plt, mplt \right\}$, где “plt&up”, - метка для обозначения точки окончания плато, после которого следует рост, “plt&down” –точки окончания плато, после которого следует падение, “up&plt” – точки начала плато после роста, “down&plt” - точки начала плато после падения, “mplt” – внутренней точки плато; “max”, “min” “up”, “down” аналогично п. C.

E. $M = \left\{ \max, \min, up, down, Sup, Sdown, plt \right\}$, где “Sup” – метка для обозначения точки быстрого роста, “Sdown” – точки быстрого падения, “max”, “min” “up”, “down”, “plt” аналогично п. C.

F. $M=\{\max,\min,up,down,ShiftUp,ShiftDown,plt\}$, где "ShiftUp" – метка для обозначения точки скачка вверх, "ShiftDown" – точки скачка вниз, "max", "min" "up", "down", "plt" аналогично п. С.

Примечание: множество разметки в случае F имеет смысл рассматривать только в применении к неоднозначным конфигурациям.

Определение 3. При фиксированном множестве меток M и, соответственно, расширенном множестве меток M_0 *разметкой* длины d называется любая последовательность $\bar{\mu}^d=\{\mu^1,...\mu^d\}$ длины $d\geq 1$, если $\mu^i\in M$, или *частичной разметкой* длины d , если $\mu^i\in M_0$.

Множество всех различных разметок длины d обозначим M^d, а множество всех различных расширенных разметок длины d , соответственно - M_0^d.

Положим $\hat{M}=\bigcup\limits_{d=1}^{\infty}M^d$, и $\hat{M}_0=\bigcup\limits_{d=1}^{\infty}M_0^d$ - множества всех различных разметок.

Определение 4. *Размеченным* объектом называется пара (S,μ), где $\mu\in M$.

Определение 5. Назовем *размеченной* конфигурацией (вектор-объектом) пару $(\bar{S}^d,\bar{\mu}^d)$, где $\bar{\mu}^d\in M^d$, а $\bar{S}^d\in C^d$ для неоднозначной, и $\bar{S}^d\in C_1^d$ для однозначной конфигураций. При этом $\bar{\mu}^d$ будем далее называть *разметкой* или *полной разметкой* конфигурации $\bar{S}^d$

При $\bar{\mu}^d\in M_0^d$ пара $(\bar{S}^d,\bar{\mu}^d)$ называется *частично размеченной* конфигурацией, а разметка $\bar{\mu}^d$, при этом, называется частичной разметкой конфигурации $\bar{S}^d$.

Определение 6. Полная разметка $\bar{\mu}^d$ конфигурации $\bar{S}^d$ называется *продолжением* частичной разметки $\bar{\mu}_0^d$ если $\underset{i=1,...,d}{\forall} i:(\mu_0^i=\mu^i)\vee(\mu_0^i=\Delta)$

Определение 7. Будем называть *алгоритмом разметки* A алгоритм, реализующий вычислимое отображение $A:C\to\hat{M}$ такое, что $\underset{d\geq 1}{\forall} d:A(\bar{S}^d)=\bar{\mu}^d$, где $\bar{S}^d\in C^d\subseteq C$, $\bar{\mu}^d\in M^d\subseteq\hat{M}$.

Рассмотрим конфигурацию из 15 точек представленную на рисунке 1. И приведем примеры разметок данной конфигурации в случаях различных словарей разметок. Тогда для варианта А со словарем разметки $M=\{\max,\min,non\}$ представляется разумным точки с координатами (t_2,v_8) и (t_{11},v_{10}) пометить как "max", точку с координатами (t_8,v_1) - как “min”, а все остальные – “non”.

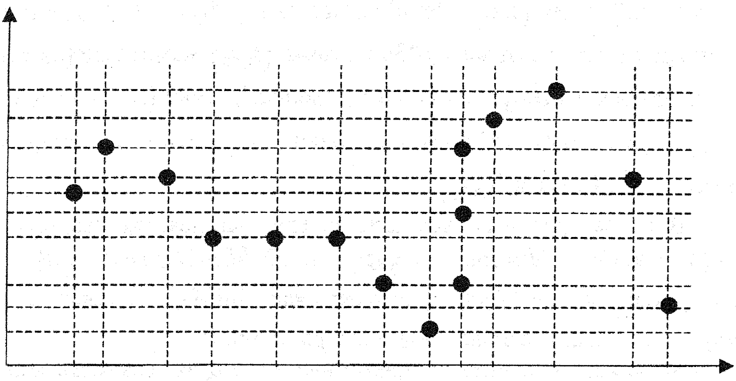

Рис. 1 Пример конфигурации.

Для словаря $M=\{\max,\min,plt,non\}$ (вариант В) точки с координатами $(t_{2,}v_8)$ и $(t_{11,}v_{10})$ можно также пометить как “max”, точку с координатами $(t_{8,}v_1)$ - как “min”, точки $(t_{4,}v_4)$, $(t_{5,}v_4)$ и $(t_{4,}v_4)$ - “plt”, все остальные – “non”.

Для словаря $M=\{\max,\min,up,down,plt\}$ (вариант С) точки с координатами $(t_{2,}v_8)$ и $(t_{11,}v_{10})$ можно пометить как “max”, точки с координатами $(t_{1,}v_6)$, $(t_{8,}v_1)$ и $(t_{13,}v_2)$ - как “min”, точки $(t_{9,}v_3)$, $(t_{9,}v_5)$, $(t_{9,}v_8)$, $(t_{10,}v_9)$ - “up”, точки $(t_{3,}v_7)$, $(t_{7,}v_3)$ и $(t_{3,}v_7)$ - “down”, а точки $(t_{4,}v_4)$, $(t_{5,}v_4)$ и $(t_{4,}v_4)$ - “plt”. Однако, возможен и такой разумный вариант разметки, при котором точка $(t_{1,}v_6)$ помечается – “up”, а точка $(t_{13,}v_2)$ - “down”.

Если $M=\{\max,\min,up,down,plt\&up,plt\&down,up\&plt,down\&plt,mplt\}$ (вариант D), то точки $(t_{2,}v_8)$ и $(t_{11,}v_{10})$ получают метку “max”, точка $(t_{8,}v_1)$ - “min”, точки $(t_{4,}v_4)$, $(t_{5,}v_4)$ и $(t_{4,}v_4)$ размечаются как “down&plt” “mplt” “plt&down”, соответственно, как точка начала плато после падения, точка из середины плато, точка окончания плато с последующим падением. Точки $(t_{3,}v_7)$, $(t_{7,}v_3)$ и $(t_{3,}v_7)$ - “down”, точки $(t_{9,}v_3)$, $(t_{9,}v_5)$, $(t_{9,}v_8)$, $(t_{10,}v_9)$ - “up”, точки же $(t_{1,}v_6)$ и $(t_{13,}v_2)$ можно пометить и как “min” и как “up” и “down”, соответственно.

Для словаря разметки в варианте Е -

$M = \{\max, \min, up, down, Sup, Sdown, plt\}$ точки $(t_{2,} v_8)$ и $(t_{11,} v_{10})$ получают метку "max", точка $(t_{8,} v_1)$ - "min", точки $(t_{9,} v_3)$, $(t_{9,} v_5)$ и $(t_{9,} v_8)$ - точки быстрого роста получают метку "Sup", точка $(t_{3,} v_7)$ может интерпретироваться как точка быстрого падения – "Sdown", точки $(t_{4,} v_4)$, $(t_{5,} v_4)$ и $(t_{4,} v_4)$ - "plt", метку "up" получают точки $(t_{1,} v_6)$ и $(t_{10,} v_9)$, а метку "down" – точки $(t_{3,} v_7)$, $(t_{7,} v_3)$ и $(t_{13,} v_2)$.

В случае разметки варианта F, где учитывается неоднозначность конфигурации, $M = \{\max, \min, up, down, ShiftUp, ShiftDown, plt\}$, точки $(t_{9,} v_3)$, $(t_{9,} v_5)$ и $(t_{9,} v_8)$ будут размечены как "ShiftUp", остальные же точки получат метки аналогичные варианту разметки С.

Как показано в выше приведенных примерах, разметка конфигурации определяется в первую очередь словарем разметки, но даже после того как множество меток зафиксировано, остается значительный произвол в том, как разметить ту или иную конфигурацию.

3.2. Аксиомы (правила) разметки

Из содержательных соображений следует, что не все разметки каждой конкретной конфигурации являются разумными (подходящими). Например, для точки (t_0, v_0), у которой соседние точки (t_{-1}, v_{-1}) и (t_1, v_1) с каждой стороны таковы что $t_{-1} < t_0 < t_1$ и $v_{-1} < v_0 < v_1$, представляется естественным запретить разметку этой точки, как "max" (или "min"). Для того чтобы описать требования к подходящим разметкам введем и опишем требования к системам аксиом (правил) разметки. Отметим, что из вводимых правил разметки вытекают ограничения на семейство алгоритмов, используемых для разметки конфигураций.

Определение 8. *Аксиомами или правилами разметки* называется набор $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ эффективно вычислимых отображений:

$$\pi_i : \bigcup_{d=1}^{\infty} \left(C^d \times M^d\right) \to \{0,1\} \text{ , где } \pi_i \in \Pi,$$

причем $\Pi = \bigwedge_{i=1\ldots k} \pi_i$, $\Pi : \bigcup_{d=1}^{\infty} \left(C^d \times M^d\right) \to \{0,1\}$.

Приведем несколько примеров "разумных" систем аксиом при различных словарях разметки.

А. Словарь разметки $M = \{\max, \min, non\}$.

Аксиома А1. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:\left(v_{i-1}<v_i<v_{i+1}\right)\Rightarrow \mu_i = "non"$.

Аксиома А2. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:\left(v_{i-1}>v_i>v_{i+1}\right)\Rightarrow \mu_i = "non"$.

Аксиома А3.

$$\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 :\left(\mu_{i_1} = "\max"\right)\wedge\left(\mu_{i_1} = "\max"\right)\Rightarrow \underset{\{i_1,\ldots,i_2\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = "\min".$$

Аксиома А4.

$$\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 :\left(\mu_{i_1} = "\min"\right)\wedge\left(\mu_{i_1} = "\min"\right)\Rightarrow \underset{\{i_1,\ldots,i_2\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = "\max".$$

B. Словарь разметки $M=\{\max,\min,plt,non\}$.

Аксиома В1.

$$\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:\left(v_{i-1}<v_i<v_{i+1}\right)\Rightarrow\left(\mu_i \neq "\max"\right)\wedge\left(\mu_i \neq "\min"\right).$$

Аксиома В2.

$$\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:\left(v_{i-1}>v_i>v_{i+1}\right)\Rightarrow\left(\mu_i \neq "\max"\right)\wedge\left(\mu_i \neq "\min"\right).$$

Аксиома В3.

$$\begin{gathered}\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 :\left(\mu_{i_1} = "\max"\right)\wedge\left(\mu_{i_1} = "\max"\right)\Rightarrow \\ \underset{\{i_1,\ldots,i_2\}}{\exists} i_0 :\left(\mu_0 = "\min"\right)\vee\left(\mu_0 = "plt"\right)\end{gathered}.$$

Аксиома В4.

$$\begin{gathered}\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 :\left(\mu_{i_1} = "\min"\right)\wedge\left(\mu_{i_1} = "\min"\right)\Rightarrow \\ \underset{\{i_1,\ldots,i_2\}}{\exists} i_0 :\left(\mu_0 = "\max"\right)\vee\left(\mu_0 = "plt"\right)\end{gathered}.$$

C. Словарь разметки $M=\{\max,\min,up,down,plt\}$.

Аксиома С1. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:\left(v_{i-1}<v_i<v_{i+1}\right)\Rightarrow \mu_i = "up"$.

Аксиома С2. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:\left(v_{i-1}>v_i>v_{i+1}\right)\Rightarrow \mu_i = "down"$.

Аксиома С3.

$$\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 :\left(\mu_{i_1} = "\max"\right)\wedge\left(\mu_{i_1} = "\max"\right)\Rightarrow \underset{\{i_1,\ldots,i_2\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = "\min".$$

Аксиома C4.

$$\underset{\{1,\dots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 : \left(\mu_{i_1} = \text{"min"}\right) \wedge \left(\mu_{i_1} = \text{"min"}\right) \Rightarrow \underset{\{i_1,\dots,i_2\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = \text{"max"}.$$

Определение 9. Разметку $\bar{\mu}^d$ будем называть *подходящей* для $\bar{S}^d$, если $\Pi\left(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d\right) = 1$.

Определение 10. Частичная разметка $\bar{\mu}_0^d \in M_0^d$ называется подходящей для $\bar{S}^d$ тогда и только тогда, когда $\underset{M^d}{\exists} \bar{\mu}^d \quad \underset{i=1,\dots,d}{\forall} i : \left(\left(\mu_0^i = \mu^i\right) \vee \left(\mu_0^i = \Delta\right)\right)$ и при этом $\Pi\left(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d\right) = 1$, то есть существует полная подходящая разметка $\bar{\mu}^d$, являющаяся продолжением $\bar{\mu}_0^d$.

Система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ называется *непротиворечивой* тогда и только тогда, когда

$$\underset{d \geq 1}{\exists} d \quad \underset{C^d}{\exists} \bar{S}^d \underset{M}{\exists} \bar{\mu}^d : \Pi\left(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d\right) = 1,$$

то есть когда существует по меньшей мере одна конфигурация, для которой существует подходящая разметка.

Очевидно, система аксиом разметки $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ является *независимой* тогда и только тогда, когда

$$\underset{w=1\dots k}{\forall} w \quad \underset{d \geq 1}{\exists} d \quad \underset{C^d}{\exists} \; \bar{S}^d \quad \underset{M}{\exists} \bar{\mu}^d : \Pi^w\left(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d\right) = 1 \quad \text{и} \quad \Pi\left(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d\right) = 0 \ ,$$

где

$$\Pi^w = \{\pi_1, \dots, \pi_{w-1}, \pi_{w+1}, \dots, \pi_k\} \ ,$$

то есть, в том случае, когда при изъятии из системы любой аксиомы существует хотя бы одна конфигурация и разметка этой конфигурации, являющаяся подходящей в смысле усеченного набора аксиом и неподходящей в смысле полного набора.

Определение 11. Система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ называется *покрывающей* тогда и только тогда, когда $\underset{C}{\forall} \bar{S}^d \underset{M^d}{\exists} \bar{\mu}^d : \Pi\left(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d\right) = 1$, то есть когда для любой конфигурации существует хотя бы одна подходящая разметка.

Пример непокрывающей, но “естественной” системы правил разметки.

Зафиксируем множество меток $M = \{\max, \min, up, down, plt\}$. Зафиксируем следующую систему аксиом:

Аксиома 1. $\underset{\{3,\ldots,d-2\}}{\forall i}:(v_{i-1} < v_i > v_{i+1}) \wedge (v_{i-2} < v_i > v_{i+2}) \Leftrightarrow \mu_i = \text{"max"}$.

Аксиома 2. $\underset{\{3,\ldots,d-2\}}{\forall i}:(v_{i-1} > v_i < v_{i+1}) \wedge (v_{i-2} > v_i < v_{i+2}) \Leftrightarrow \mu_i = \text{"min"}$.

Аксиома 3.
$\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 : \left(\mu_{i_1} = \text{"max"}\right) \wedge \left(\mu_{i_1} = \text{"max"}\right) \Rightarrow \underset{\{i_1,\ldots,i_2\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = \text{"min"}$.

Аксиома 4.
$\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 \neq i_2 : \left(\mu_{i_1} = \text{"min"}\right) \wedge \left(\mu_{i_1} = \text{"min"}\right) \Rightarrow \underset{\{i_1,\ldots,i_2\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = \text{"max"}$.

Аксиома 5. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:(v_{i-1} < v_i < v_{i+1}) \Rightarrow \mu_i = \text{"}up\text{"}$.

Аксиома 6. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:(v_{i-1} > v_i > v_{i+1}) \Rightarrow \mu_i = \text{"}down\text{"}$.

Рассмотрим конфигурацию, представленную на рисунке 2.

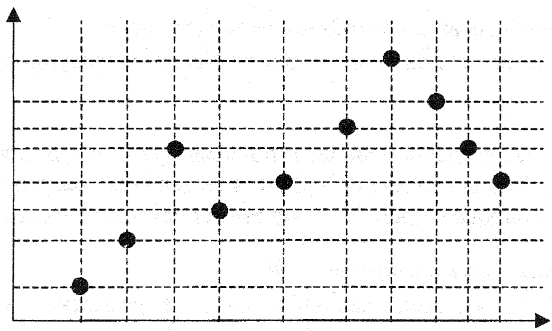

Рис. 2. Конфигурация для примера непокрывающей системы аксиом

Из аксиомы 1 следует, что точки (t_3, v_5) и (t_7, v_8) должны иметь метку “max”. Из аксиомы 3 следует, что одна из трех точек (t_4, v_3), (t_5, v_4) или (t_6, v_6) должна быть точкой минимума. Но из аксиомы 5 следует, что точки (t_5, v_4) и (t_6, v_6) должны быть размечены как “up”, а аксиомы 2 следует, что точка (t_4, v_3) не может иметь метку “min”. Отсюда следует, что при данной системе аксиом 1-6 не имеет ни одной подходящей разметки, то есть система аксиом 1-6 является непрокрывающей.

Определение 12. Система правил разметки $\Pi = \{\pi_1,...,\pi_k\}$ называется *сдвигово-устойчивой* тогда и только тогда, когда

$$\underset{\bar{S}_1^d, \bar{S}_2^d \in C^d}{\forall} \bar{S}_1^d \cong \bar{S}_1^d \underset{M}{\forall} \bar{\mu}^d : \left(\Pi\left(\bar{S}_1^d, \bar{\mu}^d\right) = 1\right) \Rightarrow \left(\Pi\left(\bar{S}_2^d, \bar{\mu}^d\right) = 1\right),$$

то есть когда для любых двух эквивалентных конфигураций тот факт, что разметка оказывается подходящей для одной конфигурации влечет за собой то, что разметка оказывается подходящей для другой конфигурации.

Определение 13. Система аксиом разметки $\Pi = \{\pi_1,...,\pi_k\}$ называется *наследующей* тогда и только тогда, когда для любой конфигурации $\bar{S}^d$ и любой подходящей разметки $\bar{\mu}^d$, подходящей также оказывается любая частичная разметка $\bar{\mu}_0^d$, для которой $\bar{\mu}^d$ является продолжением.

Определение 14. Пусть фиксирована система правил разметки $\Pi = \{\pi_1,...,\pi_k\}$. Тогда алгоритмы, дающие только подходящие разметки для всех $\bar{S}^d$, будем называть *подходящими алгоритмами.*

A^{Π} - класс всех подходящих алгоритмически реализуемых отображений.

Итак, в п. 3.2. введены основные понятия нужные для проведения исследований проблемы синтеза алгоритмов выделения трендов в рамках алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов.

3.3. Разрешимость и регулярность

Будем считать, что далее заданы словарь M разметки и сдвигово-устойчивая система правил разметки $\Pi = \{\pi_1,...,\pi_k\}$.

Кроме того, далее будем рассматривать только те алгоритмы разметки, которые эквивалентные конфигурации размечают одинаково. Будем называть такие алгоритмы сдвигово-устойчивыми.

Пусть задан набор пар

$H = \left\{\left(\bar{S}_i^{d_i}, \bar{\mu}_i^{d_i}\right) \ \middle|\bar{\mu}_i^{d_i} \in M_0^{d_i};\ \bar{S}^{d_i} \in C^{d_i}; i = 1,...,q\ ;\ d_i \in N\right\}$. Такие наборы пар будем называть набором прецедентов.

Определение 15. Набор H называется *противоречивым* тогда и только тогда, когда в нем существует такой поднабор частичных разметок $L = \left\{\bar{\mu}_1^d, \bar{\mu}_2^d,...,\bar{\mu}_l^d\right\}$ эквивалентных конфигураций $\bar{S}_1^d \cong \bar{S}_2^d \cong ... \cong \bar{S}_l^d$, что для любой разметки $\bar{\mu}_*^d = \{\mu_*^1,...,\mu_*^d\} \in M^d$ верно, по крайней мере, одно из следующих условий:

$$1.\ \underset{\{1,...,d\}}{\exists i} \quad \underset{\{1,...,l\}}{\exists j} :\left(\mu_j^i \neq \mu_*^i\right) \wedge \left(\mu_j^i \neq \Delta\right) \tag{1}$$

$$2.\ \underset{\{1,...,l\}}{\exists} \bar{S}_j^d : \Pi\left(\bar{S}_j^d, \bar{\mu}_*^d\right) = 0. \tag{2}$$

Отметим, что определение применимо и для случая частичных разметок одной конфигурации $\bar{S}_1^d = \bar{S}_2^d = ... = \bar{S}_l^d$, то есть когда поднабор содержит несколько различных частичных разметок одной и той же конфигурации.

Определение 16. Набор H, который не содержит противоречивых поднаборов, называется *непротиворечивым*.

Определение 17. Противоречивый набор из двух частичных разметок $\bar{\mu}_1^d$ и $\bar{\mu}_2^d$ эквивалентных конфигураций $\bar{S}_1^d$ и $\bar{S}_2^d$ (или одной конфигурации $\bar{S}^d$) будем называть *противоречивой парой* разметок.

Задача Z *выделения трендов* при заданном наборе прецедентов H заключается в синтезе подходящего алгоритма A, такого, что если $A\left(\bar{S}_i^{d_i}\right) = \bar{\gamma}_i^{d_i}$, $\bar{\gamma}_i^{d_i} \in M^{d_i}$, то

$$1.\ \Pi\left(\bar{S}_i^{d_i}, \bar{\gamma}_i^{d_i}\right) = 1, \tag{3}$$

$$2.\ \underset{\substack{\mu_i^j \in \bar{\mu}_i^{d_i} \\ j=1,...,d_i}}{\forall} \mu_i^j \neq \Delta : \left(\mu_i^j = \gamma_i^j\right). \tag{4}$$

Определение 18. Задача выделения трендов Z называется *разрешимой* тогда и только тогда, когда существует подходящий алгоритм A, удовлетворяющий условиям (1)-(2).

Теорема 1. Задача Z является разрешимой тогда и только тогда, когда набор прецедентов

$H = \left\{\left(\bar{S}_i^{d_i}, \bar{\mu}_i^{d_i}\right) \middle| \bar{\mu}_i^{d_i} \in M_0^{d_i};\ \bar{S}^{d_i} \in C^{d_i}; i = 1,...,q\ ;\ d_i \in N\right\}$ не является противоречивым.

Доказательство. Для упрощения доказательства без ограничения общности проведем факторизацию прецедентов набора H по классам эквивалентности конфигураций $\bar{S}_i^{d_i}$, и будем рассматривать поднаборы $\tilde{H}$, состоящие из прецедентов, соответствующих этим классам эквивалентности. Очевидно, что при непротиворечивости каждого поднабора $\tilde{H}$ непротиворечивым оказывается и весь набор прецедентов H.

Заметим, что для всех конфигураций из поднабора любого $\tilde{H}$ алгоритм А дает одинаковый ответ. Это следует из определения разрешимости задачи и сдвиговой устойчивости системы разметки.

Необходимость. Предположим, что Z - разрешима, то есть существует подходящий алгоритм A, удовлетворяющий условиям разрешимости задачи (3)-(4), но набор прецедентов H - противоречив, отсюда следует, что существует противоречивый поднабор $\tilde{H}=\left\{\left(\bar{S}_p^{d_p},\bar{\mu}_p^{d_p}\right)\ \middle|\ p=l_1,\ldots,l_u\ \in\{1,\ldots,q\}\right\}$ такой, что $\bar{S}_{l_1}^{d_{l_1}}\cong\bar{S}_{l_2}^{d_{l_2}}\cong\ldots\cong\bar{S}_{l_u}^{d_{l_u}}$ и $d_{l_1}=d_{l_2}=\ldots=d_{l_u}=d_{l_*}$. Это в свою очередь означает, что $\forall_{M^{d_{l_*}}}\bar{\mu}_*^{d_{l_*}}=\left\{\mu_*^1,\ldots,\mu_*^{d_{l_*}}\right\}$ верно:

или 1) $\exists_H \bar{S}_*^{d_{l_*}}:\Pi\left(\bar{S}_*^{d_{l_*}},\bar{\mu}_*^{d_{l_*}}\right)=0$, что противоречит условию (3) из определения разрешимости задачи,

или 2) $\exists_{i=1,\ldots,d_{l_*}} i\ \exists_{\substack{j=l_1,\ldots,l_u\\ S_j^i\in\bar{S}_j^{d_{l_*}}}}\left(S_j^i,\mu_j^i\right):\left(\mu_j^i\neq\mu_*^i\right)\vee\left(\mu_j^i\neq\Delta\right)$, что эквивалентно:

$$\exists_{i=1,\ldots,d_{l_*}} i\ \exists_H\left(S_{j_1}^i,\mu_{j_1}^i\right),\left(S_{j_2}^i,\mu_{j_2}^i\right):\ \left(\mu_{j_1}^i\neq\Delta\right)\vee\left(\mu_{j_2}^i\neq\Delta\right)\vee\left(\mu_{j_1}^i\neq\mu_{j_2}^i\right).$$

Это означает, что ответ $\bar{\mu}_*^{d_{l_*}}$ алгоритма A для конфигурации $S_{j_1}^{d_{l_*}}$ или для конфигурации $S_{j_2}^{d_{l_*}}$ будет противоречить условия (4) разрешимости задачи. Необходимость доказана.

Достаточность. Для доказательства достаточности построим подходящий алгоритм A_*, удовлетворяющий условиям (3) и (4) в предположении, что набор прецедентов H - непротиворечив.

Допустим, что в H существует k классов эквивалентных конфигураций. Тогда для каждого поднабора $\tilde{H}_j=\left\{\left(\bar{S}_p^{d_{l_j}},\bar{\mu}_p^{d_{l_j}}\right)\ \middle|\ p=l_1,\ldots,l_j\ \in\{1,\ldots,q\}\right\}$, где $j=1,\ldots,k$ существует $\bar{\mu}_j^{d_{l_j}}=\left\{\mu_j^1,\ldots,\mu_j^{d_{l_j}}\right\}\in M^{d_{l_j}}$, такая, что

$$\forall_{i=1,\ldots,d} i\ \forall_{\substack{p=l_1,\ldots,l_j\\ S_p^i\in\bar{S}_p^{d_{l_j}}}}\left(S_p^i,\mu_p^i\right)\ :\left(\mu_p^i=\mu_j^i\right)\wedge\left(\mu_p^i=\Delta\right) \tag{5}$$

$$\forall_{p=l_1,\ldots,l_j}\bar{S}_p^{d_{l_j}}:\Pi\left(\bar{S}_p^{d_{l_j}},\bar{\mu}_j^d\right)=1. \tag{6}$$

Построим алгоритм A_* следующим образом: $A_*\left(S_*^d\right)=\bar{\gamma}_*^d$, где

$\overline{\gamma}_*^d = \begin{cases} \overline{\mu}_j^{d_{l_j}}, & если \ \overline{S}_*^d \cong \overline{S}_i^{d_i} \in \tilde{H}_j \\ \overline{\mu}_*^d, & если \ \overline{S}_* \notin H. \end{cases}$, $j = 1,...,k$, а $\overline{\mu}_*$ - любая разметка для S_*.

Данный алгоритм A_* для всех конфигураций входящих в набор прецедентов назначает разметку, удовлетворяющую условиям (5) и (6) непротиворечивости поднаборов соответствующих классов эквивалентности конфигураций. Для всех остальных конфигураций назначается любая разметка. Таким образом, оказываются выполненными условия (3) и (4) разрешимости задачи. Достаточность доказана.

Теорема доказана.

Определение 19. Задача Z называется *регулярной* тогда и только тогда, когда Z разрешима для любой непротиворечивой частичной разметки $\overline{\mu}^d \in M_0^d$ всех конфигураций $\overline{S}_i^{d_i} \in H$.

Теорема 2. Разрешимая задача Z является *регулярной* тогда и только тогда, когда для любого поднабора $\tilde{H} = \left\{ \left(\overline{S}_p^{d_p}, \overline{\mu}_p^{d_p} \right) \mid p = l_1,...,l_u \in \{1,...,q\} \right\}$ такого, что $\overline{S}_{l_1}^{d_{l_1}} \cong \overline{S}_{l_2}^{d_{l_2}} \cong ... \cong \overline{S}_{l_u}^{d_{l_u}}$ и $d_{l_1} = d_{l_2} = ... = d_{l_u}$ из правил разметки следует существование и единственность подходящей разметки.

Доказательство. Основная идея доказательства сходна с идеей доказательства разрешимости. Для доказательства необходимости показываем, что наличие поднабора, для которого не является обязательным существование единственной разметки приводит к противоречию с определением регулярности задачи. Достаточность же доказывается при помощи прямого построения соответствующего алгоритма.

Необходимость. Предположим, что в наборе прецедентов H существует такой поднабор $\tilde{H} = \left\{ \left(\overline{S}_p^{d_p}, \overline{\mu}_p^{d_p} \right) \mid p = l_1,...,l_u \in \{1,...,q\} \right\}$ эквивалентных конфигураций $\overline{S}_{l_1}^{d_{l_1}} \cong \overline{S}_{l_2}^{d_{l_2}} \cong ... \cong \overline{S}_{l_u}^{d_{l_u}}$, $d_{l_1} = d_{l_2} = ... = d_{l_u} = d_{l_*}$, для которых может существовать несколько подходящих разметок. Зафиксируем две такие конфигурации с различными полными разметками: $\left(\overline{S}_1^{d_*}, \tilde{\overline{\mu}}_1^{d_*} \right)$ и $\left(\overline{S}_2^{d_*}, \tilde{\overline{\mu}}_2^{d_*} \right)$. Из того, что разметки $\tilde{\overline{\mu}}_1^{d_*} \in M^{d_*}$ и $\tilde{\overline{\mu}}_2^{d_*} \in M^{d_*}$ различны следует, что существует j_0 из множества $\{1,\ldots,d_*\}$ такое, что $\tilde{\mu}_1^{j_0} \neq \tilde{\mu}_2^{j_0}$. Поэтому является возможным построение подходящих частичных разметок $\overline{\mu}_1^{d_*} \in M_0^{d_*}$ и $\overline{\mu}_2^{d_*} \in M_0^{d_*}$, таким образом, что $\tilde{\mu}_1^{j_0} \neq \tilde{\mu}_2^{j_0}$ и $\mu_2^{j_0} \neq \tilde{\mu}_2^{j_0}$ и, следовательно, $\mu_1^{j_0} \neq \mu_2^{j_0}$. Очевидно, что данная пара разметок по условию (2) определения 15 и определению 17 является противоречивой парой и поэтому, как следует из теоремы 1, задача, содержащая в качестве прецедентов разметки $\tilde{\bar{\mu}}_1^{d_*}$ и $\tilde{\bar{\mu}}_2^{d_*}$, не является регулярной. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что задан набор прецедентов $H=\left\{\left(\bar{S}_i^{d_i},\bar{\mu}_i^{d_i}\right)\ \middle|\bar{\mu}_i^{d_i}\in M_0^{d_i};\ \bar{S}^{d_i}\in C^{d_i};i=1,...,q\ ;\ d_i\in N\right\}$, удовлетворяющий условиям теоремы. Для доказательства покажем, что для любой непротиворечивой частичной разметки существует алгоритм A_*, являющийся решением задачи.

Допустим, что в H существует k классов эквивалентных конфигураций, которым соответствуют поднаборы $\tilde{H}_j=\left\{\left(\bar{S}_p^{d_{l_j}},\bar{\mu}_p^{d_{l_j}}\right)\ \middle|\ p=l_1,...,l_j\ \in\{1,...,q\}\right\}$, где $j=1,...,k$. Тогда для каждого класса эквивалентности существует единственная подходящая конфигурация $\bar{\lambda}_j$, $j=1,...,k$, если класс содержит больше одной эквивалентной конфигурации. Для конфигурации $\bar{S}_i^{d_i}$, не имеющей эквивалентных в наборе H существует подходящая полная разметка $\tilde{\bar{\mu}}_i^{d_i}\in M^{d_i}$, являющаяся продолжением частичной разметки $\bar{\mu}_i^{d_i}\in M_0^{d_i}$. Тогда построим алгоритм A_* следующим образом: $A_*\left(S_*^d\right)=\bar{\gamma}_*^d$, где

$$\bar{\gamma}_*^d=\begin{cases}\ddot{\lambda}_j\ , & \text{если}\ \ \bar{S}_*^d\cong\bar{S}_i^{d_i}\in\tilde{H}_j\\ \tilde{\bar{\mu}}_i^{d_i}, & \text{если}\ \ \bar{S}_*^d=\bar{S}_i^{d_i}\notin\bigcup\limits_{j=1}^{k}\tilde{H}_j,\\ \bar{\mu}_*^d, & \text{если}\ \ \bar{S}_*\notin H.\end{cases}$$

$j=1,...,k$, а $\bar{\mu}_*$ - любая разметка для S_*.

Данный алгоритм A_* для всех конфигураций, входящих в набор прецедентов, назначает разметку, удовлетворяющую условиям (5) и (6) непротиворечивости поднаборов конфигураций из соответствующих классов эквивалентности. Для всех остальных конфигураций назначается любая разметка. Таким образом, оказываются выполненными условия (3) и (4) разрешимости задачи. Достаточность доказана.

Теорема доказана.

Литература.

1. Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I-III // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5-17, 1977. № 6. С. 21-27, 1978. № 2. С. 35-43.
2. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации // Проблемы кибернетики. Вып. 33 М.: Наука, 1978, С. 5-68.
3. Журавлев Ю.И. Рудаков К.В. Об алгебраической коррекции процедур обработки (преобразования) информации // Проблемы прикладной математики и информатики. М. Наука, 1987. С.187-198.
4. Рудаков К.В Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 2. С. 30- 35.
5. Рудаков К.В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 176-201.
6. Чехович Ю.В Вопросы алгебраического подхода к задачам выделения трендов // Материалы международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов 2001» Секция «Вычислительная математика и кибернетика» – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2001, С. 3-4.