

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ
имени М.В. Ломоносова

академик

Е. И. Моисеев

«__» _____ 2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Спектральная теория эллиптических операторов»

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02)

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Спектральная теория эллиптических операторов

2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02)

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина относится к специальным дисциплинам вариативной части образовательной программы и является дисциплиной по выбору, рекомендуемой к изучению во 2-м семестре обучения.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
ПК-1: владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики	ЗНАТЬ: классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения; УМЕТЬ: применять классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения; ВЛАДЕТЬ: базовыми навыками выбора методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методов разработки и реализации алгоритмов их решения.

<p>ОПК-1: способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий</p>	<p>ЗНАТЬ: основные методы математического анализа классических задач в области естественных наук;</p> <p>УМЕТЬ: применять классические методы построения математических моделей, а также стандартные аналитические и численные методы их анализа;</p> <p>ВЛАДЕТЬ: базовыми навыками определения границ применимости математических моделей и интерпретации результатов их анализа.</p>
---	---

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов.

Из них 36 часа составляет контактная работа студента с преподавателем (32 часа занятия лекционного типа, 2 часа мероприятия текущего контроля успеваемости, 2 часа мероприятия итоговой аттестации).

72 часа составляет самостоятельная работа аспиранта.

7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по курсам обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и функционального анализа в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата и магистратуры по укрупненным группам направлений и специальности 01.00.00 «Математика и механика».

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Электронное обучение и дистанционные технологии не применяются. Процесс изложения учебного материала может сопровождаться презентациями с использованием мультимедийного проектора.

9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Спецкурс посвящен исследованию спектральных свойств операторов Штурма-Лиувилля и Дирака на конечных и бесконечных интервалах, а также оператора Лапласа в ограниченной области. Кроме того, изучаются различные функциональные пространства и вопросы спектральной теории для абстрактных самосопряженных операторов.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе							
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы					Самостоятельная работа учащегося, часы		
		из них					из них		
Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	Всего	
Тема 1.Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля на полупрямой Теорема о разложении в интеграл Фурье. Круг и точка Вейля для оператора Штурма-Лиувилля на полупрямой, достаточные условия. Теоремы Исмагилова. Индексы дефекта. Спектральная мера и функция Вейля-	10	10	-	-	-	10	-	20	20

Титчмарша. Достаточные условия дискретности спектра.										
Тема 2. Одномерная система Дирака Основные свойства, подобие общей системы внедиагональной. Асимптотика собственных значений и собственных функций. Оценки функции Грина. Полнота и базисность системы СПФ.	6	6	-	-	-	-	6	-	16	16
Промежуточная аттестация: устный опрос	2	-	-	-	-	-	2	-	-	-
Тема 3. Пространства Соболева и Лиувилля Теоремы вложения для функций из пространств Соболева и Лиувилля. Неравенства Фридрикса и Пуанкаре. Основные краевые задачи для оператора Лапласа.	10	10	-	-	-	-	10	-	20	20
Тема 4. Разложения по собственным функциям оператора Лапласа.	6	6	-	-	-	-	6	-	16	16

Теорема В.А.Ильина Фундаментальные системы функций и их свойства. Устройство спектра произвольной ФСФ. Точные условия локализации и равномерной сходимости разложений по ФСФ в классах Соболева-Лиувилля.											
Итоговая аттестация: Экзамен	2	-	-	-	-	-	2	-	-	-	
Итого	108						36	72			

10.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к экзамену и промежуточной аттестации.

11.РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная учебно-методическая литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Москва: Мир, 1988.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, Москва: Наука, 1969.
3. М.Рид. Б.Саймон. Методы математической физики. Москва, Мир, том 2, 1978.
4. В.А.Ильин. Спектральная теория дифференциальных операторов. Москва, Наука, 1991.

Дополнительная учебно-методическая литература

1. Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром // Труды ММО, т.9, №45, стр. 45-79, 1960.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс. РХД, 2009. - 724 стр.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1988. – 512 стр.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами - распределениями, Труды ММО, Т. 64, 2003, с. 159-219.
5. Садовничая И.В. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями, Мат. сборник, Т. 201, № 9, 2010, стр. 61-76.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т. 5, Москва, 1959г.
7. У.Еgorov, V.Kondratiev. On spectral theory of elliptic operator. Basel. Boston. Berlin. Birkhauser. 1996.
8. С.Л.Соболев Некоторые применения функционального анализа в математической физике., Москва, Наука, 1988.
9. С.М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, Наука, 1969.
10. Г.Н.,Ватсон. Теория бесселевых функций, том. 1, Москва, ИЛ, 1949.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. www.arxiv.org
2. www.mathnet.ru

Информационные технологии

1. Программное обеспечение для подготовки слайдов лекций MS PowerPoint
2. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
3. Издательская система LaTeX.

12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ

Разработчики – д.ф.-м.н., профессор Денисов Василий Николаевич; д.ф.-м.н., профессор Садовничая Инна Викторовна.

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Спектральная теория эллиптических операторов»**

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине из соответствующих Карт компетенций					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	<i>Неудовлетворительно</i>	<i>Неудовлетворительно</i>	<i>Удовлетворительно</i>	<i>Хорошо</i>	<i>Отлично</i>	
<i>Знать</i> основные понятия, возникающие в спектральной теории дифференциальных операторов Код 31 (ПК-1)	отсутствие знаний	фрагментарные представления об основных понятиях спектральной теории	сформированные представления об основных понятиях спектральной теории	сформированные представления об основных понятиях спектральной теории дифференциальных операторов, знание различных примеров	Систематизированные знания об основных понятиях спектральной теории дифференциальных операторов и глубокое понимание их свойств	Устный опрос
<i>Знать</i> основные принципы исследования спектральных свойств операторов Код 31 (ПК-1)	отсутствие знаний	фрагментарные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов	сформированные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов	сформированные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов, с примерами	Системные знания об основных принципах исследования спектральных свойств операторов, понимание их взаимосвязи с другими областями анализа	Устный экзамен
<i>Уметь</i> устанавливать	отсутствие уме-	фрагментарные	умение выяснить	умение изучать вопросы	умение устанавли-	Устный опрос

вать факты полноты и базисности систем и наличия сходимости, опираясь на теоретические знания Код У1 (ОПК-1)	ний	представления о методах исследования вопросов полноты, базисности и сходимости	асимптотическое поведение систем корневых функций операторов	сходимости, опираясь на асимптотическое поведение функций системы	вать факты полноты и базисности системы функций, опираясь на ее свойства и основные принципы спектральной теории	
<i>Уметь</i> применять методы исследования спектральных свойств к конкретным дифференциальным операторам Код У1 (ОПК-1)	отсутствие умений	фрагментарные представления о методах исследования спектральных свойств	умение описать основные свойства некоторых конкретных операторов	умение исследовать поведение собственных значений и собственных функций конкретных дифференциальных операторов	Умение полностью исследовать спектральные свойства конкретных дифференциальных операторов	Устный экзамен

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Вопросы к экзамену.

1. Оператор Штурма-Лиувилля на полупрямой. Теорема о разложении в интеграл Фурье.
2. Круг и точка Вейля для оператора Штурма-Лиувилля на полупрямой.
3. Достаточные условия для случаев круга и точки Вейля. Теоремы Исмагилова.
4. Индексы дефекта.
5. Спектральная мера и функция Вейля-Титчмарша. Достаточные условия дискретности спектра.
6. Определение и основные свойства одномерной системы Дирака.
7. Подобие общей системы внедиагональной.
8. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора Дирака.
9. Оценки функции Грина.
10. Полнота и базисность системы СПФ оператора Дирака с суммируемым потенциалом.
11. Формула среднего значения для функций из ФСФ оператора Лапласа.
12. Оценки суммы квадратов фундаментальных функций и следствия из них.

13. Устройство спектра произвольной ФСФ оператора Лапласа.
14. Ядра дробного порядка.
15. Оценка спектральной функции в метрике L_2 .
16. Условия локализации и равномерной сходимости разложений по ФСФ оператора Лапласа в классах Соболева-Лиувилля.
17. Энергетические теоремы о проблеме собственных чисел.
18. Задача Дирихле для эллиптического оператора второго порядка.
19. Основные краевые задачи для неоднородного уравнения Лапласа.
20. Процесс Ритца и теоремы о приближении собственных значений положительного определенного оператора.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения **Особенности организации процесса обучения**

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

Система контроля и оценивания

По итогам каждого устного опроса выставляются баллы (максимум 10 баллов за каждый вид работы). Пусть M – максимальное число баллов, которое может набрать студент. В конце семестра баллы конвертируются в оценку O_1 следующим образом:

меньше $M/2$ баллов – $O_1=2$;

больше или равно $M/2$ баллов, но меньше $2M/3$ – $O_1=3$;

больше или равно $2M/3$ баллов, но меньше $5M/6$ – $O_1=4$;

больше или равно $5M/6$ баллов – $O_1=5$.

На экзамене оценка O_1 является стартовой. Окончательная оценка определяется исходя из оценки устного ответа студента, при этом она не может быть меньше предварительной оценки и не может быть больше её более чем на 1 балл.

Структура и график контрольных мероприятий

Устные опросы на 3-й, 8-й и 14-й неделях; устный экзамен в конце семестра.