

В.Н. Сафонов, В.А. Трофимов

О ВОЗМОЖНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЧЕТНЫХ ГАРМОНИК ПОЛЯРИЗАЦИИ В КУБИЧНО НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ*

1. Введение

Взаимодействие фемтосекундных (малопериодных) импульсов со средой представляет собой одну из актуальных проблем лазерной физики [1-4]. Это связано, по крайней мере, с двумя обстоятельствами. Во-первых, их малая длительность позволяет изучать различные сверхбыстрые процессы. Во-вторых, как правило, они высоко интенсивны (их электрическое поле превосходит внутриатомное), и для таких импульсов электрическое поле атома является возмущением. Имеется также и другие специфические черты, присущие только этим импульсам. Так, например, отклик среды зависит от абсолютной фазы малопериодного фемтосекундного импульса. Если длительность импульса не превышает некоторого критического значения, то отклик среды происходит на собственной частоте при условии, что частота оптического излучения достаточно далека от резонансной частоты среды. Имеют место и гистерезисные зависимости наиболее яркой спектральной амплитуды отклика среды от амплитуды воздействующего импульса. Эти явления изучались, в частности, в [5-8]. В настоящей работе рассматривается воздействие фемтосекундного импульса на кубично нелинейную среду в случае, когда частота импульса близка к частоте линейного осциллятора среды. Рассмотрение проводится в рамках оптически тонкого слоя. Целесообразность такого подхода обусловлена многообразием пространственно-временных явлений, которые имеют место на практике. Поэтому на первом этапе анализа необходимо упростить рассматриваемую систему лазерное излучение – вещество.

2. Постановка задачи

Взаимодействие светового импульса с нелинейной средой в рамках приближения оптически тонкого слоя и модели Дуффинга, как известно, описывается следующим безразмерным уравнением [1]:

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \delta \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P + \gamma P^3 = E, \quad 0 \leq t \leq 2L, \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00507)

где P – безразмерная поляризация вещества, t – нормированное время, $2L_t$ – интервал времени, в течение которого анализируется отклик среды, δ характеризует затухание поляризации, ω_0 – резонансная частота линейного осциллятора, которая в выбранной нормировке равна $\omega_0 = 1$, γ характеризует ангармонизм осциллятора, а E внешнее воздействие:

$$E = E(t) \cos(\omega t). \quad (2)$$

В (2) $E(t)$ и ω – соответственно, амплитуда и частота внешнего воздействия. При этом частота внешнего воздействия измеряется в единицах собственной частоты линейной среды, а амплитуда поля в единицах внутриатомного поля. Во всех расчетах частота внешнего воздействия была равна $\omega = 1.0153$.

В качестве воздействующего импульса в физических экспериментах, как правило, используется гауссов импульс длительностью τ

$$E(t) = E_0 e^{-\left(\frac{t-L_t}{\tau}\right)^2}. \quad (3)$$

Однако, при теоретическом анализе удобно рассматривать импульс треугольной формы:

$$E(t) = E_0 \left(1 - \frac{|t - L_t|}{L_t}\right). \quad (4)$$

В (3), (4) E_0 – безразмерная амплитуда.

До воздействия оптического импульса среда считается невозмущенной. Поэтому в начальный момент времени имеют место нулевые условия для функции P и ее производной:

$$P|_{t=0} = \frac{dP}{dt}|_{t=0} = 0 \quad (5)$$

Следует подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, как уже отмечалось, из-за многообразия имеющих место процессов при распространении фемтосекундных импульсов в нелинейной среде (линейная дисперсия, дисперсия нелинейного отклика, самовоздействие и конверсия частот) уравнение (1) широко используется в литературе (см. например [2-4]), так как оно позволяет проанализировать эффекты, связанные с откликом среды. Только после этого целесообразно обратиться к моделированию процесса распространения импульса на основе уравнения Максвелла [5, 6]. Во-вторых, для получения результатов компьютерного моделирования с высокой точностью уравнение (1) решалось с помощью симметричной нелинейной разностной схемы 2-ого порядка аппроксимации, записанной в дивергентном виде [7]. При этом расчеты проводились с уменьшающимися шагами до тех пор, пока результаты численного решения не совпадали с приемлемой ($\approx 0.1\%$) точностью как во времени, так и в Фурье-пространстве.

Для анализа мгновенного спектрального отклика среды на заданной частоте ω' применяется оконное преобразование Фурье-Габора [9]:

$$P_{\omega'}(t) = P(\omega', t) = \int_{t_b}^{t_b+T} g(t) \cdot P(t) \cdot e^{-i\omega'(t-t_c)} dt, \quad g(t) = e^{-\frac{(t-t_c)^2}{\Delta^2}} \quad (6)$$

где $g(t)$ – оконная функция, t_c – центр окна, который сдвигается на заданную величину Δ , t_b – начало окна, T – его ширина. Параметр n выбирается, например, равным 20, исходя из условия резкого спада оконной функции $g(t)$ на концах отрезка интегрирования. Оптимальному значению сдвига окна соответствует, в частности, $\Delta = T/2$, которое используется в дальнейшем.

Алгоритм измерения мгновенного спектрального отклика среды состоит в следующем. На выбранном отрезке времени длины T в окне выполняется преобразование Фурье. Затем центр окна сдвигается на заданную величину Δ . После этого на новом временном отрезке снова выполняется преобразование Фурье, и дальше процедура повторяется. Таким образом, получаем “скользящее” вдоль времени окно и набор значений соответствующих измерений. Подобная процедура использовалась нами ранее в [5-8, 10] и показала высокую эффективность.

Результаты расчетов представляются в виде зависимости модуля спектральной амплитуды поляризации на выбранной частоте (6) как от времени, так и от амплитуды внешнего воздействия E_T , которая вычисляется следующим образом

$$E_T = E(t_b + \frac{T}{2}), \quad (7)$$

что соответствует ее значению в центре отдельного интервала времени. Для наглядности в дальнейшем на графиках пунктиром показывается участок зависимости, соответствующий переднему фронту импульса, а сплошной линией его заднему фронту.

3. Результаты компьютерного моделирования

3.1. Первое критическое значение амплитуды сигнала

Результаты компьютерных экспериментов, проведенные для треугольного импульса, продемонстрировали следующие закономерности (для определенности ниже параметры δ и γ выбираются равными 0.01, а $\Delta = T/2$). Как и следовало ожидать, при малых амплитудах внешнего сигнала ($E_0 < 0.025$) отклик кубично нелинейной среды близок к отклику линейной среды, и нелинейными эффектами можно пренебречь. С увеличением амплитуды воздействующего сигнала E_0 без изменения длительности импульса отклик сильно изменяется при превышении ею определенного критического значения $(E_0)_{\text{кр}}$. Для примера на рис. 1а,б изображена эволюция модуля поляризации $P_{\omega'}(t)$ на частоте воздействия ($\omega' = \omega$) для двух значений E_0 , которая построена с помощью преобразования (6).

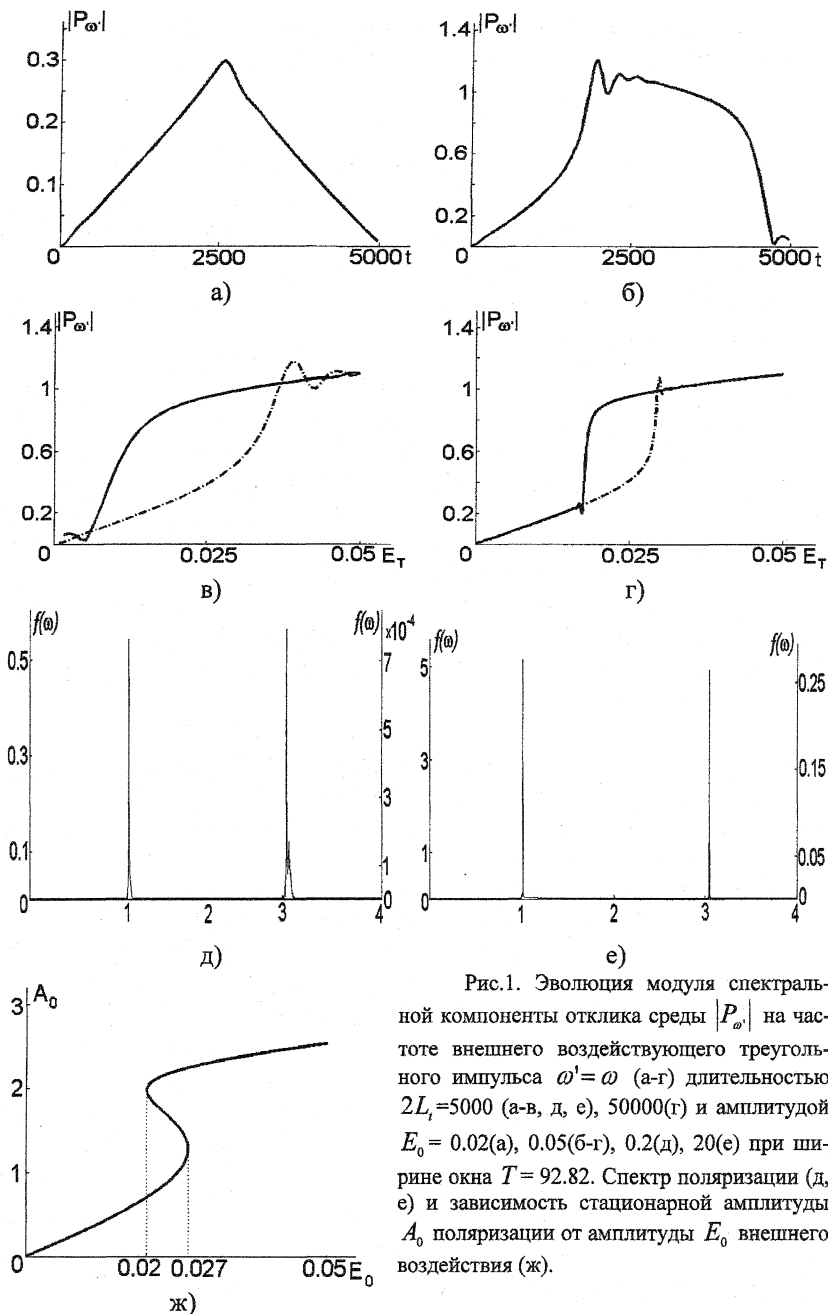


Рис.1. Эволюция модуля спектральной компоненты отклика среды $|P_\omega|$ на частоте внешнего воздействующего треугольного импульса $\omega' = \omega$ (а-г) длительностью $2L_1 = 5000$ (а-в, д, е), 50000 (г) и амплитудой $E_0 = 0.02$ (а), 0.05 (б-г), 0.2 (д), 2.0 (е) при ширине окна $T = 92.82$. Спектр поляризации (д, е) и зависимость стационарной амплитуды A_0 поляризации от амплитуды E_0 внешнего воздействия (ж).

Заметим, что такая зависимость хорошо передает форму огибающей отклика среды, так как при небольших амплитудах внешнего воздействия амплитуда других спектральных гармоник поляризации на несколько порядков меньше ее значения на частоте воздействия.

При амплитудах сигнала $E_0 > 0.03$ появляется гистерезисная зависимость амплитуды поляризации на частоте воздействия от амплитуды внешнего сигнала (рис.1в, г). При этом важно подчеркнуть, что тот же вывод следует из аналитического рассмотрения, в котором, в соответствии с методом медленно изменяющихся амплитуд [11], поляризацию представляют в виде:

$$P = A(t) \cos(t + \theta(t)), \quad (8)$$

где $A(t)$ и $\theta(t)$ – соответственно, медленно изменяющиеся амплитуда и фаза. Подставив выражение (8) в (1), получим систему дифференциальных уравнений относительно $A(t)$ и $\theta(t)$. Из нее находим стационарную амплитуду поляризации A_0 , которая связана с амплитудой E_0 внешнего воздействия соотношением:

$$\frac{E_0}{\omega^2} = A_0 \sqrt{\left(\xi - \frac{3\gamma}{4\omega^2} A_0^2\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}, \quad \xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (9)$$

где ξ – отстройка частоты воздействия от собственной частоты среды. Зависимость, рассчитанная по формуле (9) изображена на рис.1ж. Надо заметить, что нестационарность рассматриваемого процесса приводит к более широкой зависимости (рис.1в) по сравнению с зависимостью (9). При этом область бистабильности по амплитуде внешнего воздействия сужается с ростом длительности импульса (рис.1г). В остальном имеет место хорошее согласие рис.1в,г и рис.1ж.

3.2. Второе критическое значение амплитуды сигнала

При дальнейшем увеличении амплитуды E_0 внешнего воздействия в спектре отклика появляется ненулевая амплитуда третьей гармоники (рис.1д, е), что хорошо известно в литературе. Однако, дальнейший рост амплитуды падающего импульса приводит к еще одному качественному изменению отклика среды, в случае превышения E_0 критического значения $(E_0)_{\text{кр}2}$ в отклике среды: появляются гармоники других порядков. В качестве иллюстрации на рис.2а,б изображены две части спектра отклика среды при амплитуде воздействующего треугольного импульса, превышающей второе критическое значение, а на рис.2в-е представлены зависимости модуля амплитуды поляризации на 1-4 гармониках (соответственно, в-е) от амплитуды внешнего воздействия. Спектр поляризации рассчитывается по формуле дискретного преобразования Фурье следующего вида:

$$f(\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P(t_n) e^{-i\omega_k t_n}, \quad t_n = nh, \omega_k = \frac{2\pi k}{2L}, k = \overline{0, N-1}, Nh = 2L, \quad (10)$$

где h – шаг интегрирования.

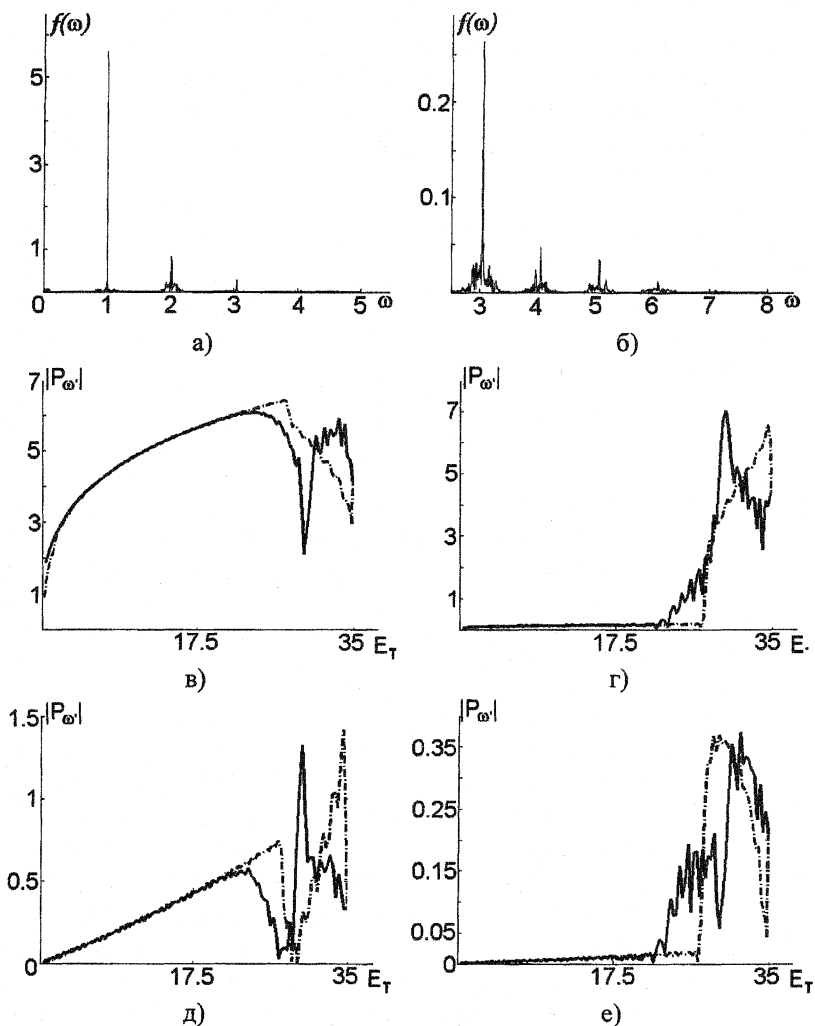


Рис.2. Спектр поляризации (а, б) и зависимость модуля спектральной компоненты отклика среды $|P_\omega|$ на частотах $\omega' = \omega$ (в), 2ω (г), 3ω (д), 4ω (е) от амплитуды треугольного импульса длительностью $2L_1 = 5000$ и амплитудой $E_0 = 35$ при ширине окна $T = 46.41$.

Из полученных результатов компьютерного моделирования следует, что при амплитуде падающего импульса большей 30 безразмерных единиц начинается генерация второй и четвертой гармоник. При этом сначала генерируется третья гармоника, и лишь затем генерируется вторая и четвертая гармоники. Важно подчеркнуть, что имеет место пороговый режим такой генерации.

Для гауссова импульса результаты расчетов представлены на рис.3, из которого видно, что для него также выполняются все отмеченные выше закономерности в случае воздействия треугольного импульса.

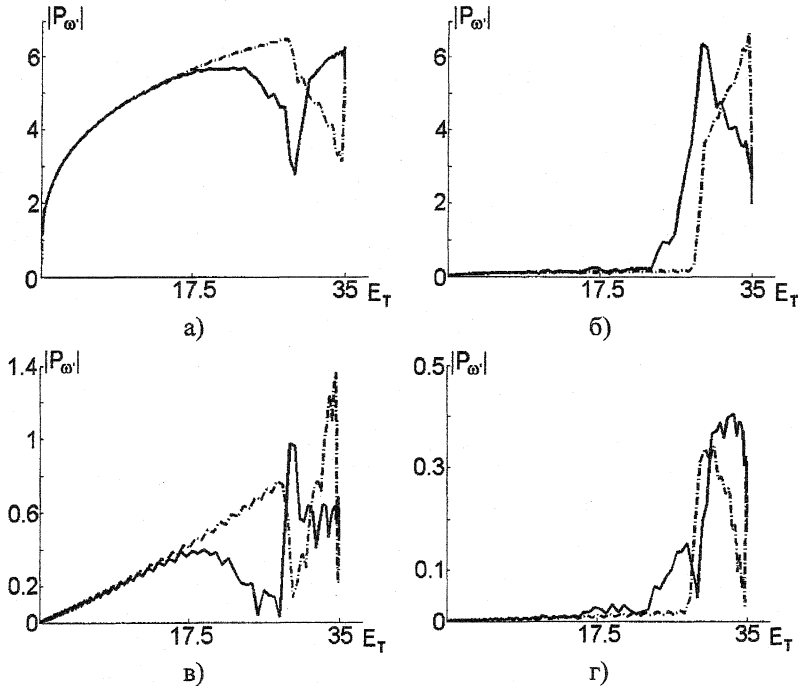


Рис.3. Зависимость модуля спектральной компоненты $|P_{\omega}|$ отклика среды на частотах $\omega' = \omega$ (а), 2ω (б), 3ω (в), 4ω (г) от амплитуды воздействующего гауссова импульса длительностью $\tau = 1000$ и амплитудой $E_0 = 35$ при ширине окна $T = 46.41$.

Для понимания механизма генерации четных гармоник необходимо отметить, что добавление в правую часть (1) слабого внешнего воздействия на второй и четвертой гармониках

$$E = E(t) \cos(\omega t) + \varepsilon_2 \cos(2\omega t) + \varepsilon_4 \cos(4\omega t), \quad (11)$$

где ε_1 и ε_2 - константы, практически не оказывает влияния на момент времени появления ненулевых амплитуд указанных гармоник в отклике среды (рис.4а-г). Это связано с тем, что в спектре импульса, например, треугольной формы уже присутствуют как вторая, так и четвертая гармоники, именно они дают старт параметрической генерации этих частот. Тем не менее, при больших значениях амплитуд ε_2 и ε_4 появляется резкий скачок амплитуды второй гармоники после прохождения светового импульса (рис.4е). Проявление этого эффекта также имеет пороговый характер.

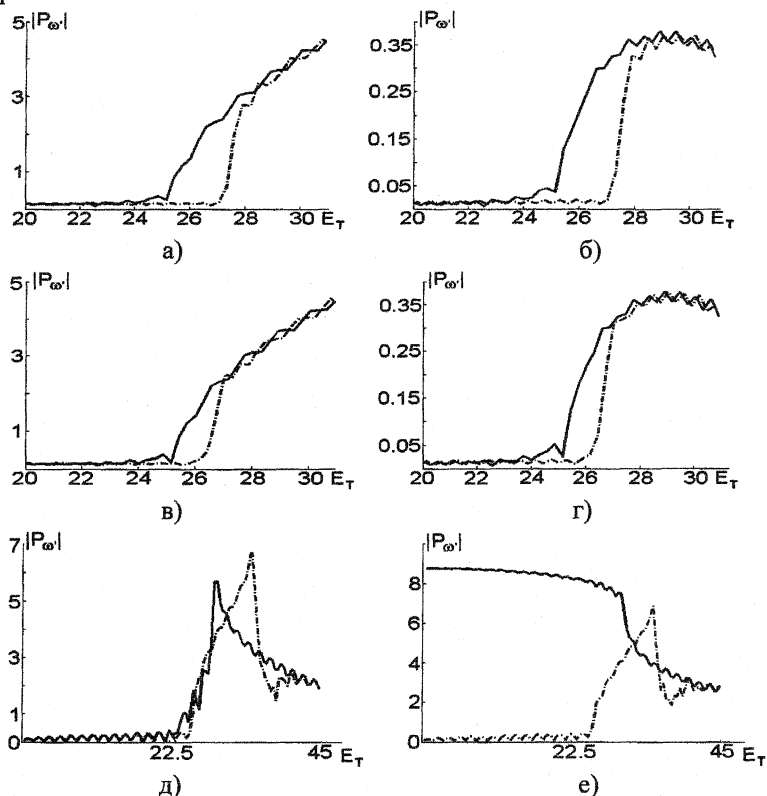


Рис.4. Зависимость модуля спектральной компоненты $|P_{\omega'}|$ отклика среды на частотах $\omega' = 2\omega$ (а, в, д, е), 4ω (б, г) от амплитуды воздействующего треугольного импульса длительностью $2L_i = 5000$ и амплитудой $E_0 = 31$ (а - г), 45 (д, е) при ширине окна $T = 46.41$ и амплитуде внешнего сигнала на второй и четвертой гармонике $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$ (а, б), 0.01 (в, г), 0.5 (д), 0.7 (е).

3.3. Исследование эволюции первых четырех гармоник на основе укороченных уравнений

Для подтверждения указанной параметрической генерации четных частот в кубично нелинейной среде рассмотрим эволюцию амплитуды поляризации на первых четырех гармониках. Для этого представим P в виде:

$$P = \sum_{k=1}^4 (P_k e^{ik\omega t} + P_k^* e^{-ik\omega t}) / 2. \quad (12)$$

После стандартной процедуры выделения медленно изменяющихся амплитуд из (1) получим следующую систему из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} (2i\omega + \delta) \frac{dP_1}{dt} + (1 + i\omega\delta - \omega^2)P_1 + \gamma F_1(P_1, P_2, P_3, P_4) &= E(t), \\ (4i\omega + \delta) \frac{dP_2}{dt} + (1 + 2i\omega\delta - (2\omega)^2)P_2 + \gamma F_2(P_1, P_2, P_3, P_4) &= 0, \\ (6i\omega + \delta) \frac{dP_3}{dt} + (1 + 3i\omega\delta - (3\omega)^2)P_3 + \gamma F_3(P_1, P_2, P_3, P_4) &= 0, \\ (8i\omega + \delta) \frac{dP_4}{dt} + (1 + 4i\omega\delta - (4\omega)^2)P_4 + \gamma F_4(P_1, P_2, P_3, P_4) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{2}P_1 \left(\frac{|P_1|^2}{2} + |P_2|^2 + |P_3|^2 + |P_4|^2 \right) + \frac{3}{4}(P_1^{*2}P_3 + P_2^*P_3^* + 2P_1^*P_2^*P_4 + 2P_2P_3P_4^*), \\ F_2 &= \frac{3}{2}P_2 \left(|P_1|^2 + \frac{|P_2|^2}{2} + |P_3|^2 + |P_4|^2 \right) + \frac{3}{4}(P_1^{*2}P_4 + P_3^*P_4^* + 2P_1P_2^*P_3 + 2P_1P_3^*P_4), \\ F_3 &= \frac{3}{2}P_3 \left(|P_1|^2 + |P_2|^2 + \frac{|P_3|^2}{2} + |P_4|^2 \right) + \frac{1}{4}(P_1^3 + 3P_1^*P_2^2 + 6P_1P_2^*P_4 + 6P_2P_3^*P_4), \\ F_4 &= \frac{3}{2}P_4 \left(|P_1|^2 + |P_2|^2 + |P_3|^2 + \frac{|P_4|^2}{2} \right) + \frac{3}{4}(P_1^2P_2 + P_2^*P_3^2 + 2P_1^*P_2P_3) \end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$P_j(0) = P_j^0 \quad (14)$$

Начальные значений для P_2 и P_4 для определенности берутся равными 0.01.

Для решения системы (13) строится симметричная консервативная схема. Для этого записываются инварианты I_1 и I_3 . Так, в случае прозрачной среды ($\delta = 0$) и при отсутствии внешнего воздействия, домножая k -ое уравнение на kP_k^* , а сопряженное к нему – на kP_k , и затем складывая результат, получим, что величина

$$I_1 = |P_1|^2 + 4|P_2|^2 + 9|P_3|^2 + 16|P_4|^2 \equiv const \quad (15)$$

не изменяется во времени. Она представляет собой закон сохранения энергии.

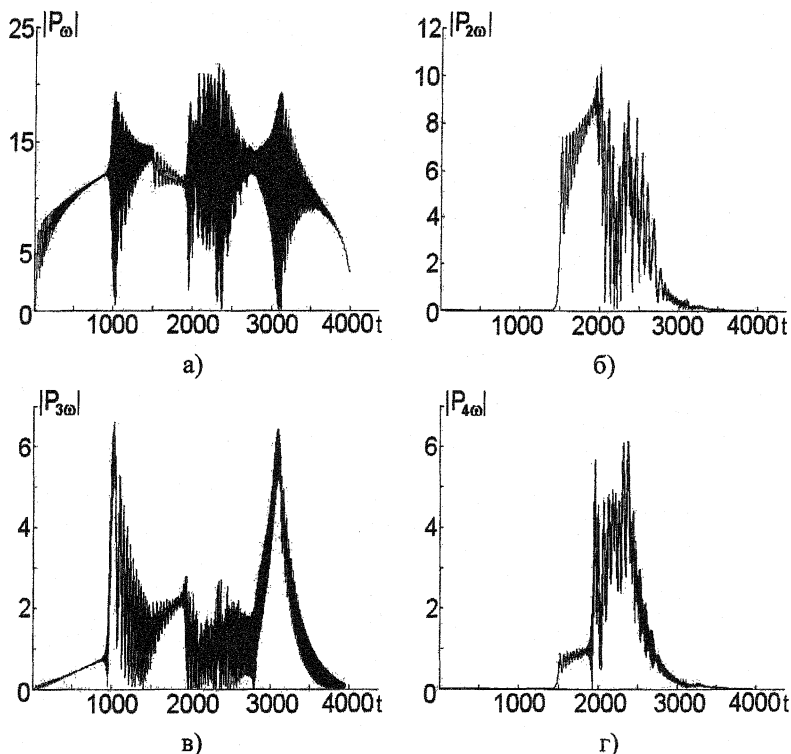


Рис.5. Зависимости амплитуд поляризации P_k 1-ой (а), 2-ой (б), 3-ей (в) и 4-ой (г) гармоник от времени, полученные из решения уравнений (13) в случае воздействия треугольного импульса длительностью $2L_i=4000$ и амплитудой $E_0 = 31$ с начальными условиями $P_2(0)=P_4(0)=0.01$, $P_1(0)=P_3(0)=0$.

При выводе другого инварианта поступаем аналогично. Домножая k -ое уравнение на dP_k^*/dt и вычитая из него сопряженное уравнение, домноженное на dP_k/dt , а затем складывая результат, запишем следующую величину, не изменяющуюся во времени:

$$I_3 = \sum_{k=1}^4 (1 - (k\omega)^2) P_k^2 + \frac{\gamma}{2} \operatorname{Re} (P_1^3 P_3 + 6P_1^2 P_2 P_3 P_4 + 3P_1^2 P_2^2 P_3 + 3P_1^2 P_2 P_4 + 3P_2^2 P_3 P_4) + \gamma \left[\frac{3}{8} \sum_{k=1}^4 P_k^4 + \frac{3}{2} (|P_1|^2 |P_2|^2 + |P_1|^2 |P_3|^2 + |P_1|^2 |P_4|^2 + |P_2|^2 |P_3|^2 + |P_2|^2 |P_4|^2 + |P_3|^2 |P_4|^2) \right] \equiv \text{const} \quad (16)$$

Результаты проведенных компьютерных экспериментов представлены на рис.5 в виде зависимостей модуля амплитуд $|P_k|$ от времени при амплитуде внешнего воздействия, превышающей критическое значение $(E_0)_{\text{кр}}$. Заметим, что при меньших значениях амплитуды внешнего воздействия вторая и четвертая гармоники быстро затухают от своих начальных значений до нуля. Как видно, рис.5 подтверждает существование параметрической генерации четных частот при превышении амплитудой внешнего воздействия определенного значения. Его сравнение с рис.2,3 показывает, что критическое значение внешнего воздействия, при котором начинается генерация четных гармоник, на них приблизительно одинаковое и равно $E_0 \approx 30$. При этом в системе (13) генерация второй и четвертой гармоник наступает раньше по сравнению с аналогичным временем, рассчитанным на основе исходного уравнения.

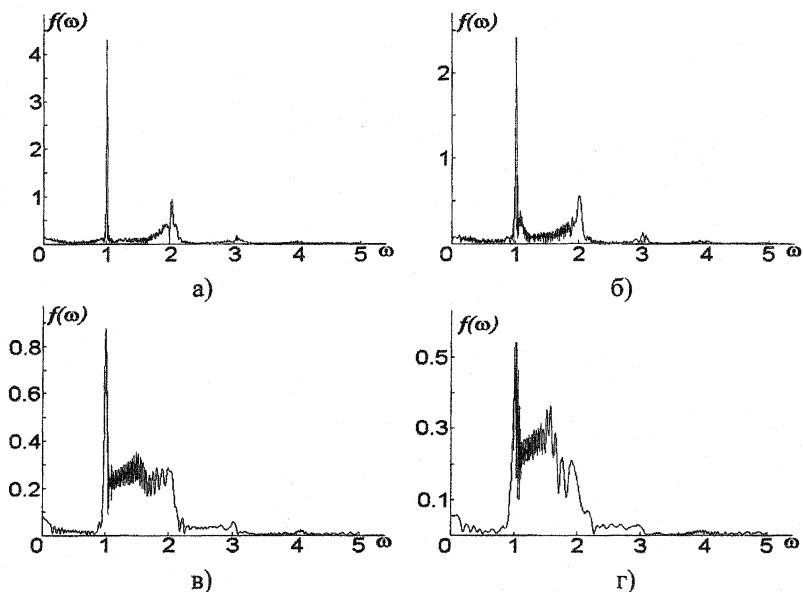


Рис.6. Спектр отклика среды, рассчитанный на временном интервале 1000 безразмерных единиц, при воздействии треугольного импульса длительностью $2L_i = 1000$ (а), 500(б), 200(в), 100(г) и амплитудой $E_0 = 35$.

3.4. Влияние длительности импульса

Еще одна важная закономерность проявляется при уменьшении длительности воздействующего импульса. Как следует из рис.6, на котором представлена часть спектра отклика среды при воздействии треугольного импульса, с уменьшением длительности внешнего сигнала в спектре поляризации появляется большое число гармоник, не кратных частоте основной гармоники. При этом они распределены между основной частотой и частотой второй гармоники. Существенно, что это имеет место также и для меньших амплитуд воздействующего импульса по сравнению с ранее рассмотренными. Для примера на рис.7 представлены спектры отклика среды для тех же временных отрезков, что и на рис.6, но с амплитудой внешнего сигнала приблизительно в 3 раза меньшей второго критического значения.

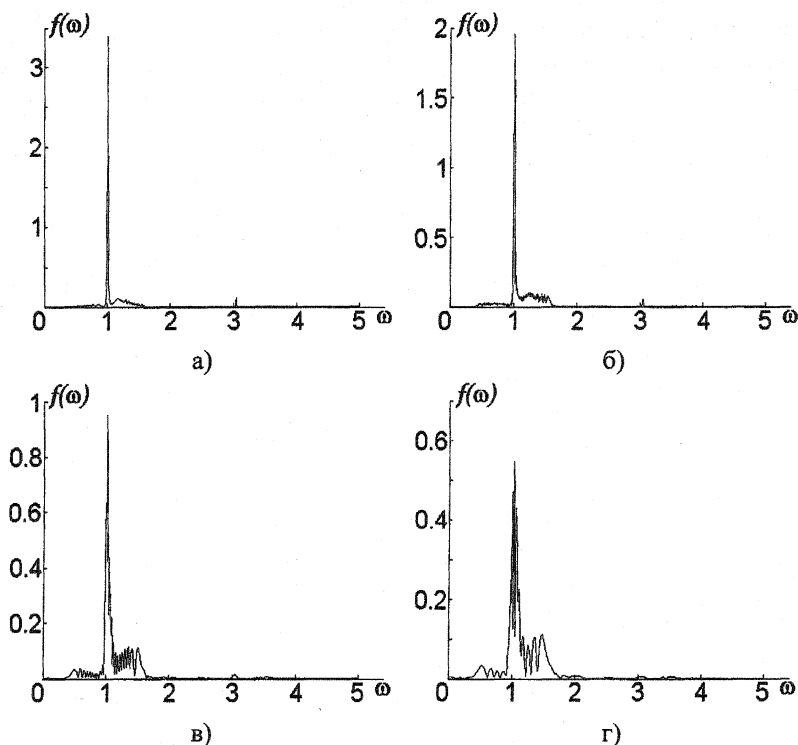


Рис.7. Спектр отклика среды, рассчитанный на временном интервале 1000 безразмерных единиц, при воздействии треугольного импульса длительностью $2L_t=1000$ (а), 500(б), 200(в), 100(г) и амплитудой $E_0=10$.

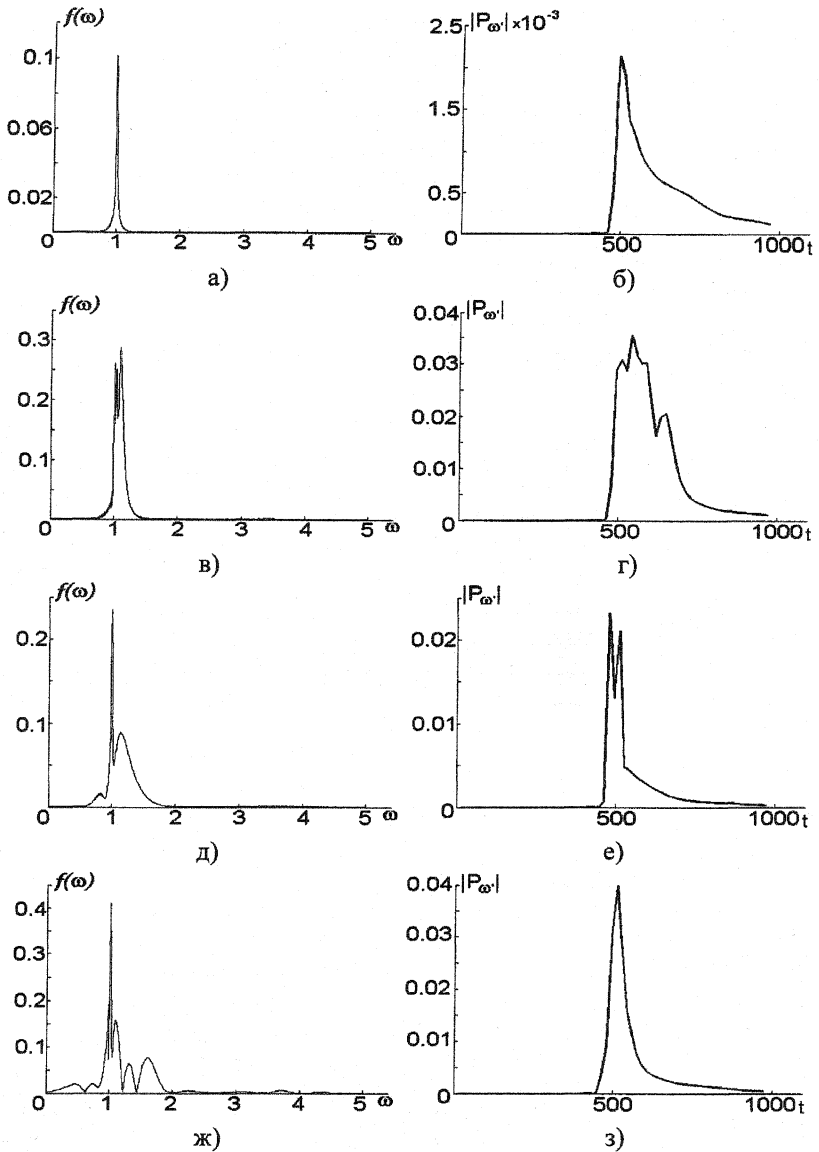


Рис.8. Спектр отклика, рассчитанный на временном интервале 1000 безразмерных единиц, среды (а, в, д, ж) и эволюция третьей гармоники во времени (б, г, е, з) при воздействии гауссова импульса длительностью $\tau = 13$ и амплитудой $E_0 = 0.1$ (а,б), 1(в,г), 3(д,е), 15(ж,з), ширина окна $T=30.94$.

В случае воздействия гауссова импульса эти закономерности также сохраняются. Заметим, что с уменьшением амплитуды сигнала амплитуды генерируемых гармоник также уменьшаются. Однако, при этом амплитуда и длительность, например, третьей гармоники нелинейно зависит от длительности воздействующего импульса (рис.8). Этот вывод не соответствует эмпирическим рассуждениям, сделанным в [12] без учета процессов параметрической генерации.

3.5. Влияние абсолютной фазы входного импульса на генерацию третьей гармоники

На спектральный состав отклика при воздействии короткого импульса влияет и его фаза. В этом случае на вход нелинейной среды подается излучение вида

$$E = E(t) \cos(\omega(t - L_c) + \varphi). \quad (17)$$

В качестве иллюстрации полученных результатов на рис.9–12 представлены форма воздействующего импульса, спектр отклика среды и эволюция третьей гармоники во времени для разных положений центра импульса относительно центра косинуса (разных значений абсолютной фазы). Из них следует, что при определенных длительностях воздействующего импульса спектр претерпевает существенные изменения. При этом отдельные гармоники ведут себя по-разному при различных абсолютных фазах воздействующего импульса. Данные закономерности сохраняются для большого диапазона амплитуд внешнего сигнала.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе показано, что наряду с известным критическим значением амплитуды воздействующего поля, после превышения которого проявляются нелинейные эффекты, существует еще одно критическое значение амплитуды сигнала, при котором в кубично нелинейной среде имеет место генерация четных по отношению к частоте воздействующего импульса гармоник поляризации среды. В основе этого явления лежит параметрическая генерация оптических частот, в результате чего эффект носит пороговый характер. Его проявление существенно зависит от длительности импульса и его абсолютной фазы.

В отличие от [12], где в приближении заданного поля сделан вывод об уменьшении длительности генерируемых гармоник с уменьшением длительности воздействующего импульса, в настоящей работе показано, что эта зависимость имеет более сложный (нелинейный) характер, а вывод в [12] справедлив лишь на начальной стадии при уменьшении длительности воздействующего импульса.

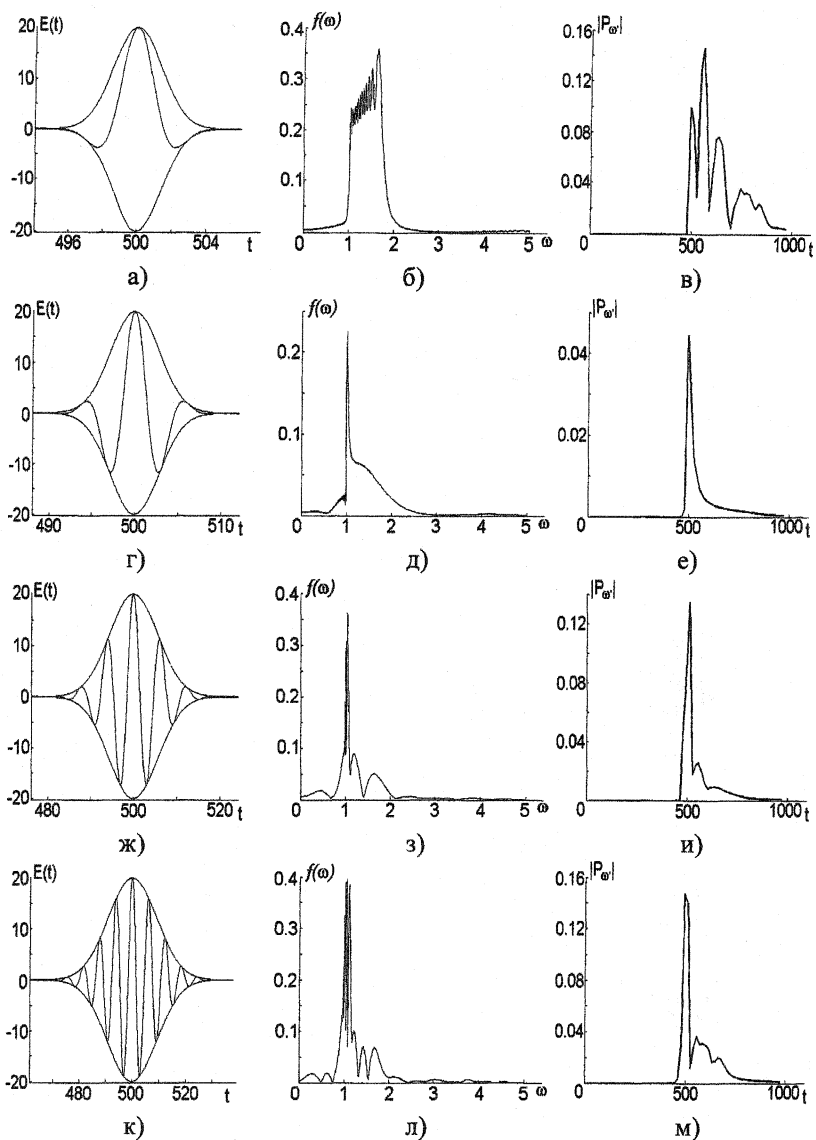


Рис.9. Форма воздействующего импульса с абсолютной фазой $\varphi = 0$ длительностью $\tau = 2$ (а-в), 4(г-е), 8(ж-и), 13(к-м) и амплитудой $E_0 = 20$, спектр отклика среды и эволюция третьей гармоники во времени при ширине окна $T = 30.94$.

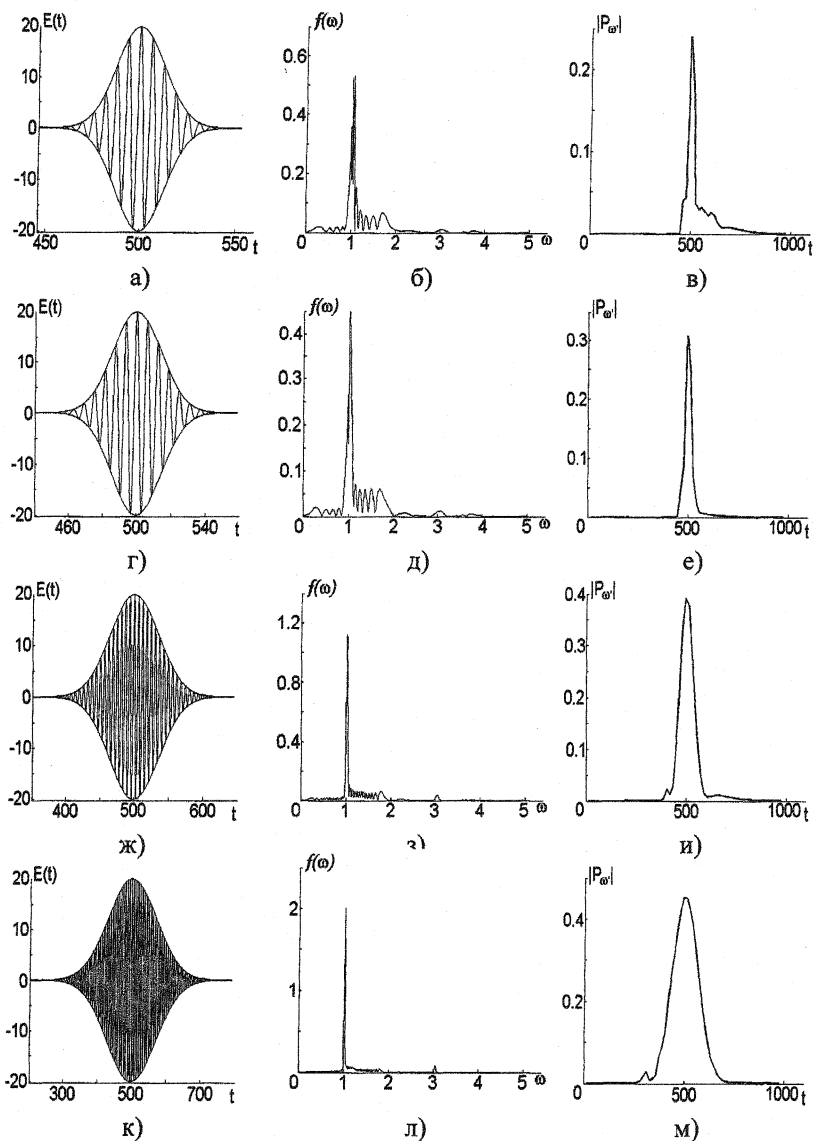


Рис.10. Форма воздействующего импульса с абсолютной фазой $\varphi=0$ длительностью $\tau=18$ (а-в), 20(г-е), 50(ж-и), 100(к-м) и амплитудой $E_0=20$, спектр отклика среды и эволюция третьей гармоники во времени при ширине окна $T=30.94$.

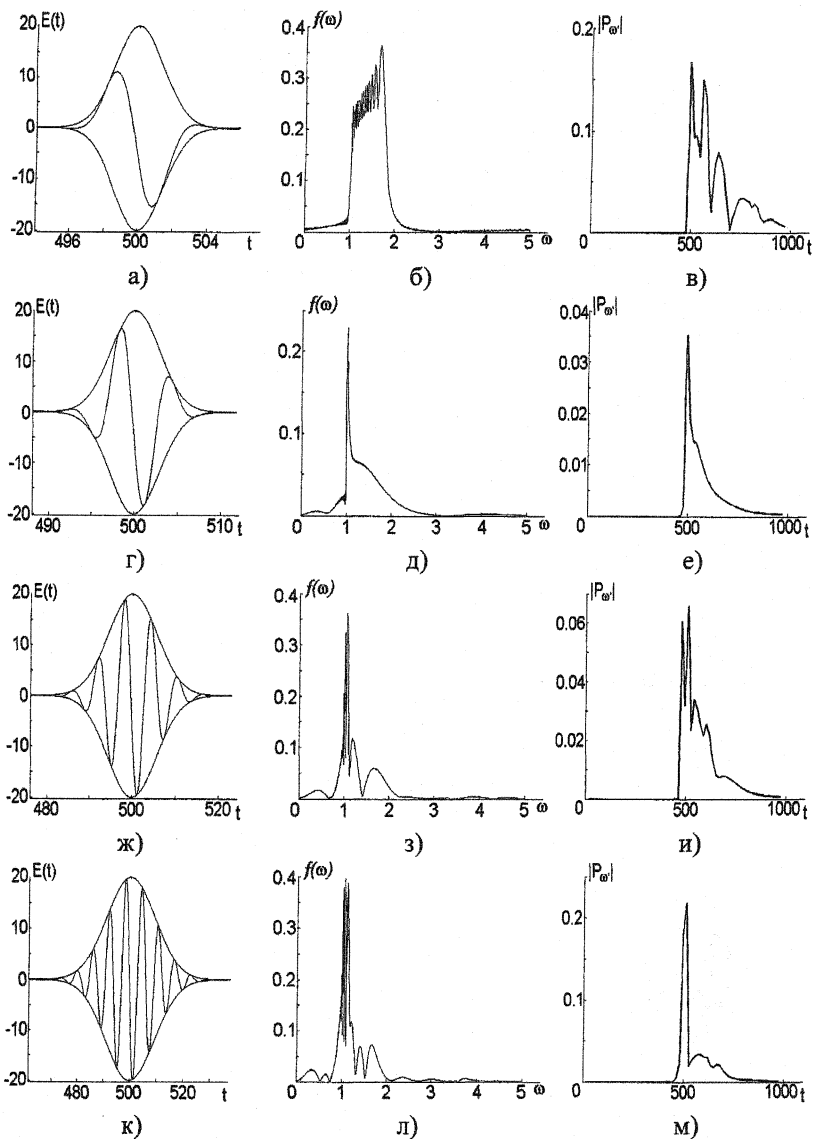


Рис.11. Форма воздействующего импульса с абсолютной фазой $\varphi = -1.2458$ длительностью $\tau = 2$ (а-в), 4(г-е), 8(ж-и), 13(к-м) и амплитудой $E_0 = 20$, спектр отклика среды и эволюция третьей гармоники во времени при ширине окна $T = 30.94$.

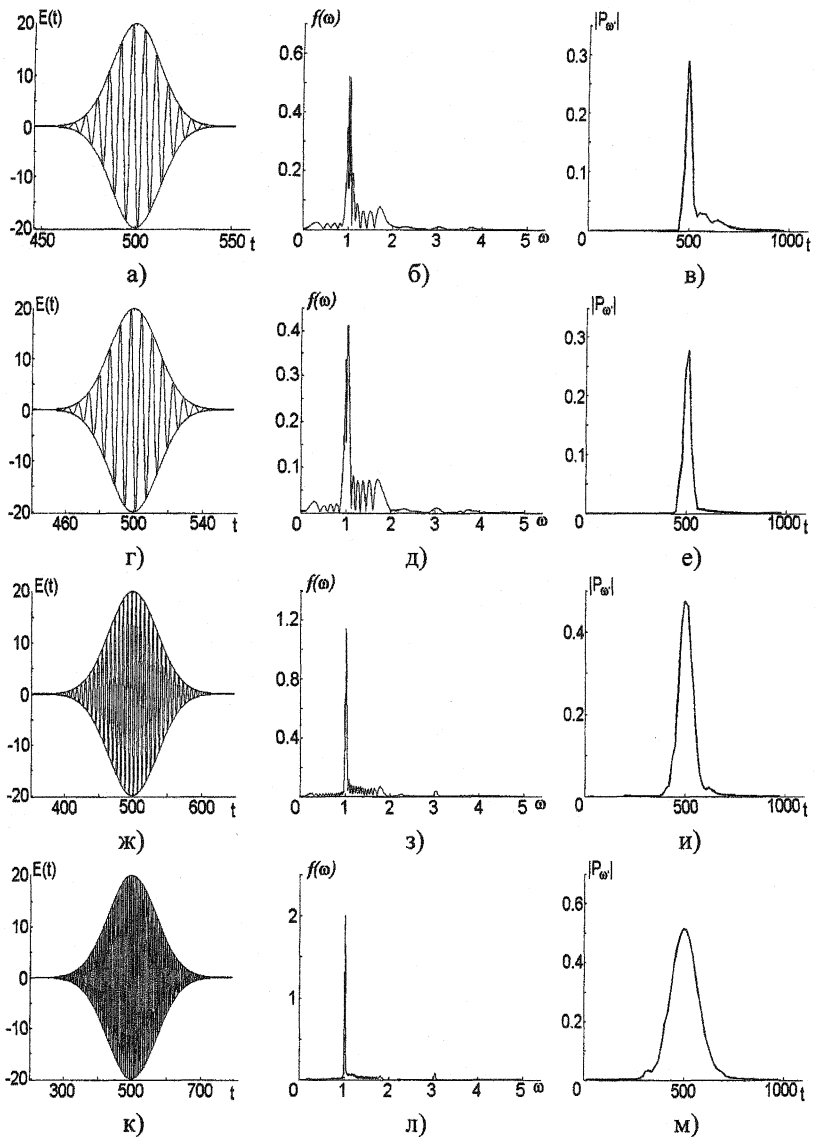


Рис.12. Форма воздействующего импульса с абсолютной фазой $\varphi = -1.2458$ длительностью $\tau = 18$ (а-в), 20(г-е), 50(ж-и), 100(к-м) и амплитудой $E_0 = 20$, спектр отклика среды и эволюция третьей гармоники во времени при ширине окна $T = 30.94$.

Литература

1. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики. / Пер. с англ. М: МИР. 1989. 558 С.
2. Маймистов А.И. Распространение поляризованных световых импульсов в нелинейной среде. // Оптика и спектроскопия. 1995. Т.78. N3. С.483-487.
3. Гладков С.М., Коротеев Н.И. Квазирезонансные нелинейные оптические процессы с участием возбужденных и ионизированных атомов. // УФН. 1990. Т.160. N7. С.105-145.
4. Семенов В.Е., Розанов Н.Н., Высотина Н.В. Сверхузкие пучки электромагнитного излучения в средах с керровской нелинейностью. // ЖЭТФ. 1999. Т.116. ВЫП. 2(8). С.458-468.
5. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. Гистерезисная зависимость некоторых спектральных компонент фемтосекундного импульса при его прохождении нелинейного слоя. // ЖТФ. 2003. Т.73. N3. С.69-74.
6. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. формирование высокочастотного субимпульса при распространении фемтосекундного импульса в среде с насыщающимся потенциалом. // Оптика и спектроскопия. 2003. Т.95. N2. С.347-359.
7. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. О применимости модели Дуффинга для описания распространения фемтосекундных световых импульсов в нелинейных средах. // Труды УНЦ волоконно-оптических материалов и устройств. М.: Издательство учебно-научного центра "Волоконно-оптические технологии, материалы и устройства". 2000. N3. С. 83-92.
8. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. Гистерезисная зависимость некоторых спектральных компонент фемтосекундного импульса при его распространении в нелинейной среде. // ЖТФ. 2004. Т.74. N2. С. 77-82.
9. Чуи К. Введение в вэйвлеты. / Пер. с англ. Жилейкина Я.М. М.: Мир. 2001. 406 С.
10. Trofimov V.A., Safonov V.N. On accuracy of measure of instantaneous spectral intensities of femtosecond pulse. // Program on the 28th European Conference on LASER Interaction with Matter, Roma, Italy. September 6-10. 2004. P 19.
11. Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 325 С.
12. Ванин Е.В., Даунер М.С., Ким А.В., Сергеев А.М. О возбуждении сверхкоротких всплесков гармоник излучения при ионизации газа мощным оптическим импульсом. // ПИСЬМА В ЖЭТФ. 1993. Т.58. N.12. С. 964-969.