С.Г. Головина, Е.В. Захаров

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ ТРЕХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МЕТОДОМ АКУСТИЧЕСКОГО ЧАСТОТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ*

Введение

В настоящее время метод акустического зондирования широко используется при решении многих прикладных задач: в медико-биологической диагностике, в акустике океана, сейсморазведке, дефектоскопии и т.д. Возникающая при этом обратная задача, связана с определением границ локальных неоднородностей в однородной среде по измерениям поля в ограниченной области расположения приемников.

Краевая задача для уравнения Гельмгольца для одной частоты была поставлена и решена методом интегральных уравнений в работе [1]. Разработанный и программно реализованный в [1] метод интегральных уравнений позволил поставить и решить ряд обратных задач акустического зондирования.

В данной работе рассмотрена обратная краевая задача для уравнения Гельмгольца в трехмерной однородной среде, содержащей несколько локальных неоднородностей с гладкой поверхностью разной формы по измерениям отраженного от неоднородностей волнового поля, возбуждаемого точечным источником в многочастотном случае.

Поставленная краевая задача для уравнения Гельмгольца сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма, предложен итерационный метод решения обратной задачи, приводятся результаты вычислительного эксперимента.

1. Постановка задачи

Распространение акустических волн малой амплитуды с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ в однородной среде Ω_0 с постоянным значением скорости распространения волн c_0 можно описать с помощью волнового уравнения [2,3]:

$$V(M,t)-\frac{1}{c^2(M)}V_{tt}(M,t)=F(t)\delta(M-M_f),$$

где $V(M,t)$ - поле в среде, зависящее от пространственной переменной $M(x,y,z)\in R^3$, $t\geq 0$, $c(M)$ - скорость распространения волн в среде, Δ - оператор Лапласа, $\delta(\cdot)$ - дельта-функция Дирака. Источники возбуждения описываются функцией $F(t)\delta(M-M_f)$, $M_f(x_f,y_f,z_f)$- точка, в которой располагается источник. В однородной среде содержатся односвязные области $\Omega_i \in R^3$, $i=1,\dots,N$, с границами $\partial\Omega_i$, $i=1,...,N$, которые являются поверхностями Ляпунова и не имеют общих точек. В областях Ω_i определена кусочно-гладкая функция $c_i(M)$, где $M(x,y,z)\in\Omega_i$. В области Ω_p расположены приемники для измерения рассеянного неоднородностями поля.

Поставим граничную задачу для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta v_j(M,\omega_j) + k_{0j}^2 v_j(M,\omega_j) = f(\omega_j)\delta(M-M_f), & M\in\Omega_0,\ j=1,...,K, \\ \Delta v_{ij}(M,\omega_j) + k_{ij}^2 v_{ij}(M,\omega_j) = 0, & M\in\Omega_i,\ i=1,...,N, \end{cases} \tag{1}$$

с условиями сопряжения на границах $\partial\Omega_i, i=1,...,N$,

$$\left[v_{ij}(M,\omega_j)\right]\Big|_{\partial\Omega_i}=0, \quad \left[\frac{\partial v_{ij}(M,\omega_j)}{\partial n_i}\right]\Big|_{\partial\Omega_i}=0, \quad i=1,...,N,\ j=1,...,K.$$

и условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$

$$\frac{\partial v_j(M,\omega_j)}{\partial r}-ik_{0j}v_j(M,\omega_j)=o\left(\frac{1}{r}\right), \quad v_j(M,\omega_j)=O\left(\frac{1}{r}\right),\ j=1,...,K,$$

где $v_j(M,\omega_j)$- поле давления при частоте ω_j, $[\cdot]$ обозначает разрыв значения функции на границе раздела сред, $k_{0j}=\dfrac{\omega_j}{c_0}$, $k_{ij}(M)=\dfrac{\omega_j}{c_i(M)}$, $\vec{n}_i$- внешние нормали к границам $\partial\Omega_i$, $i=1,...,N$, $f(\omega_j)$- амплитуда поля, $j=1,...,K$.

Введем новую функцию $\bar{c}_i(M)=c_0^{-2}-c_i^{-2}(M)$, тогда $c_i(M)=\dfrac{c_0}{\sqrt{1-\bar{c}_i(M)c_0^2}}$, $i=1,...N$. Полное поле для каждой частоты ω_j, $j=1,...,K$ можно представить как сумму первичного и вторичных полей $v_j(M,\omega_j) = v_{0j}(M,\omega_j) + \sum_{i=1}^{N} v_{ij}(M,\omega_j),\ i=1,...N$, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с разными правыми частями:

$$\Delta v_{0j}(M,\omega_j) + k_{0j}^2 v_{0j}(M,\omega_j) = f(\omega_j)\delta(M-M_f),\ j=1,...,K, \qquad (2)$$

$$\Delta v_{ij}(M,\omega_j) + k_{0j}^2 v_{ij}(M,\omega_j) = \omega_j^2 v_{ij}(M,\omega_j)\bar{c}_i(M), i=1,...,N,\ j=1,...,K. \qquad (3)$$

Оба поля удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности.

2. Построение системы интегральных уравнений Фредгольма.

В работах [4,5] был предложен метод интегральных уравнений для решения уравнения Гельмгольца. Введем функцию Грина

$$G(M,P,\omega_j) = \frac{1}{4\pi R(M,P)} \exp\left(i\frac{\omega_j}{c_0} R(M,P) \right),\ j=1,...,K,$$

где $R(M,P) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ - расстояние между точками $M(x,y,z)$ и $P(x_0,y_0,z_0)$, и перейдем от дифференциальных уравнений (2), (3) к интегральному уравнению для полей:

$$v_{ij}(M,\omega_j) = v_{0j}(M,\omega_j) + \\ + \omega_j^2 \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega_j)\bar{c}_i(P_i) v_{ij}(P_i,\omega_j) dP_i,\ i=1,...,N,\ j=1,...,K, \qquad (4)$$

где $v_{0j}(M,\omega_j) = \int\limits_{\Omega_f} G(M,P,\omega_j) f(\omega_j)\delta(P-M_f)dP$ - первичное поле.

Уравнение (4) можно записать отдельно для случаев, когда $M(x,y,z)$ принадлежит локальным неоднородностям $\Omega_i, i=1,...,N$, и области расположения приемников Ω_p :

$$\begin{cases} v_{ij}(M,\omega_j) = v_{0j}(M,\omega_j) + \\ \qquad + \omega_j^2 \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega_j)\bar{c}_i(P_i) v_{ij}(P_i,\omega_j) dP_i, \qquad M \in \Omega_i, \\ v_j(M,\omega_j) - v_{0j}(M,\omega_j) = \\ \qquad = \omega_j^2 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega_j)\bar{c}_i(P_i) v_{ij}(P_i,\omega_j) dP_i, \qquad M \in \Omega_p, \end{cases} \qquad (5)$$

где $i=1,...,N,\quad j=1,...,K.$

Данная система является нелинейной относительно функций $\bar{c}_i(M)$ и $v_{ij}(M,\omega_j)$ когда $M\in\Omega_i$, $i=1,...,N$. При решении прямой задачи, когда границы неоднородностей Ω_i, $i=1,...,N$, известны и нам известны функции $\bar{c}_i(M)$, $M\in\Omega_i$, $i=1,...,N$, необходимо решить интегральные уравнения Фредгольма второго рода и найти вторичные поля $v_{ij}(M,\omega_j)$, $M\in\Omega_i$, $i=1,...,N$, $j=1,...,K$. Из второго уравнения системы найти значения функции $v_j(M,\omega_j)$ в области расположения приемников $M\in\Omega_p$ для каждой частоты ω_j.

3. Численное решение обратной задачи

Обратная задача состоит в нахождении неизвестной функции $v_{ij}(M,\omega_j)$, $M\in\Omega_i$, $i=1,...,N$, и $\bar{c}_i(M)$ сразу для всех частот ω_j, $j=1,...,K$. Входные данные и неизвестные функции лежат в разных областях, имеют различные размерности и для них не выполнены обычные условия регулярности. В работах [7,8] предложены регуляризирующие методы решения задачи.

Выпишем абстрактный аналог системы (5) в виде операторного уравнения $F(z)=0$, где оператор F действует из гильбертова пространства H_1 в другое гильбертово пространство H_2, $z=[v_{1j}(M,\omega_j),...,v_{Nj}(M,\omega_j),\ \bar{c}_1(M),...,\bar{c}_N(M)]^T$ - вектор неизвестных. Для решения системы (5) использован метод Ньютона-Гаусса:

$$z_{n+1}=\arg\min_{z\in H}\left\|F(z_n)+F_n^{'}(z-z_n)\right\|^2=z_n-\left(F_n^{'*}F_n^{'}\right)^{-1}F_n^{'*}F_n,$$

где $F_n=F(z_n)$, $F_n^{'}=F^{'}(z_n)$. В итеративно-регуляризованном методе Ньютона-Гаусса на каждом шаге минимизируется по z функционал:

$$\Phi(\alpha_n,z_n,z)=\left\|F(z_n)+F_n^{'}(z-z_n)\right\|^2+\alpha_n\left\|z-\xi_n\right\|^2,$$

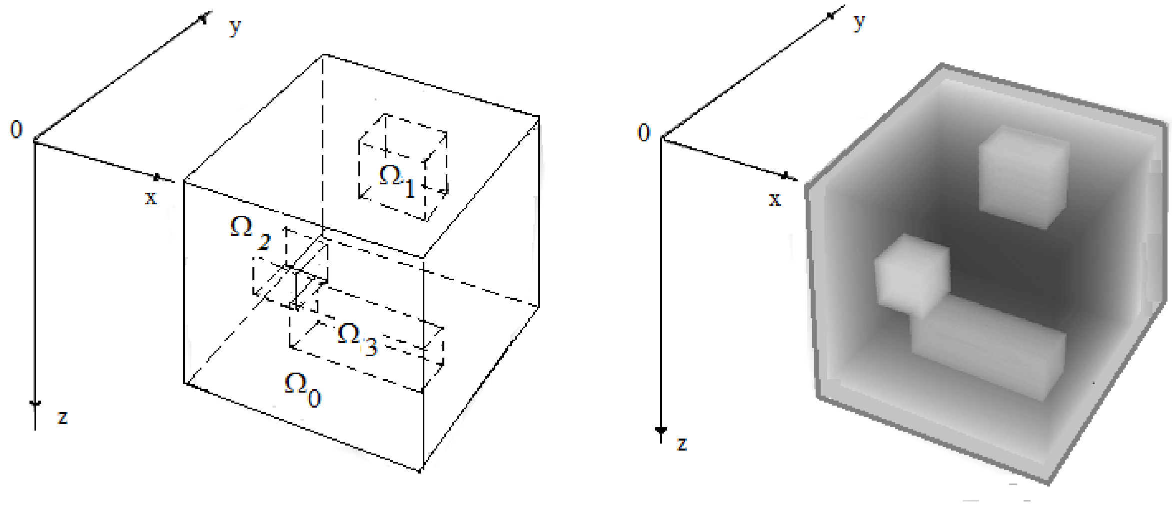
где α - параметр регуляризации, ξ_n-некоторый элемент H_1. Для решения системы (5) рассмотрим оптимизированный метод Ньютона-Гаусса и запишем систему в операторном виде:

$$\begin{cases} \mathrm{K}_1(v_{ij},\bar{c}_i) = v_{0j}(M,\omega_j) - v_{ij}(M,\omega_j) + \\ +\omega_j^2 \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega_j)\bar{c}_i(P_i)v_{ij}(P_i,\omega_j)dP_i, \qquad M \in \Omega_i, i=1,...,N, \\ \mathrm{K}_2(v_{ij},\bar{c}_i) = \omega_j^2 \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega_j)\bar{c}_i(P_i)v_{ij}(P_i,\omega_j)dP_i - \\ -v_j(M,\omega_j) - v_{0j}(M,\omega_j), \qquad M \in \Omega_p,\ j=1,...,K. \end{cases}$$

При построении итерационного процесса для данной системы последовательно решаются первое и второе уравнения. На первом шаге задается начальное приближение для функций $\bar{c}_i^0 = 0,\ i=1,...,N$, верхний индекс обозначает номер итерации. Далее для начального приближения для функции $\bar{c}_i^0$ найдем v_{ij}^0 - вторичное поле, решив для каждой $\omega_j,\ j=1,...,K,$ уравнение $\mathrm{K}_1\left(v_{ij}^0,\bar{c}_i^0\right)=0,\ i=1,...,N$ с использованием стандартных методов. На следующем шаге решаем уравнение $\mathrm{K}_2\left(v_{ij}^0,\bar{c}_i^1\right)=0,\ i=1,...,N,\ j=1,...,K$, сразу для всех j регуляризованным методом Ньютона-Гаусса и находим $\bar{c}_i^1$, затем решаем $\mathrm{K}_1\left(v_{ij}^1,\bar{c}_i^1\right)=0,\ i=1,...,N$ находим v_{ij}^1 и т.д.

Первый шаг предложенного итерационного метода совпадает с решением обратной задачи в борновском приближении, когда отраженные от неоднородностей поля заменяются первичным полем.

Модельные расчеты проводились для случая, когда в качестве входных данных использовалось решение прямой задачи с внесенной погрешностью 3%. Источник и приемники располагались в плоскости OXY. Источник имел координаты (271,0,0), измерения проводились на сетке приемников 25x25, расположенных в области $\Omega_p = \{z=0,\ 0<x<400,\ 0<y<400\}$.



а) б)

Рис.1

Исследуемая область Ω_0, в которой располагались три тела, имела форму куба $\Omega_0 = \{50 \le x \le 250,\ 20 \le y \le 220, 10 \le z \le 210\}$, размером 200x200x200, , неоднородности имели следующие размеры: $\Omega_1 = \{120 \le x \le 180,\ 140 \le y \le 200, 30 \le z \le 70\}$, размером 60x60x40, $\Omega_2 = \{70 \le x \le 110,\ 70 \le y \le 110, 100 \le z \le 140\}$, размером 40x40x40, $\Omega_3 = \{100 \le x \le 200,\ 100 \le y \le 140, 160 \le z \le 200\}$, размером 100x40x40, параметр регуляризации $\alpha = 0.01$, вычисления проводились для трех частот 370, 400, 420. На Рис. 1а изображено точное решение обратной задачи, Рис.1б – результаты вычислительного эксперимента предложенным итерационным методом. Для получения искомого решения было выполнено одиннадцать итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Головина С.Г., Захаров Е.В.* Численный метод решения обратной задачи для волнового уравнения в среде с локальной неоднородностью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2017.№ 4. С. 22-27.
2. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. *Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир. 2007.
4. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008.
5. *Kolton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Third ed. Vol. 93. Springer-Verlag, 2013.

6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
7. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решении некорректных задач. М.: Наука, 1989.
8. *Бакушинский А.Б., Левитан С.Ю.* Некоторые модели и численные методы нелинейной вычислительной диагностики // Сборник трудов ВНИИСИ АН СССР. Вып. 13. М.: Изд-во ВНИИСИ, 1991. С. 3-25.