М.Н. Саблин, Н.В. Арделян

ДВУМЕРНАЯ ОПЕРАТОРНО - РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТАХ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ, ОБЛАДАЮЩАЯ СВОЙСТВОМ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВБЛИЗИ ОСИ СИММЕТРИИ*

1. Введение

При построении и исследовании методов численного решения начально-краевых задач для уравнений математической физики важнейшую роль играет операторный подход теории разностных схем [1]. В последние десятилетия принципы операторного подхода были развиты применительно к задачам механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных и треугольных сетках [2-11]. Повышенное внимание к непрямоугольным и нерегулярным сеткам обусловлено эффективностью их использования при численном моделировании многомерных задач в сложных областях, задач, характеризующихся сильными пространственными локальными неоднородностями в решении, для которых целесообразно использование адаптивных сеток. Ввиду обширности библиографии по рассматриваемой тематике, при дальнейшем изложении мы не стремимся к полноте ссылок, отмечая лишь непосредственно используемую литературу. Достаточно полная библиография имеется в цитируемых статьях и монографиях.

Дадим краткую характеристику операторного подхода и отметим проблемы, необходимость решения которых вызвало выполнение настоящей работы. Последовательное применение операторного подхода включает несколько этапов:

1. построение сеточных аналогов инвариантных дифференциальных операторов первого порядка (дивергенция вектора и диадика, ротор вектора, градиент скаляра и вектора), обеспечение выполнения сеточных аналогов "базовых интегральных свойств" пар инвариантных дифференциальных операторов (интегральных следствий формул дифференцирования произведения двух функций, таких как первая формула Грина), исследование аппроксимационных свойств сеточных операторов;
2. формулировка сеточной задачи с использованием построенных сеточных операторов с заданными свойствами;

*Работа выполнена при поддержке Научной Программы МО РФ "Университеты России", проект 015.03.02.010.

3. операторная интерпретация – представление сеточной краевой задачи в виде операторных (в стационарном случае) или операторно-разностных (в нестационарном случае) уравнений в конечномерных пространствах сеточных функций;
4. обоснование построенной сеточной задачи на базе теории устойчивости операторно-разностных схем [12] и теории итерационных методов решения линейных и нелинейных операторных сеточных уравнений в конечномерных пространствах (см., например, [13,14]).
5. создание алгоритмов и универсальных комплексов программ, реализующих операторно-разностные схемы.

Операторный подход отличает ряд преимуществ, важнейшими из которых являются: инвариантная операторная запись сеточных задач для различных типов сеток, краевых условий, систем координат; возможность их обоснования на базе известных результатов теории операторно-разностных схем; возможность исследования новых методов и алгоритмов для новых задач на базе хорошо развитой теории линейных и нелинейных операторов в конечномерных пространствах; возможность создания, на базе единого операторного представления, программных комплексов решения широкого класса задач, описываемых на сеточном уровне операторно-разностными уравнениями специального вида. При надлежащей операторной интерпретации сеточные аналоги операторов *div* и -*grad*, *rot* и *rot* являются взаимосопряженными, а оператор их суперпозиции – самосопряженным знакоопределенным оператором. Последнее свойство должно быть конструктивным (алгоритмически легко реализуемым в операторном виде, не включающим краевые и другие условия в определение сеточных пространств) и выполнено для широкого класса типичных краевых условий, записываемых в операторной форме [9, 11, 15,16].

Операторный подход эффективно применялся при построении сеточных задач и численном моделировании на нерегулярных четырехугольных сетках [17], на многоугольных сетках [4, 5, 18-20], на треугольных сетках [9, 21, 22]. При использовании сильно нерегулярных четырехугольных и многоугольных сеток, как правило, один из пары сеточных операторов, удовлетворяющих "базовому интегральному свойству", не аппроксимирует локально соответствующий дифференциальный оператор. В этих случаях аппроксимация имеется в некоторой интегральной (слабой) норме [4]. Локальная аппроксимация на нерегулярных четырехугольных сетках имеет место лишь в случае квазирегулярных сеток (гладко отображающихся на прямоугольную сетку).

Общепринятой для метода опорных операторов и метода конечных объемов является так называемая ячеечно-узловая аппроксимация пар дифференциальных операторов, при которой один из операторов (узловой оператор) применяется к узловым функциям (заданным в узлах сетки), а другой (ячеечный оператор) – к ячеечным функциям (принимающим постоянные значения на многоугольных ячейках сетки). Результатом применения узловых операторов являются сеточные функции, заданные в ячейках. Узловые операторы строятся путем аппроксимации на ячейке сетки инвариантного интегрального определения соответствующих дифференциальных операторов (или, на треугольной сетке, путем дифференцирования кусочно-линейных восполнений узловых функций), ячеечные операторы строятся на основе сеточных аналогов "базовых интегральных свойств" пар инвариантных дифференциальных операторов. Такие сеточные операторы на треугольных сетках аппроксимируют локально соответствующие дифференциальные операторы, однако в аксиально симметричном случае локальная аппроксимация теряется на расстоянии порядка шага сетки от оси симметрии для ячеечных операторов [23, 9, 4]. Для ячеечного сеточного аналога оператора *grad* (применяемого к скалярной функции) на треугольной сетке имеется модификация, обеспечивающая локальную аппроксимацию [23], вносящая, однако, некоторые усложнения и ухудшения в методику в целом. Наш опыт решения сложных прикладных задач астрофизики [24, 25] и плазмодинамики [26-28] показывает, что отсутствие локальной аппроксимации отрицательно влияет на точность и достоверность получаемых результатов, особенно в случае задач с нетривиальными дифференциальными операторами (дивергенция диадика, градиент вектора, ротор), на сильно нерегулярных адаптивных сетках. Характерным простейшим примером отрицательного влияния отсутствия локальной аппроксимации вблизи оси симметрии является стандартная конечно-элементная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Пуассона с использованием кусочно-линейных лагранжевых элементов. В численном решении этой задачи наблюдается теоретически ожидаемая [29] неустранимая погрешность порядка единицы в численных значениях градиента искомой функции вблизи оси симметрии. Необходимость решения этой проблемы (и выполнение настоящей работы) продиктована в первую очередь необходимостью решения сложных прикладных задач в аксиально-симметричном случае.

Указанная проблема в принципе может быть решена на основе проекционно-сеточного подхода с использованием конечно-элементных аппроксимаций высокого порядка. Конечно-элементные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики [22] строятся путем проекционно-сеточной аппроксимации дифференциальных уравнений. При этом сеточные аналоги инвариантных дифференциальных операторов первого порядка не выделяются, не проводится строгий анализ выполнения "базовых интегральных свойств", локальной аппроксимации, конструктивной операторной интерпретации. Тем самым теряются такие преимущества операторного подхода, как единое обоснование устойчивости широкого класса операторно-разностных схем, возможность использования обоснованных ранее итерационных алгоритмов решения типичных операторных сеточных задач. Как отмечалось выше, в случае использования простейших лагранжевых элементов остается нерешенной проблема локальной аппроксимации вблизи оси симметрии. Другая проблемой является сильное расширение шаблона сеточных задач, особенно при использовании конечных элементов высоких порядков.

В настоящей работе на базе проекционного подхода построена и исследована узловая операторно-разностная схема для задач газовой динамики в переменных Лагранжа, которая имеет локальную аппроксимацию первого порядка в аксиально-симметричном случае вблизи оси симметрии. Кроме того, она обладает теми же операторными свойствами, что и ячеечно-узловой вариант [9]. Это позволяет применять для ее обоснования и решения уже существующие результаты, методы и алгоритмы.

2. Постановка задачи в дифференциальном виде.

В односвязной области $V(t)\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂V запишем систему уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{x}}{\mathrm{D}t}=\vec{v},\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho D)=0,$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\vec{v}D)=-D\nabla g,\quad g=p-\nu\nabla\cdot\vec{v};\quad p=P(\rho,T),\tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\varepsilon D)=-D(g\nabla\cdot\vec{v}+\nabla\cdot\vec{W}),\quad \vec{W}=-\theta\nabla T,\quad \varepsilon=E(\rho,T).$$

Дифференцирование по времени якобиана D, с учетом первого уравнения системы (1), дает уравнение

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}D=D\nabla\cdot\vec{v},\tag{1а}$$

из которого, с учетом второго уравнения системы (1), получается уравнение неразрывности в традиционной форме:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\eta=\eta\nabla\cdot\vec{v},\quad \eta=\frac{1}{\rho}.\tag{1б}$$

Здесь $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ – субстанциональная производная по времени t, ∇ – инвариантный дифференциальный оператор “набла”, ρ – плотность, $\vec{v}$ – скорость, T – температура, $\vec{x}$ – радиус-вектор частицы сплошной среды, p – давление, ε – внутренняя энергия, ν – коэффициент вязкости, θ – коэффициент теплопроводности, D – якобиан преобразования лагранжевой системы координат в эйлерову, E, P – функции, задающие уравнения состояния.

В статье рассматривается случай цилиндрической системы координат $\{r,\varphi,z\}$, когда отсутствует зависимость от угла φ и вращение $\left(v_\varphi = 0\right)$, а область V в каждый момент времени $t>0$ получается вращением вокруг оси симметрии $r = 0$ замкнутой односвязной области $\Sigma(t)$, лежащей в плоскости $\varphi \equiv const$.

В качестве лагранжевых координат взяты начальные (при $t = 0$) эйлеровы координаты $\left(r_0, z_0\right)$ кольцевых частиц среды. В этом случае $D = r\det\left(\dfrac{\partial(r,z)}{\partial(r_0,z_0)}\right)$. Считаем, что при $t = 0$ заданы начальные значения функций $\rho, T, \vec{v}$, и $\forall t \geq 0$ определены следующие краевые условия для динамических и тепловых величин:

$$\begin{aligned} &\vec{v}\big|_{\gamma_{v0}} = \vec{y}_0, \;\; g\big|_{\gamma_{v1}} = y_1, \;\; \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{v}\right)\big|_{\gamma_{v2}} = \vec{y}_2; \\ &T\big|_{\gamma_{\varepsilon 1}} = \mu_1, \;\; \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{W}\right)\big|_{\gamma_{\varepsilon 2}} = \vec{\mu}_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где граница $\partial\Sigma$ области Σ разбивается на непересекающиеся части следующим образом:

$$\partial\Sigma = \gamma_{v0} + \gamma_{v1} + \gamma_{v2} = \gamma_{\varepsilon 1} + \gamma_{\varepsilon 2}, \tag{2a}$$

а через $\omega(t)$ обозначен вектор единичной внешней нормали к границе $\omega_x(t)$.

3. Сеточные операторы и их свойства

В области $\Sigma(t)$ зададим треугольную сетку $\omega(t)$, обозначим через $\omega_x(t)$ множество ее узлов $\vec{x}(t)$, через $\omega_\Delta(t)$ – множество ее ячеек $\Delta(t)$, через $\Sigma_\omega(t)$ – сеточную область, являющуюся объединением ячеек $\Delta \in \omega_\Delta$, через $\partial\Sigma_\omega(t)$ – границу сеточной области, через $\omega_\gamma(t)$ – множество граничных узлов $\vec{x}_j \in \Sigma_\omega$. Окрестностью $Ш_j$ любого узла $\vec{x}_j \in \omega_x(t)$ будем называть множество смежных с ним узлов и треугольных ячеек. Элементы (узлы и ячейки) в окрестности $Ш_j$ любого узла $\vec{x}_j \in \omega_x(t)$ будем нумеровать против часовой стрелки, при этом вершинами ячейки $\Delta_l \in Ш_j$ являются узлы $\vec{x}_j, \vec{x}_l, \vec{x}_{l+1}$. В окрестности любого узла $\vec{x}_j = \left\{r_j, z_j\right\} \in \omega_x(t)$ определим стандартную базисную кусочно-линейную функцию φ_j [29]:

$$\forall \vec{x} = \{r, z\} \in \Delta_l \in Ш_j, \varphi_j\Big|_{\Delta_l} = \frac{\vec{N}_{l,l+1} \cdot \vec{L}_{x,l}}{2s_{\Delta_l}}, G_j = supp\,\varphi_j = \bigcup\left(\Delta_l \in Ш_j\right),$$

$$\vec{N}_{l,l+1} = \{z_{l+1} - z_l, r_l - r_{l+1}\}, \vec{L}_{x,l} = \{r_l - r, z_l - z\},$$

где $s_{\Delta l}$ – площадь ячейки Δ_l, $\vec{N}_{l,l+1}$ – правая нормаль к отрезку $[\vec{x}_l, \vec{x}_{l+1}]$, $\vec{L}_{x,l}$ – направленный вектор отрезка $[\vec{x}, \vec{x}_l]$.

Ниже будут использованы проверяемые непосредственно формулы:

$$\frac{D\varphi_j}{Dt} = 0, \forall \vec{x} \in \Delta_l \in Ш_j : \nabla\varphi_j(x) = -\frac{\vec{N}_{l,l+1}}{2s_{\Delta_l}} = const,$$

$$\sum_{x_j \in \omega_x} \int_{G_{j,0}} f\varphi_j D dr_0 dz_0 = \sum_{\omega_\Delta} \int_{\Delta} f\Big(\sum_{x_l \in Ш_\Delta} \varphi_l\Big) D dr_0 dz_0 = \int_{\Sigma_{j,0}} f D dr_0 dz_0.$$

Здесь и далее Σ_j – граница области G_j, нулевой индекс в интеграле будет обозначать интегрирование в лагранжевой системе координат.

На примере оператора *grad* рассмотрим некоторые возможности использования проекционно-сеточного подхода для определения сеточных операторов. Умножим уравнение $\vec{u} = \nabla f$ на базисную функцию φ_j и проинтегрируем:

$$\int_{G_j} \vec{u}\varphi_j r dr dz = \int_{G_j} (\nabla f)\varphi_j r dr dz. \qquad (3)$$

Следуя стандартной способу проекционно-сеточной аппроксимации, заменим в этом уравнении функции $\vec{u}, f$ на их кусочно-линейные интерполянты $\vec{u}_л, f_л$ на сетке ω_x. В итоге получим приближенное равенство

$$(B\vec{u}_x)_j \approx \int_{G_j} (\nabla f_л)\varphi_j r dr dz, B_{j,i} \equiv \sum_{x_i \in \omega_x} \int_{G_j} \varphi_i \varphi_j r dr dz, \qquad (4)$$

где $\vec{u}_x$ – проекция на сетку ω_x вектора $\vec{u}$, B – матрица размерности, равной числу узлов сетки ω_x. Равенства типа (3), в принципе, можно использовать для определения сеточных аналогов инвариантных дифференциальных операторов, однако при этом требует отдельного анализа выполнение сеточных аналогов "базовых интегральных свойств" сеточных операторов, постановка сеточных краевых условий, и, как следствие, выполнение операторных свойств получаемых сеточных задач. Кроме того, наличие оператора B в проекционно-сеточных аппроксимациях задач, описываемых системами уравнений, может существенно увеличивать шаблоны обращаемых операторов, что ведет к снижению экономичности алгоритма, а также усложняет проблему построения экономичных итерационных методов решения сеточных задач. В данной работе используется иной принцип построения сеточных операторов. В левой части уравнения (3), в соответствии с теоремой о среднем, вынесем значение функции $\vec{u}$ в некоторой точке $\vec{x}_j^* \in G_j$ за знак интеграла, а в правой части, как и ранее, заменим функцию f на ее кусочно-линейный интерполянт $f_л$ на сетке ω. В итоге получим:

$$(\nabla f)(\vec{x}_j^*) = \vec{u}(\vec{x}_j^*) \approx \left(\int\limits_{G_j} \varphi_j r dr dz \right)^{-1} \int\limits_{G_j} (\nabla f_л) \varphi_j r dr dz. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что для достаточно гладких функций $\vec{u}, f$ равенство в (5) выполняется с точностью $O(h)$, где h – диаметр области G_j. Для доказательства этого факта достаточно учесть, что $f_л = f + O(h^2)$ для функций с ограниченной второй производной. Из равенства (5) естественным образом следует используемый далее способ определения сеточных аналогов инвариантных дифференциальных операторов, обладающих свойством локальной аппроксимации.

Определим объем $V_{x,j}$ любого узла $\vec{x}_j \in \omega_x$ в соответствии с (5):

$$V_{x,j} = V_{x,j}(t) = \int\limits_{G_j(t)} \varphi_j r dr dz = \frac{1}{3} \sum_{\Delta_l \in Ш_j} s_l \frac{1}{4}(2r_j + r_l + r_{l+1}). \tag{6}$$

Данное определение объема отличается от используемого в случае ячеечно-узловой аппроксимации, где значение r берется в геометрическом центре ячейки.

Обозначим через $B_{x,\alpha}$, $\alpha = 0,1$ пространства сеточных функций ранга α, определенных на узловой сетке ω_x, со скалярным произведением:

$$\forall a, b \in B_{x,\alpha} : (a,b)_x = \sum_{x_j \in \omega_x} V_{x,j} a_j * b_j. \tag{7}$$

Здесь $(*)$ – знак произведения скаляров при $\alpha = 0$ и знак скалярного произведения векторов при $\alpha = 1$. Определим линейные операторы $(\nabla_x \cdot) \in \Im:(B_{x,1} \to B_{x,0}), (\nabla_x) \in \Im:(B_{x,0} \to B_{x,1})$, являющиеся сеточными аналогами операторов *div, grad* соответственно, следуя формуле (5):

$$\begin{gathered} \forall \vec{v} \in B_{x,1}, \vec{x}_j \in \omega_x : \ (\nabla_x \cdot \vec{v})_j = \frac{1}{V_{x,j}} \int\limits_{G_j} (\nabla \cdot \vec{v}_л) \varphi_j r dr dz; \ \vec{v}_л = \sum_{\vec{x}_j \in \omega_x} \vec{v}_j \varphi_j, \\ \forall p \in B_{x,0}, \vec{x}_j \in \omega_x : \ (\nabla_x p)_j = \frac{1}{V_{x,j}} \int\limits_{G_j} (\nabla p_л) \varphi_j r dr dz; \ p_л = \sum_{\vec{x}_j \in \omega_x} p_j \varphi_j. \end{gathered} \tag{8}$$

Из приведенного выше обсуждения точности формулы (5) следует локальная аппроксимация с первым порядком по h введенными сеточными операторами своих дифференциальных аналогов.

Для пары операторов (7) имеет место следующий сеточный аналог "базовой интегральной формулы":

$$\forall \vec{v} \in B_{x,1}, \quad \forall p \in B_{x,0}$$

$$\left(\nabla_x p, \vec{v}\right)_x + \left(p, \nabla_x \cdot \vec{v}\right)_x = \sum_{x_j \in \omega_x} \vec{v}_j \cdot \int_{G_j} \varphi_j \nabla p_л rdrdz + \sum_{x_j \in \omega_x} p_j \int_{G_j} \varphi_j \nabla \cdot \vec{v}_л rdrdz = \tag{9}$$

$$= \int_{\Sigma_\omega} \left(\vec{v}_л \cdot \nabla p_л + p_л \nabla \cdot \vec{v}_л\right) rdrdz = \int_{\Sigma_\omega} \nabla \cdot \left(p_л \vec{v}_л\right) rdrdz = \int_{\partial\Sigma_\omega} p_л d\vec{S} \cdot \vec{v}_л.$$

Представим правую часть равенства (9) в виде скалярного произведения в пространстве $B_{x,0}$:

$$\int_{\partial\Sigma_\omega} p_л d\vec{S} \cdot \vec{v}_л = \sum_{x_j \in \omega_\gamma} p_j \int_{\partial\Sigma_\omega} \varphi_j d\vec{S} \cdot \vec{v}_л = \left(p, \Phi_\gamma \cdot \vec{v}\right)_x,$$

$$\forall \vec{x}_j \in \omega_x : \left(\Phi_\gamma \cdot \vec{v}\right)_j = \begin{cases} \dfrac{1}{V_j} \displaystyle\int_{\partial\Sigma_\omega} \varphi_j d\vec{S} \cdot \vec{v}_л, x_j \in \omega_\gamma, \\ 0, x_j \in \omega_x \setminus \omega_\gamma. \end{cases} \tag{10}$$

где $\left(\Phi_\gamma \cdot\right) \in \Im:(B_{x,1} \to B_{x,0})$ – граничный линейный оператор, действующий на векторные сеточные функции, $d\vec{S} = \vec{n} rdl$, dl – элемент длины линии $\partial\Sigma_\omega$. Аналогично получим граничный оператор $\Phi_\gamma \in \Im:(B_{x,0} \to B_{x,1})$, действующий на скалярные сеточные функции:

$$\int_{\partial\Sigma_{\omega,0}} p_л d\vec{S} \cdot \vec{v}_л = \sum_{x_j \in \omega_\gamma} \vec{v}_j \cdot \int_{\partial\Sigma_\omega} p \varphi_j d\vec{S} = \left(\vec{v}, \Phi_\gamma p\right)_x,$$

$$\forall \vec{x}_j \in \omega_x : \left(\Phi_\gamma p\right)_j = \begin{cases} \dfrac{1}{V_j} \displaystyle\int_{\partial\Sigma_\omega} \varphi_j p d\vec{S}, x_j \in \omega_\gamma, \\ 0, x_j \in \omega_x \setminus \omega_\gamma. \end{cases} \tag{10a}$$

Из (9)-(11) следует взаимосопряженность пар операторов:

$$\nabla_x - \Phi_\gamma = -\left(\nabla_x \cdot\right)^*, \ \left(\nabla_x \cdot\right) - \left(\Phi_\gamma \cdot\right) = -\left(\nabla_x\right)^*, \ \Phi_\gamma = \left(\Phi_\gamma \cdot\right)^*. \tag{11}$$

4. Способ операторной интерпретации сеточных краевых задач

Формулы (9)-(11) дают базовый аппарат для представления сеточных краевых задач с участием сеточных аналогов инвариантных дифференциальных операторов *div, grad* в виде операторных уравнений со взаимосопряженными операторами. Краевые условия (первого второго или третьего рода) при этом должны формулироваться через граничные операторы Φ_γ, $\left(\Phi_\gamma\,\cdot\right)$. Используемый здесь подход к изучению операторных свойств и использование граничных операторов для аппроксимации сеточных краевых условий в случае ячеечно-узловой аппроксимации на треугольной сетке описаны в [9, 15, 16, 30-33]. Рассмотрим способ операторной интерпретации сеточных краевых задач, включающих введенные выше узловые операторы.

Разобьем границу на четыре части: $\partial\Sigma_\omega = \partial\Sigma_{\omega 0} + \partial\Sigma_{\omega 1} + \partial\Sigma_{\omega 2} + \partial\Sigma_{\omega 3}$. Считаем, что пересечение смежных частей границы происходит в узле сетки, который является крайней точкой обеих частей границы. Введем четыре пары граничных операторов:

$$\forall \vec{x}_j \in \omega_x : \left(\Phi_{\gamma k} p\right)_j = \begin{cases} \dfrac{1}{V_j} \displaystyle\int_{\partial\Sigma_{\omega k}} \varphi_j p d\vec{S}, \vec{x}_j \in \Sigma_{\omega k} \\ 0, \vec{x}_j \notin \Sigma_{\omega k} \end{cases}$$

$$\left(\Phi_{\gamma k} \cdot \vec{v}\right)_j = \begin{cases} \dfrac{1}{V_j} \displaystyle\int_{\partial\Sigma_{\omega k}} \varphi_j d\vec{S} \cdot \vec{v}_л, \vec{x}_j \in \Sigma_{\omega k} \\ 0, \vec{x}_j \notin \Sigma_{\omega k} \end{cases}, \qquad (12)$$

где k=0,1,2,3. Нетрудно видеть, что

$$\Phi_{\gamma k} = \left(\Phi_{\gamma k}\,\cdot\right)^*, \ \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma 0} + \Phi_{\gamma 2} + \Phi_{\gamma 2} + \Phi_{\gamma 3},$$
$$\left(\Phi_\gamma\,\cdot\right) = \left(\Phi_{\gamma 0}\,\cdot\right) + \left(\Phi_{\gamma 1}\,\cdot\right) + \left(\Phi_{\gamma 2}\,\cdot\right) + \left(\Phi_{\gamma 3}\,\cdot\right). \qquad (12a)$$

Введем операторы δ_k проектирования сеточных функций на соответствующую часть границы:

$$\forall f \in B_{x,\alpha} : \ \left(\delta_k f\right)_j = \begin{cases} f_j, \ \vec{x}_j \in \Sigma_{\omega k} \\ 0, \ \vec{x}_j \notin \Sigma_{\omega k} \end{cases}.$$

Очевидно что $\delta_k = \delta_k^* \geq 0$. Рассмотрим оператор $A_{21} \equiv \left(I - \delta_0\right)\left(\nabla_x - \Phi_{\gamma 3}\right)\left(I - \delta_1\right)$ и найдем сопряженный к нему, используя очевидные свойства $\left(I - \delta_1\right)\left(\Phi_{\gamma 1}\,\cdot\right) = 0$, $\left(\Phi_{\gamma 0}\,\cdot\right)\left(I - \delta_0\right) = 0$:

$$
\begin{aligned}
A_{21}^* &\equiv \left[(I-\delta_0)(\nabla_x - \Phi_{\gamma 3})(I-\delta_1)\right]^* = \left[(\nabla_x - \Phi_{\gamma 3})(I-\delta_1)\right]^*(I-\delta_0) = \\
&= (I-\delta_1)\left[-(\nabla_x \cdot) + (\Phi_\gamma \cdot) - (\Phi_{\gamma 3} \cdot)\right](I-\delta_0) = \\
&= (I-\delta_1)\left[-(\nabla_x \cdot) + (\Phi_{\gamma 0} \cdot) + (\Phi_{\gamma 2} \cdot) + (\Phi_{\gamma 1} \cdot)\right](I-\delta_0) = \\
&= (I-\delta_1)\left[-(\nabla_x \cdot) + (\Phi_{\gamma 2} \cdot)\right](I-\delta_0) \equiv -A_{12}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Тем самым имеем пару взаимосопряженных операторов $A_{21}, -A_{12}$. Рассмотрим модельную систему сеточных операторных уравнений

$$
\vec{v} + \nabla_x p = 0, \;\; p + \nabla_x \cdot \vec{v} = 0, \;\; p \in B_{x,0}, \vec{v} \in B_{x,1} \tag{14}
$$

С точки зрения постановки краевых условий, эта система моделирует любые задачи, в которых в разных уравнениях системы присутствуют операторы *div*, *grad*: уравнение эллиптического типа, записанное в виде системы; уравнения акустики и, следовательно, газовой динамики (при этом вместо $\vec{v}$, p в (14) пишутся их производные по времени); уравнение параболического типа (диффузии или теплопроводности, при этом в (14) вместо p пишется также производная по времени). Дополним систему (14) сеточными краевыми условиями следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&\delta_0 \vec{v} = \delta_0 \vec{y}_0, \;\; \delta_1 p = \delta_1 y_1, \;\; \Phi_{\gamma 2} \cdot \vec{v} = \Phi_{\gamma 2} \cdot a_{\gamma 2} \Phi_{\gamma 2} p + \Phi_{\gamma 2} \cdot \vec{y}_2, \\
&\Phi_{\gamma 3} p = \Phi_{\gamma 3} a_{\gamma 3} \Phi_{\gamma 3} \cdot \vec{v} + \Phi_{\gamma 3} y_3,
\end{aligned} \tag{15}
$$

где y_k – заданные граничные сеточные функции, $a = a^* \geq 0$ – операторные коэффициенты (как правило, с диагональными матрицами), выбираемые из условия аппроксимации соответствующих краевых условий. Первое из этих краевых условий (условие нулевого рода) ставится в задачах газовой динамики и акустики в качестве условия прилипания или при заданной скорости $\vec{y}_0$ потока на границе. Второе условие соответствует условию на свободной границе в газовой динамике или традиционному условию первого рода в тепловых или диффузионных задачах. Третье условие – это условие непротекания (скольжения) в газодинамических приложениях ($a_{\gamma 2} = 0$) и традиционное условие второго или третьего рода ($a_{\gamma 2} > 0$). Последнее из этих условий является другим вариантом постановки сеточного условия третьего рода, оно может быть предпочтительнее с точки зрения реализации и в случае, когда условие третьего рода может переходить в условие первого рода ($a_{\gamma 3} \geq 0$). Первые два соотношения из (15) аппроксимируют соответствующие краевые условия точно, остальные – со вторым порядком везде, кроме точек смены типа граничного условия (в этих точках имеет место аппроксимация краевых условий с первым порядком).

Система уравнений (14), (15) является переопределенной – в ней уравнений больше чем неизвестных. Операторная интерпретация состоит в включении краевых условий (15) в систему (14) таким образом, чтобы получилась корректная система сеточных операторных уравнений. Предполагая справедливость для функций $p, \vec{v}$ сеточных краевых условий (15), получим:

$$
\begin{aligned}
&(I-\delta_0)\nabla_x p = (I-\delta_0)\left(\nabla_x p - \Phi_{\gamma 3} p + \Phi_{\gamma 3} a_{\gamma 3} \Phi_{\gamma 3} \cdot \vec{v} + \Phi_{\gamma 3} y_3\right) = \\
&= (I-\delta_0)\left(\nabla_x - \Phi_{\gamma 3}\right)\left[(I-\delta_1)p + \delta_1 y_1\right] + \\
&+ (I-\delta_0)\Phi_{\gamma 3} a_{\gamma 3} \Phi_{\gamma 3} \cdot \left[(I-\delta_0)\vec{v} + \delta_0 \vec{y}_0\right] + (I-\delta_0)\Phi_{\gamma 3} y_3 = \\
&= A_{21} p + A_{\gamma 3}\vec{v} + \vec{f}_p, \quad A_{\gamma 3} \equiv (I-\delta_0)\Phi_{\gamma 3} a_{\gamma 3} \Phi_{\gamma 3} \cdot (I-\delta_0) = A_{\gamma 3}^* \geq 0, \\
&\vec{f}_p \equiv (I-\delta_0)\left(\nabla_x - \Phi_{\gamma 3}\right)\delta_1 y_1 + (I-\delta_0)\Phi_{\gamma 3} a_{\gamma 3} \Phi_{\gamma 3} \cdot \delta_0 \vec{y}_0 + (I-\delta_0)\Phi_{\gamma 3} y_3 .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Аналогично преобразуем величину $\nabla_x \cdot \vec{v}$:

$$
\begin{aligned}
&(I-\delta_1)\nabla_x \cdot \vec{v} = (I-\delta_1)\left(\nabla_x \cdot \vec{v} - \Phi_{\gamma 2} \cdot \vec{v} + \Phi_{\gamma 2} \cdot a_{\gamma 2} \Phi_{\gamma 2} p + \Phi_{\gamma 2} \cdot \vec{y}_2\right) = \\
&= (I-\delta_1)\left[(\nabla_x \cdot) - (\Phi_{\gamma 2} \cdot)\right] \cdot \left[(I-\delta_0)\vec{v} + \delta_0 \vec{y}_0\right] + \\
&+ (I-\delta_1)\Phi_{\gamma 2} \cdot a_{\gamma 2} \Phi_{\gamma 2}\left[(I-\delta_1)p + \delta_1 y_1\right] + (I-\delta_1)\Phi_{\gamma 2} \cdot \vec{y}_2 = \\
&= A_{12}\vec{v} + A_{\gamma 2} p + f_v, \quad A_{\gamma 2} \equiv (I-\delta_1)\Phi_{\gamma 2} \cdot a_{\gamma 2} \Phi_{\gamma 2} \cdot (I-\delta_1) = A_{\gamma 2}^* \geq 0, \\
&f_v \equiv (I-\delta_1)\left[(\nabla_x \cdot) - (\Phi_{\gamma 2} \cdot)\right]\delta_0 \vec{y}_0 + \\
&+ (I-\delta_1)\Phi_{\gamma 2} a_{\gamma 2} \Phi_{\gamma 2} \cdot \delta_1 y_1 + (I-\delta_1)\Phi_{\gamma 2} \cdot \vec{y}_2 .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Подставим результат преобразований (16), (17) и первые два условия (15) в (14):

$$
\begin{aligned}
&\vec{v} + A_{21} p + A_{\gamma 3}\vec{v} = \delta_0 \vec{y}_0 - \vec{f}_p, \quad p + A_{12}\vec{v} + A_{\gamma 2} p = \delta_1 y_1 - f_v, \\
&A_{21} = -A_{12}^*, \quad A_{\gamma 3} = A_{\gamma 3}^* \geq 0, \quad A_{\gamma 2} = A_{\gamma 2}^* \geq 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Нетрудно видеть, что система операторных уравнений (18) имеет единственное решение. Сходимость ее решения к решению соответствующей краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных доказывается стандартными методами теории разностных схем [1] (см. также [15, 30, 31]), с учетом аппроксимационных свойств операторов (8) и краевых условий (15). Формулы (13), (16), (17), определяющие операторы системы (18), являются конструктивными и легко реализуются программно в операторном виде.

Рассматривая систему операторных сеточных уравнений (18) поточечно, можно дать следующий поясняющий комментарий. В узлах границ

$\partial\Sigma_{\omega 0}$, $\partial\Sigma_{\omega 1}$, как и при стандартной операторной записи задач с условием первого рода [1], вместо уравнения для функций $\vec{v}, p$ пишется соответствующее краевое условие, при этом граничные значения функции включается в уравнения в точках, окрестность которых содержит соответствующие граничные узлы. В узлах границ $\partial\Sigma_{\omega 2}$, $\partial\Sigma_{\omega 3}$ сеточный интеграл по граничной части шаблона, входящий в определение сеточного оператора, заменяется в соответствии с краевым условием. Такой принцип реализуется как при стандартном операторном представлении разностных схем с краевыми условиями второго и третьего рода [1], так и при рассмотрении сеточных задач, получаемых методом конечных элементов.

Как видно из вышеизложенного, предварительное операторное описание краевых условий позволяет легко комбинировать указанные принципы на операторном уровне при наличии краевых условий разных типов, и избавляет от громоздкого и трудно обозримого поточечного анализа сеточных уравнений в граничных и приграничных точках. Существенным для эффективной операторной реализации указанных принципов является определение граничных операторов в виде (10), (12) и их свойства (12а). Такой способ определения граничных операторов также является естественным при рассмотрении сеточных задач метода конечных элементов с различными типами краевых условий, получаемых из вариационной формулировки. Сеточная задача (18) и соответствующие сеточные операторы не могут быть получены на основе конечно-элементной вариационной формулировки, они являются результатом применения описанного выше варианта проекционно-сеточного подхода, дополненного согласованной операторной формулировкой краевых условий. Отметим, что в одномерном случае используемый способ построения сеточных узловых операторов приводит к центрально-разностной аппроксимации.

5. Операторно-разностная схема

На временном отрезке $t \in [0, t_1]$ введем сетку $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,2...\}$ с шагом τ. Для функций, определенных на этой сетке, будем использовать стандартные обозначения [1]:

$$f(t_n) = f^n = f, \check{f} = f^{n-1}, f^\sigma = \sigma f + (1-\sigma)\check{f}, f_{\bar{t}} = \frac{f - \check{f}}{\tau} = \frac{f^\sigma - \check{f}}{\tau\sigma},$$

где $\sigma > 0$ – числовой параметр. Введем абстрактные сеточные функции параметра $t \in \omega_\tau$ со значениями во введенных выше пространствах: $\forall t \in \omega_\tau : \vec{x}(t), \vec{v}(t) \in B_{x,1}$, $V_x(t), \rho(t), T(t) \in B_{x,0}$, где объемы $V_{x,j}$ вычисляются по формуле (6). Систему уравнений (1) аппроксимируем следующей операторно-разностной схемой:

$$
\begin{aligned}
&\vec{x}_t = \vec{v}^{0.5}, \ (\rho V_x)_t = 0, \\
&(\rho \vec{v} V_x)_t = -\breve{V}_x \nabla_x^{0.5} g, \ g = p - \nu \nabla_x^{0.5} \cdot \vec{v}^{0.5}, \\
&(\rho \varepsilon V_x)_t = -\breve{V}_x \left(g \nabla_x^{0.5} \cdot \vec{v}^{0.5} + \nabla_x \cdot \vec{W} \right), \\
&\vec{W} = -\theta \nabla_x T^{\alpha}, \ p = P(\rho^{\sigma}, T^{\beta}), \ \varepsilon = E(\rho, T)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Здесь α, β, σ – свободные весовые параметры, верхний индекс 0.5 в сеточных аналогах операторов *div*, *grad* указывает на определяемый ниже способ взвешивания пространственных координат в определении этих операторов, объемы V_x в определении этих же сеточных операторов берутся явно, с предыдущего шага по времени.

Для эффективного применения к схеме (19) известных результатов по исследованию устойчивости в линейном приближении и построению эффективных алгоритмов решения неявных вариантов схемы (19), существенным является справедливость прямого сеточного аналога уравнения неразрывности (1б) в традиционной форме. Для этого необходимо выполнение сеточного аналога формулы (1а).

В дифференциальном по времени случае таким аналогом является формула

$$
\frac{\partial V_{x,j}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \varphi_j r dr dz\right) = \int \varphi_j \frac{\partial D}{\partial t} dr_0 dz_0 = \int \varphi_j r \nabla \cdot \vec{v}_л dr dz = V_x \nabla_x \cdot \vec{v}\,.
$$

Здесь использовано уравнение (1а) и то, что сеточная область движется со скоростью $\vec{v}_л$. С другой стороны, дифференцируя по времени определение объема (8) непосредственно, получим расчетную формулу для оператора ($\nabla_x \cdot$):

$$
V_x \nabla_x \cdot \vec{v} = \frac{\partial V_{x,j}}{\partial t} = \frac{1}{4} \sum_{\Delta_l \in Ш_j} \left[\left(2r_j + r_l + r_{l+1}\right) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \vec{N}_{k-1,k+1} \cdot \vec{v}_k + s_l \vec{i}_r \cdot \left(2\vec{v}_j + \vec{v}_l + \vec{v}_{l+1}\right) \right],
$$

где индексом k нумеруются против часовой стрелки узлы – вершины ячейки Δ_l. Отсюда немедленно следует разностный аналог формулы (1а):

$$
\begin{aligned}
&\left(V_{x,j}\right)_t = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\Delta_l \in Ш_j} \left[\frac{1}{2}\left(2r_j + r_l + r_{l+1}\right)^{0.5} \sum_{k=1}^{3} \vec{N}_{k-1,k+1}^{0.5} \cdot \vec{v}_k^{0.5} + s_l^{\,0.5} \vec{i}_r \cdot \left(2\vec{v}_j + \vec{v}_l + \vec{v}_{l+1}\right)^{0.5} \right] \equiv \\
&\equiv \breve{V}_x \nabla_x^{0.5} \cdot \vec{v}^{0.5}
\end{aligned}
\tag{19a}
$$

В схеме (19) сеточные операторы берутся в соответствии с последней формулой. Сеточный оператор ($-\nabla_x^{0.5} + \Phi_\gamma^{0.5}$) строится как сопряженный к оператору (19а) в соответствии с (9)-(11), затем согласованным образом строится оператор $\Phi_\gamma^{0.5}$. Мы здесь опускаем детали этого построения. Следствием соотношения (19а) и второго уравнения системы (19) является требуемый сеточный аналог уравнения неразрывности:

$$(\eta)_t = \left(\breve{\eta}\,\nabla_x^{0.5}\cdot\vec{v}^{0.5}\right), \eta = \frac{1}{\rho}. \tag{19б}$$

Для системы операторно-разностных уравнений (19) справедливы сеточные аналоги балансов массы, внутренней, кинетической и полной энергии:

$$\left(\sum_{x_j\in\omega_x}\rho_j V_{x,j}\right)_t = 0,\quad \left(\sum_{x_j\in\omega_x}\rho_j\varepsilon_j V_{x,j}\right)_t = -\left(g_л,\left(\nabla_x^{0.5}\cdot\vec{v}_л^{0.5}\right)\right)_x - \left(\left(\Phi_\gamma\cdot\vec{W}\right),1\right)_x,$$

$$\left(\sum_{x_j\in\omega_x}\rho_j\frac{\vec{v}_j^{\,2}}{2}V_{x,j}\right)_t = -\left(\vec{v}_л^{0.5},\left(\nabla_x^{0.5}g_л\right)\right)_x,$$

$$\left(\sum_{x\in\omega_x}\rho_j\left(\varepsilon_j+\frac{\vec{v}_j^{\,2}}{2}\right)V_{x,j}\right)_t = -\left(\left(\Phi_\gamma^{0.5}g_л\right),\vec{v}_л^{0.5}\right)_x - \left(\left(\Phi_\gamma\cdot\vec{W}\right),1\right)_x.$$

Сеточные аналоги балансов объема и количества движения выполнены в дифференциальном по времени случае и имеют вид:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\sum_{x\in\omega_x}V_x\right) = \int_{\partial\Sigma(t)} d\vec{S}\cdot\vec{v}_л,\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\sum_{x\in\omega_x}\rho_x\vec{v}_xV_x\right) = -\int_{\partial\Sigma(t)} d\vec{S}g_л + \int_{\Sigma(t)}\vec{i}_r g_л dr dz.$$

В разностном по времени случае баланс количества движения выполнен по крайней мере с точностью $O(\tau^2)$. Точное выполнение сеточного аналога этого баланса зависит от дивергентности оператора $\nabla_x^{0.5}$, которая заведомо имеет место с точностью $O(\tau^2)$. Сеточный аналог баланса объема выполнен в том же виде, что и в случае ячеечно-узловой аппроксимации [9, стр. 47].

Таким образом, построена полностью консервативная операторно-разностная разностная схема (19), (19б), которая локально аппроксимирует систему (1), (1б), в том числе вблизи оси симметрии.

6. Операторная постановка сеточной краевой задачи

Для полной постановки сеточной задачи необходимо учесть краевые условия в системе сеточных операторно-разностных уравнений (19). Рассмотрим случай краевых условий одного типа, в частности, считаем что в (2а) $\gamma_a = \varnothing$ $(a = v0, v2, \varepsilon 1)$. Это соответствует заданию полного давления g на свободной границе и нулевого потока тепла в уравнении энергии с учетом теплопроводности. В пункте 3 настоящей статьи дано достаточно полное и конструктивное описание способа учета краевых условий и операторной интерпретации на примере модельной задачи (14) в общем случае, интересном с теоретической точки зрения и необходимом при численном моделировании реальных прикладных задач. Этот способ применим непосредственно к рассматриваемой системе уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах. Здесь для наглядности и уменьшения громоздкости формул мы рассматриваем частный случай.

Перепишем (19), (19б) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}
&\vec{x}_t = \vec{v}^{0.5},\ \eta_t + \nabla^{0.5}_{x,m} \cdot \vec{v}^{0.5} = 0,\\
&\vec{v}_t + \nabla^{0.5}_{x,m} g = 0,\ g = p - \nu\breve{\rho}(\nabla^{0.5}_{x,m} \cdot \vec{v}^{0.5})_x,\\
&\varepsilon_t + g(\nabla^{0.5}_{x,m} \cdot \vec{v}^{0.5}) + (\nabla_{x,m} \cdot \vec{W}) = 0,\ \vec{W}_x = -\theta\rho(\nabla_{x,m} T^{\alpha}),\\
&p = P(\rho^{\sigma}, T^{\beta}),\ \varepsilon = E(\rho, T).
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $\nabla_{x,m} = \frac{V_x}{m}\nabla_x$, $\forall x_j \in \omega_x : m_j = \rho_j V_{x,j} = const$. Для функций y, μ, заданных краевыми условиями (2), теми же буквами будем обозначать их проекцию на граничную сетку $\omega_\gamma \times \omega_\tau$. Сеточные краевые условия сформулируем в виде:

$$\forall x_j \in \omega_\gamma :\ g_j = y_{1,j},\ \left(\Phi_\gamma \cdot \vec{W}\right)_j = \left(\Phi_\gamma \cdot \vec{\mu}_2\right)_j \tag{21}$$

Первое из условий (21) является точным с точки зрения аппроксимации, второе аппроксимирует соответствующее краевое условие из (2) с точностью $O(h^2)$. Очевидно, на фиксированном шаге по времени сеточная краевая задача (20), (21) переопределена – в ней уравнений больше, чем неизвестных. Поэтому необходимо, как и в пункте 3, включить краевые условия (21) в систему сеточных уравнений (20) так, чтобы обеспечить корректность полученной задачи. Заметим, что в ячеечно-узловом случае [9] переопределенность не возникает, однако операторная интерпретация все равно остается необходимой для получения операторных свойств, обеспечивающих корректность (устойчивость и сходимость в линейном приближении, разрешимость и эффективную реализацию).

Операторные свойства сеточной начально-краевой задачи (20), (21) будем рассматривать в пространстве $\overset{m}{B}_{x,\alpha}$, $(\alpha = 0,1)$ сеточных функций ранга α=0,1, со скалярным произведением:

$$\forall a,b \in \overset{m}{B}_{x,\alpha} : (a,b)_x = \sum_{x_j \in \omega_x} m_j a_j * b_j .$$

Заметим, что для сеточных функций, удовлетворяющих краевым условиям (21)

$$\nabla^{0.5}_{x,m}g = \left(\nabla^{0.5}_{x,m}g - \Phi^{0.5}_{\gamma}g + \Phi^{0.5}_{\gamma}y_1\right), \nabla_{x,m}\cdot\vec{W} = \left(\nabla_{x,m}\cdot\vec{W} - \Phi_{\gamma}\cdot\vec{W} + \Phi_{\gamma}\cdot\vec{\mu}_2\right). \quad (22)$$

Вводя линейные операторы

$$A_{12}(\vec{x}), A_{56}(\vec{x}) \in \mathcal{L}\left(\overset{m}{B}_{x,1} \to \overset{m}{B}_{x,0}\right),\ A_{21}(\vec{x}), A_{65}(\vec{x}) \in \mathcal{L}\left(\overset{m}{B}_{x,0} \to \overset{m}{B}_{x,1}\right),$$

зависящие от пространственной сеточной координаты $\vec{x}$ как от параметра:

$$A_{12} \equiv \left(\nabla^{0.5}_{x,m}\cdot\right),\ A_{21} \equiv \left(\nabla^{0.5}_{x,m} - \Phi^{0.5}_{\gamma,m}\right),\ A_{56} \equiv \left(\nabla_{x,m}\cdot\right) - \left(\Phi_{\gamma,m}\cdot\right),\ A_{65} \equiv \nabla_{x,m}, \quad (23)$$

представим формулы (22) в виде:

$$\nabla^{0.5}_{x,m}g = A_{21}g + \vec{f}_g,\ \vec{f}_g \equiv \Phi^{0.5}_{\gamma,m}y_1,\ \nabla_{x,m}\cdot\vec{W} = \left(A_{56}\vec{W} + f_W\right),\ f_W \equiv \Phi_{\gamma}\cdot\vec{\mu}_2 f_W. \quad (24)$$

Из (9)-(11) следует $\left(A_{12}\right)^* = -A_{21}$, $\left(A_{56}\right)^* = -A_{65}$. Отсюда также следует, что $A_{22} \equiv -A_{21}\nu\breve{\rho}A_{12} = A^*_{22} \geq 0$ и $A_{55} = -A_{56}\theta\rho A_{65} = A^*_{55} \geq 0$. Подставим формулы (24) в систему операторно-разностных уравнений (20):

$$\begin{aligned}
&\vec{x}_t = \vec{v}^{0.5},\ \eta_t + A_{21}\vec{v}^{0.5} = 0,\ \eta = \frac{1}{\rho},\\
&\left(\vec{v}\right)_t + A_{12}p + A_{22}\vec{v}^{0.5} + \vec{f}_g = 0,\\
&(\varepsilon)_t + pA_{21}\vec{v}^{0.5} - \nu\breve{\rho}\left(A_{21}\vec{v}^{0.5}\right)^2 + A_{55}T^{\alpha} + f_W = 0,\\
&p = P\left(\rho^{\sigma}, T^{\beta}\right),\ \varepsilon = E(\rho, T).
\end{aligned} \quad (25)$$

Построенная операторно-разностная схема (25) совпадает по написанию с ячеечно-узловой схемой [9, 16, 33-35] и обладает теми же операторными свойствами, отличие состоит лишь в способе задания операторов. В таком же виде записываются схемы газовой динамики в переменных Лагранжа с любыми стандартными типами краевых условий (см. пункт 3)), в одномерном случае [36, 37], в трехмерном случае также целесообразна такая реализация операторного подхода. Для обоснования схемы (25) применимы все известные (цитированные выше) результаты: по устойчивости и сходимости в линейном приближении, по построению и исследованию итерационных методов решения. Так же применимы все имеющиеся для ячеечно-узлового случая алгоритмы реализации и частично программы, формулируемые в операторном виде. Схема (25) наглядно иллюстрирует тот факт, что операторная запись сеточных начально-краевых задач может служить основой для создания надежных многоцелевых интерактивных программных средств для численного моделирования широкого класса задач различной размерности, на различных сетках.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1977.

2. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы. //ДУ. 1981. Т.17, № 7. С 1317-1327.

3. Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М: Наука. 1992.

4. Самарский А.А., Колдоба, А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск.: ЗАО "Критерий". 1996.

5. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородых средах. Математическое моделирование. М.: Наука-Физматлит. 1995.

6. Михайлова Н.В., Тишкин В.Ф., Тюрина Н.Н., Фаворский А.А., Шашков М.Ю. Численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры. //ЖВМ и МФ, 1986. Т. 26. № 9. С. 1392-1406.

7. Четверушкин Б.М. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука. 1985.

8. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике. // ДАН СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1285-1288.

9. Арделян Н.В., Космачевский К.В., Черниговский С.В. Вопросы построения и исследования полностью консервативных разностных схем магнитной газодинамики. М.: Изд-во МГУ. 1987. 111 с.

10. Арделян Н.В., Гущин И.С. Об одном подходе к построению полностью консервативных разностных схем. //Вестник МГУ. Сер. выч. мат. и киберн. 1982, № 3. С. 3-10.

11. Арделян Н.В., Космачевский К.В. Неявный свободно-лагранжевый метод расчета двумерных магнито-газодинамических течений. / Математическое моделирование. М.: Изд-во МГУ. 1993. С. 25-44.

12. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука. 1973.

13. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978.

14. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир. 1975.

15. Арделян Н.В. Сходимость разностных схем для двумерных уравнений акустики и Максвелла. //ЖВМ и МФ.1983. Т. 23, № 5. С. 1168-1176.

16 Арделян Н.В. Об использовании итерационных методов при реализации неявных разностных схем двумерной магнитной гидродинамики.

//ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, № 6. С. 1417-1426.

17. Гасилов В.А., Куртмулаев В.Х., Головизнин В.М. и др. Численное моделирование компрессии тороидальной плазмы квазисферическим лайнером. М.: Препринт ИПМ АН СССР. 1979. № 71.

18. Соловьев А.В., Соловьева Е.В., Тишкин В.Ф. Расчет нестационарных двумерных газодинамических задач методом "Частиц Дирихле". – Препринт ИПМ АН СССР. М. 1987. № 97.

19. Анучина Н.Н., Бабенко К.И., Годунов С.К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука. 1979.

20. Advances in the Free-Lagrange Method. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1991.

21. Головизнин В.М., Коршунов В.К., Самарский А.А. Двумерные разностные схемы магнитной гидродинамики на треугольных лагранжевых сетках. //ЖВМ и МФ. 1982. Т.22, № 4. С. 926-942.

22. Бойко А.Я. О построении полностью консервативных разностных схем с помощью алгоритмов проекционного метода. //ЖВМ и МФ. 1987. Т. 22, № 4. С. 544-556.

23. Арделян Н.В., Космачевский К.В., Черниговский С.В. Некоторые особенности расчета двумерных газодинамических задач на нерегулярных треугольных сетках. / Вычислительная математика и математическое обеспечение ЭВМ. М.: Изд-во МГУ. 1985. С. 10-20.

24. Ardeljan N.V., Bisnovatyi-Kogan G.S., Kosmachevskii K.V., Moiseenko S.G. An implicit Lagrangian code for the treatment of nonstationary problems in rotating astrophysical bodies // Astronomy & Astrophysics SUppl.Ser. 1996. V. 115. P. 573-594.

25. Ardeljan N.V., Bisnovatyi-Kogan G.S., Moiseenko S.G. Nonstationary magnetorotational processes in a rotating magnetized cloud. // Astron.Astrophys. 2000. V. 355. P. 1181-1190.

26. Ardelyan N.V., Bytchkov V.L., Kosmachevskii K.V., Chuvashev S.N., Norman D. Malmuth. Modeling of Plasmas in Electron Beams and Plasma Jets for Aerodynamic Applicatins. 32nd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference and 4th Weakly Ionized Gases Workshop, 11-14 June 2001/Anaheim, CA. Published by the American Institute of Aeronautics and Asrtonautics. 15 p.

27. Арделян Н.В., Камруков А.С., Козлов Н.П., Космачевский К.В.,Попов Ю.П., Протасов Ю.С., Самарский А.А., Чувашев С.Н. Численное моделирование излучающих плазмодинамических разрядов магнитоплазменного компрессора эрозионного типа. // ДАН СССР. 1987. Т. 292, № 3. С. 590-593.

28. Арделян Н.В., Камруков А.С., Козлов Н.П., Космачевский К.В., Попов Ю.П., Протасов Ю.С., Самарский А.А., Чувашев С.Н. Магнитогазодинамические эффекты при взаимодействии с газом эрозионных плаз-

менных потоков магнитоплазменного компрессора. // ДАН СССР. 1987. Т. 292, № 1. С. 78-81.

29. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1979.

30. Арделян Н.В. Метод исследования сходимости нелинейных разностных схем.// ДУ. 1987. Т. 23, № 7. С. 1116-1127.

31. Арделян Н.В. Разрешимость и сходимость нелинейных разностных схем. // ДАН СССР. 1988. Т. 302, №6. С. 1289-1292.

32. Ardeljan N.V., Kosmachevskii K.V.. An implicit free Lagrange method with finite element operators for the solution of MHD-problems. / Finite elements in fluids, new trends and applications. IACM Special International conference. Venezia, Italy 15-21 Oct. 1995. Part 2. P. 1099-1108.

33. Арделян Н.В., Космачевский К.В., Козлов Н.П., Попов Ю.П., Протасов Ю.С., Самарский А.А., Чувашев С.Н. Численное моделирование и теоретические исследования излучающих плазмодинамических разрядов. / Радиационная плазмодинамика. М.: Энергоиздат. 1991 . Ч.1. С. 191-250.

34. Ardeljan N.V. Iterative Methods for Solving of Implicit Difference Schemes of MHD. / ZAMM - Z. Angew. MAth. Mech., Berlin. 1996. V. 76. Supplement 1, ICIAM/GAMM 95, Numerical Analysis, Scientific Computing, Computer Science. P. 123-126.

35. Арделян Н.В., Саблин М.Н. Итерационный метод для системы операторных уравнений, возникающих при решении неявных разностных схем газовой динамики. // Вестник МГУ, Сер. 15, Выч.мат. и киберн. 1993. № 4. С. 7-12.

36. Арделян Н.В., Попов Ю.П. Особенности применения численных методов в задаче о магниторотационном взрыве сверхновой. М.: Препринт ИПМ АН СССР. 1979. № 107

37. Арделян Н.В. О применении метода Ньютона при реализации разностных схем газовой динамики. / Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ. 1981. Т. 35. С. 136-144.