К.Д. Шалбузов

О СРАВНЕНИИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ОТСЕЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Введение

Метод отсечений для задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) состоит в добавлении ограничений, не изменяющих множество допустимых целых точек, и последующем решении соответствующих непрерывных задач. В [1] Гомори сформулировал циклический алгоритм (ЦА), который за конечное число шагов находит оптимальное решение задачи ЦЛП. Позднее в [2] им же предложен полностью целочисленный алгоритм (ПЦА), в котором симплекс-таблица на каждом шаге остается целочисленной. Мартин в [3] определил алгоритм (АМ), в котором построение отсечения использует ускоренный алгоритм Евклида.

В данной работе для АМ предлагается поиск производящей строки, который минимизирует число преобразований в ускоренном алгоритме Евклида. В перечисленных алгоритмах возникают ситуации, когда добавленное отсечение не содержит неотрицательных целых точек. В [4] была предложена модификация ЦА (МЦА), в которой строятся отсечения максимально приближенные к множеству допустимых целых точек. При этом возникают вспомогательные задачи ЦЛП с одним ограничением [5], для которых в [4] разработан метод оптимизации, основанный на формуле общего решения линейного диофантова уравнения [6].

Целью данной статьи является численное сравнение указанных алгоритмов. Алгоритмы были программно реализованы в системе MAPLE, а эксперименты осуществлялись на компьютере с процессором Intel Core i3 540 с тактовой частотой 3.07 ГГц и объемом оперативной памяти 4 ГБ. Для сравнения алгоритмов генерировалась 1000 задач, в которых элементы матрицы $a_{ij},\ i=0,1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\ \left(a_{i0},\ i=1,\dots,m\right)$ выбирались как случайные целые числа, равномерно распределенные на отрезке $[0,100]$ $([100,200])$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу ЦЛП (см. [7, гл. 13])

$$x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j \to \max,$$

$$x_{n+i} = a_{i0} - a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n,\ \ i=1,\dots,m,\ \ x_j \in \mathbb{Z}_+,\ \ j=1,\dots,n+m, \qquad (1)$$

где a_{ij} – целые числа.

Множество допустимых решений $\overline{x}=(x_1,...,x_{n+m})$ задачи (1) обозначим через X_0. Запишем соответствующую «непрерывную» задачу (отбросим условие целочисленности переменных $x_j,\ j=1,...,n+m$)

$$x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j \to \max,$$

$$x_{n+i} = a_{i0} - a_{i1}x_1 - ... - a_{in}x_n,\ i=1,...,m,\ x_j \ge 0,\ j=1,...,n+m. \qquad (2)$$

Предположим, что множество X допустимых решений задачи (2) не пусто и ограничено, а целевая функция x_0 на X ограничена сверху. Обозначим $a_0=(a_{01,}...,a_{0n})$, $A^0=(a_{10},...,a_{m0})^T$, $\theta=(0,...,0)^T$, $A_1=(a_{ij})_{m\times n}$, I_n – единичная $n\times n$-матрица. В качестве симплекс-таблицы задачи (1) будем рассматривать расширенную столбцовую таблицу [7, гл. 13]

$$A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_0 \\ \theta & -I_n \\ A^0 & A_1 \end{pmatrix}_{(n+m+1)\times(n+1)},$$

соответствующую системе уравнений задачи (1). Строки матрицы $(\theta \quad -I_n)$ соответствуют тривиальным уравнениям $x_j=-(-x_j),\ j=1,...,n,$ и начальным небазисным переменным. В столбцовой таблице элементарные преобразования осуществляются над столбцами, что соответствует эквивалентному преобразованию задачи, двойственной к (2). Симплекс-таблица A называется прямо (двойственно) допустимой, если столбец A^0 (строка a_0) содержит неотрицательные компоненты. Если симплекс-таблица A одновременно прямо и двойственно допустима, то ее нулевой столбец содержит компоненты оптимального решения задачи (2).

Покажем, как строятся отсечения в ЦА [8, гл. 5] и МЦА. После решения задачи (2) симплекс-методом, используя заключительную симплекс-таблицу, выразим все переменные через небазисные переменные $x_{N_j},\ 1\le j\le n$,

$$x_i = a'_{i0} + \sum_{1\le j\le n} a'_{ij}(-x_{N_j}),\ i=0,1,...,n+m.$$

Выберем в симплекс-таблице производящую строку с номером $k=\min\{0\le i\le n+m \mid a'_{i0}\notin\mathbb{Z}\}$ и построим соответствующее отсечение Гомори[1]

$$s = -\{a'_{k0}\} + \sum_{1\le j\le n}(-\{a'_{kj}\})(-x_{N_j}),\ s\ge 0, \qquad (3)$$

[1] Далее $\lfloor a \rfloor$ и $\{a\}$ обозначают целую и дробную часть действительного числа a.

где s – новая переменная, относящаяся к отсечению. Заметим, что для любого решения $\bar{x} \in X_0$ выполнено $s = -\{a'_{k0}\} + \sum_{1 \le j \le n} \{a'_{kj}\} x_{N_j} \in \mathbb{Z}$. В МЦА [4] вместо отсечения (3) на каждой итерации ЦА добавляется отсечение

$$s = -\{a'_{k0}\} - \mu^* + \sum_{1 \le j \le n} (-\{a'_{kj}\})(-x_{N_j}), \ s \in \mathbb{Z}_+,$$

где μ^* является минимумом в следующей вспомогательной задаче:

$$\mu \to \min,$$

$$\mu = \sum_{1 \le j \le n} \{a'_{kj}\} x_{N_j} - \{a'_{k0}\}, \ \ \mu, x_{N_j} \in \mathbb{Z}_+, 1 \le j \le n.$$

Алгоритм решения этой задачи, использующий формулу общего решения линейного диофантова уравнения, см. в [4].

С ПЦА можно ознакомиться в [7, гл.14]. Перейдем к АМ [3]. Сначала напомним алгоритм, а затем укажем для него модификацию поиска производящей строки.

Шаг 1. Решим задачу (2). Если оптимальное решение задачи (2) является допустимым в задаче (1), то оно оптимально и в задаче (1). В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. В симплекс-таблице выберем строку с номером $k = \min\{0 \le i \le n + m \mid a'_{i0} \notin \mathbb{Z}\}$ и построим отсечение (3). Добавим соответствующую отсечению строку в симплекс-таблицу. Эта строка становится ведущей. По двойственному симплекс-алгоритму определим ведущий столбец p, но замещение не производим. Добавленное отсечение удаляем. Далее на этом шаге после нескольких преобразований k-й строки строится отсечение Мартина. Опишем их.

Пусть D – произведение всех ведущих элементов, которые встречались во всех предыдущих операциях замещения. Определим первое преобразование k-й строки

$$b_{kj}^{(1)} = \lfloor a'_{kj} \rfloor, \ c_{kj}^{(1)} = \{a'_{kj}\} \mid D \mid, \ a'^{(1)}_{kj} = a'_{kj}, \ j = \{0,1,...,n\} \setminus \{p\},$$

$$a'^{(1)}_{kp} = a'_{kp} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\mid D \mid}, \ c_{kp}^{(1)} = \{a'_{kp}\} \mid D \mid, \ D^{(1)} = \mid D \mid,$$

Рассмотрим l-е преобразование $(l \ge 2)$ k-й строки

$$\begin{gathered} g^{(l-1)} = (c_{kp}^{(l-1)} - \alpha) / (D^{(l-1)} c_{kp}^{(l-1)}), \ d_{kj}^{(l)} = c_{kj}^{(l-1)} g^{(l-1)}, \\ b_{kj}^{(l)} = b_{kj}^{(l-1)} + \lfloor d_{kj}^{(l)} \rfloor, c_{kj}^{(l)} g^{(l-1)} = \{d_{kj}^{(l)}\}, a'^{(l)}_{kj} = b_{kj}^{(l)} + c_{kj}^{(l)} g^{(l-1)}, \\ a'^{(l)}_{kp} = \frac{\alpha}{c_{kp}^{(l-1)}}, D^{(l)} = c_{kp}^{(l-1)}, c_{kp}^{(l)} = \{a'^{(l)}_{kp}\} c_{kp}^{(l-1)}, \ j = \{0,1,...,n\} \setminus \{p\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Повторим преобразование (4) до тех пор, пока элемент $a'^{(l)}_{kp}$ не станет целым. Положим $h_{kp} = \min\{l \mid a'^{(l)}_{kp} \in \mathbb{Z}\}$. Построим отсечение Мартина $s = r_0 + \sum_{1 \le j \le n} r_j(-x_{N_j})$, задаваемое строкой r с элементами

$$r_j = -\frac{a'_{kj} - a'^{(h)}_{kj}}{a'^{(h)}_{kp}},\ j \in \{0,1,...,n\} \setminus \{p\},\ r_p = -\frac{a'_{kp}}{a'^{(h)}_{kp}}.$$

Полученную строку r добавим в симплекс-таблицу. Проведем операцию замещения с ведущим элементом r_p. Повторяем шаг 2 до получения полностью целочисленного нулевого столбца симплекс-таблицы. Переходим к шагу 1.

Замечание. В ЦА и ПЦА после добавления отсечения и замещения ведущего элемента данное отсечение из симплекс-таблицы удаляется. С целью предотвращения зацикливания, в АМ необходимо оставлять каждое новое добавленное отсечение. Соответственно, в отличие от ЦА и ПЦА итоговая симплекс-таблица в АМ может содержать много строк.

Если $\alpha / |D|$ – достаточно малое отрицательное число, то преобразования (4) могут занять значительное время. Для устранения этого недостатка модифицируем поиск производящей строки на шаге 2. Для каждой s-й строки такой, что $a'_{s0} \notin \mathbb{Z},\ 0 \le s \le m+n,$ добавим отсечение Гомори с целью выбора ведущего элемента a'_{sp}. Здесь выбор p зависит от s. После определения ведущего элемента $a'_{sp(s)}$ операция замещения не производится, а s-я строка из симплекс-таблицы удаляется. Пусть $a'_{sp(s)} = \alpha / |D|$. Предположим, что $\alpha < 0$. Обозначим $\lambda_s = \lfloor -|D| / \alpha \rfloor$ и $c^{(0)}_{sp(s)} = |D| + \alpha\lambda_s$. Рассмотрим l-е преобразование $(l \ge 1)$ s-й строки

$$a'^{(l)}_{sp(s)} = \frac{\alpha}{c^{(l-1)}_{sp(s)}},\ c^{(l)}_{sp(s)} = \left\{a'^{(l)}_{sp(s)}\right\} c^{(l-1)}_{sp(s)}. \qquad (5)$$

Заметим, что преобразование (5) является частью преобразования (4) и относится только к ведущему элементу $a'_{sp(s)}$. Повторим (5) до тех пор, пока элемент $a'^{(l)}_{sp(s)}$ не станет целым. Обозначим через $v_{sp(s)}$ число преобразований (5), т.е. $v_{sp(s)} = \min\{l \mid a'^{(l)}_{sp(s)} \in \mathbb{Z}\}$. Тогда нетрудно показать, что $h_{sp(s)} = \lambda_s + v_{sp(s)}$ для строки с отрицательным ведущим элементом $a'_{sp(s)}$. Пусть теперь $a'_{sp(s)} > 0$. В этом случае положим $c^{(0)}_{sp(s)} = |D|$ и повторим преобразования (5) пока элемент $a'^{(l)}_{sp(s)}$ не станет целым. Получим

$h_{sp(s)} = v_{sp(s)}$. В результате в качестве производящей строки на шаге 2 АМ выберем строку с номером

$$k \in \operatorname*{Arg\,min}_{0 \le s \le n+m} \{h_{sp(s)} \mid a'_{s0} \notin \mathbb{Z}\}.$$

Пример. Рассмотрим задачу ЦЛП

$$\begin{gathered} x_0 = -79(-x_1) - 14(-x_2) \to \max \\ x_3 = 39 + 2(-x_1) + 7(-x_2), \\ x_4 = 35 + 14(-x_1) + 5(-x_2), \;\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{6}$$

Решим ее МЦА и АМ. Начальная симплекс-таблица прямо допустима. По прямому симплекс-методу определим ведущий элемент $a_{41} = 14$ и сделаем операцию замещения. В результате получим симплекс-таблицу

$$A' = \begin{pmatrix} 395/2 & 79/14 & 199/14 \\ 5/2 & 1/14 & 5/14 \\ 0 & 0 & -1 \\ 34 & -1/7 & 44/7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

которая прямо и двойственно допустима. Поэтому вектор $\overline{x}^* = (5/2, 0, 34, 0)$ – оптимальное решение непрерывной задачи и $N = \{4, 2\}$. Отсюда $|D| = a_{41} = 14$. На первом шаге МЦА (как и в ЦА) нулевая строка таблицы является производящей. Решив вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} \mu \to \min, \\ \mu = 9/14 x_4 + 3/14 x_2 - 1/2, \quad \mu, x_4, x_2 \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered}$$

получим, что минимум $\mu^* = 1$ достигается на решении $(x_4, x_2) = (2,1)$. Таким образом, добавляется отсечение $s = -3/2 - 9/14(-x_4) - 3/14(-x_2)$. Элемент симплекс-таблицы $a'_{51} = -9/14$ по двойственному симплекс-алгоритму становится ведущим и после операции замещения добавленная строка равна $(0, -1, 0)$. Эту строку можно из таблицы удалить. После формирования трех аналогичных отсечений получим оптимальное решение $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (2, 1, 28, 2)$ задачи (6).

После шага 1 АМ также получим симплекс-таблицу (7). Производящая строка на первой итерации шага 2 выбирается с использованием предложенного модифицированного поиска. Так как элемент $a'_{00} = 395/2$ нецелый, подсчитаем $h_{0p(0)}$. Добавляем отсечение Гомори (3) $s = -1/2 - 9/14(-x_4) - 3/14(-x_2)$ в симплекс-таблицу. Не произведя операцию замещения, определяем, что ведущим является первый столбец, т.е. $p(0) = 1$. Добавленное отсечение удаляем. Берем элемент $a'_{01} = \alpha / |D| = 79/14$. Отсюда $\alpha = 79$. Поскольку $\alpha > 0$, выбираем $c_{01}^{(0)} = |D| = 14$. Преобразования (5) представлены в таблице 1.

Таблица 1.

l	1	2	3	4	5
$a_{01}'^{(l)} = \alpha / c_{01}^{(l-1)}$	$79/14$	$79/9$	$79/7$	$79/2$	$79/1$
$c_{01}^{(l)} = \{a_{01}'^{(l)}\} c_{01}^{(l-1)}$	9	7	2	1	0

Получаем $h_{01} = v_{01} = 5$. Аналогично находим $h_{1p(1)} = h_{12} = 2$. Здесь номер производящей строки $k = 1$, поскольку $h_{01} > h_{12}$. Произведем преобразования (4). Ведущим является элемент $a_{12}' = 5/14$. Сначала определим $a_{12}' = a_{12}'^{(1)} = \alpha / |D| = 5/14$. Отсюда $\alpha = 5$. Получаем $c_{12}^{(1)} = \{a_{12}'\} |D| = 5$, $D^{(1)} = |D| = 14$. Определим $b_{10}^{(1)} = \lfloor a_{10}' \rfloor = 2$, $c_{10}^{(1)} = \{a_{10}'\} |D| = 7$, $a_{10}'^{(1)} = a_{10} = 5/2$, $b_{11}^{(1)} = \lfloor a_{11}' \rfloor = 0$, $c_{11}^{(1)} = \{a_{11}'\} |D| = 1$, $a_{11}'^{(1)} = a_{11} = 1/14$. Преобразование (4) состоит из одного шага и выглядит следующим образом:

$$g^{(1)} = (c_{12}^{(1)} - \alpha) / (D^{(1)} c_{12}^{(1)}) = 0,\ d_{10}^{(2)} = c_{10}^{(2)} g^{(1)} = 0,\ b_{10}^{(2)} = b_{10}^{(1)} + \lfloor d_{10}^{(2)} \rfloor = 2,$$

$$c_{10}^{(2)} g^{(1)} = \{d_{10}^{(2)}\} = 0,\ a_{10}'^{(2)} = b_{10}^{(2)} + c_{10}^{(2)} g^{(1)} = 2,\ d_{11}^{(2)} = 0,\ b_{11}^{(2)} = 0,\ c_{11}^{(2)} g^{(1)} = 0,$$

$$a_{11}'^{(2)} = b_{11}^{(2)} + c_{11}^{(2)} g^{(1)} = 0,\ a_{12}'^{(2)} = \frac{\alpha}{c_{12}^{(1)}} = 1,\ D^{(2)} = c_{12}^{(1)},\ \frac{c_{12}^{(2)}}{c_{12}^{(1)}} = \{a_{12}'^{(2)}\} = 0.$$

Используя формулы $r_j = -(a_{1j}' - a_{1j}'^{(2)}) / a_{12}'^{(2)}$, $j = 0,1$, $r_2 = -a_{12}' / a_{12}'^{(2)}$, находим отсечение Мартина $s_1 = -1/2 - 1/14(-x_4) - 5/14(-x_2)$. Элемент таблицы $a_{52}' = -5/14$ выбирается ведущим. После операции замещения получим симплекс-таблицу

$$A'' = \begin{pmatrix} 888/5 & 14/5 & 199/5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7/5 & 1/5 & -14/5 \\ 126/5 & -7/5 & 88/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку не все компоненты нулевого столбца таблицы целые, повторяем шаг 2. Пересчитаем $|D| = |a_{41} a_{52}'| = 5$. На второй итерации шага 2 $h_{0p(0)} = h_{01} = 3$ и $h_{2p(2)} = h_{21} = 2$ получаются аналогично предыдущему шагу. Подсчитаем $h_{3p(3)}$. После добавления отсечения Гомори (3) $s = -1/5 - 3/5(-x_4) - 3/5(-s_1)$ ведущим является первый столбец, т.е. $p(3) = 1$. Берем элемент $a''_{31}=\alpha/|D|=-7/5$. Отсюда $\alpha=-7$. Так как в этом случае $\alpha<0$, то ищем $\lambda_3=\lfloor -|D|/\alpha \rfloor=0$. Берем $c_{31}^{(0)}=|D|+\alpha\lambda_3=5$.

Таблица 2.

l	1	2	3	4
$a''^{(l)}_{31}=\alpha/c_{31}^{(l-1)}$	$-7/5$	$-7/3$	$-7/2$	$-7/1$
$c_{31}^{(l)}=\left\{a''^{(l)}_{31}\right\}c_{31}^{(l-1)}$	3	2	1	0

После преобразований (5) третьей строки, указанных в таблице 2, получаем $h_{31}=\lambda_3+v_{31}=4$. Здесь номер производящей строки $k=2$, поскольку $h_{31}>h_{01}>h_{21}$. После аналогичных первой итерации преобразований (4) в симплекс-таблицу добавляется отсечение $s_2=-2/5-1/5(-x_4)-1/5(-s_1)$. Производим операцию замещения с ведущим элементом $a''_{61}=-1/5$ и получим нулевой столбец симплекс-таблицы $(172,2,1,28,2,0,0)^T$, а сама таблица прямо и двойственно допустима. Отсюда $(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)=(2,1,28,2)$ – оптимальное решение задачи (6).

По ЦА и ПЦА находим целочисленное решение задачи (6) после добавления соответственно пяти и четырех отсечений.

3. Сравнение алгоритмов

В таблицах 3 и 4 приведены результаты сравнения указанных алгоритмов. Здесь τ_i $(V_i=\sigma_i/\tau_i)$, $i=1,2,3,4$ – среднее время (коэффициент вариации, равный отношению среднеквадратического отклонения к среднему времени) в секундах выполнения одной задачи, γ_i, $i=1,2,3,4,$ – максимальное число замещений соответственно по ЦА, МЦА, ПЦА, АМ, δ_1 – доля задач, решенных быстрее МЦА, чем АМ, δ_2 – доля задач, решенных быстрее МЦА, чем ПЦА, δ_3 – доля задач, решенных быстрее ПЦА, чем АМ. В МЦА во вспомогательной задаче вместо μ^* берется $\hat{\mu}=\min(\mu^*,3)$. При $m=n=10$ генерировалось 500 задач.

Таблица 3.

m	n	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	V_1	V_2	V_3	V_4
6	6	2.6	1	7.1	1.9	1.2	1.1	6.2	3.4
7	7	4.2	1.9	33.9	5.8	1	1.1	3.6	4.5
8	8	6.8	3.4	107.2	17.1	1	1.1	2	3.6
9	9	11.5	7	228.2	43.4	0.9	1.3	1.2	2.4
10	10	15.3	12.4	323.2	79.8	0.9	1.5	1.1	2.1

Таблица 4.

m	n	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	δ_1	δ_2	δ_3
6	6	1453	505	246606	764	50.7%	26.6%	76.4%
7	7	905	404	256818	1113	52.1%	34.5%	68.2%
8	8	1630	503	291939	1027	59.7%	46.7%	58.1%
9	9	1426	564	339974	1064	59.2%	62.7%	44.3%
10	10	1272	584	402639	1191	58.3%	68.6%	32.1%

Преимущество МЦА по сравнению с другими алгоритмами заключается в том, что он требует для каждой задачи в среднем меньшее количество времени. В ПЦА и АМ, несмотря на то, что при $m = n = 6,7$ бóльшая доля задач решается быстрее, чем МЦА, встречаются задачи, в которых наблюдаются выбросы как по времени выполнения, так и по числу замещений ($V_3, V_4 > V_2$). Отметим также, что с увеличением m и n доля задач, решенных быстрее ПЦА, чем МЦА и АМ, уменьшается.

Литература

1. Gomory R.E. An algorithm for integer solutions to linear programs // Princeton – IBM Mathematics Research Project, Technical Report No. 1. November 17, 1958.
2. Gomory R.E. An all-integer programming algorithm // IBM Research Center, 1960, January, Research Report RC-189.
3. Martin G.T. An accelerated Euclidean algorithm for integer linear programming // Recent Advances in Mathematical Programming. Robert L. Graves and Philip Wolfe, Editors. N. Y.: McGraw-Hill, 1963. P. 311–317.
4. Шалбузов К.Д., Морозов В.В. Об одной модификации метода Гомори // Вестник Моск. ун-та, сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2012. № 1. С. 3–9.
5. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. М.: Издательский центр «Академия», 2008.
6. Saaty T.L. Optimization in integers and related extremal problems. N.Y.: McGraw-Hill, 1970. (Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М.: Мир, 1973.)
7. Hu T.C. Integer programming and network flows. MA.: Menlo Park, 1970. (Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.)
8. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.