М.В. Уфимцев

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЙМАНА ПОРЯДКА *k* И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

Введение. В последние два десятилетия большое внимание уделяется распределениям порядка k, прежде всего – сложнопуассоновскому распределению порядка k [1, 2]. Оказалось, что как в вероятностных моделях, так и в приложениях это распределение и связанные с ним различные смеси могут более адекватно описать ситуацию, чем при использовании обычного распределения Пуассона. Вместе с тем, исследование свойств таких смесей оказывается много сложнее, чем для известных смесей, полученных на основе распределения Пуассона (скажем, пуассон-биномиального, пуассон-паскалевского распределения или «инфекционного» распределения Неймана типа А [9, гл. 8]). В работе [3] были рассмотрены смеси распределения Пуассона порядка k со смешивающими распределениями: биномиальным, отрицательным биномиальным и распределением Пуассона. Однако изложение носит элементарный и вводный характер, и возможен более углублённый анализ, как свидетельствуют наши исследования свойств Пуассон порядка k– биномиального [4], [5] и Пуассон порядка k– отрицательного биномиального [6] распределений. В данной работе изучаются некоторые свойства сложного распределения: смеси Пуассон порядка k – пуассоновского распределения, т.е. распределения Неймана типа А порядка k.

Математическая модель следующая: для заданного натурального $k \geq 1$ рассматриваются независимые случайные величины (с.в.) ζ_1, ..., ζ_k, каждая из которых имеет распределение Пуассона, $\zeta_j \sim Po(\lambda)$, с одним и тем же пуассоновским средним λ. Образуется сумма

$$\zeta = \zeta_1 + 2\zeta_2 + ... + k\zeta_k ,$$

которая и имеет распределение Пуассона порядка k [1] с производящей функцией (п.ф.)

$$f_\zeta(z) \equiv f(z) = E\{z^\zeta\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{\zeta = n\} = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{k} (z^j - 1)\right\} . \qquad (1)$$

Заметим, что эта модель – частный случай намного более общей модели множественных распределений [7, 8], в которой каждая с.в. ζ_j имеет свой параметр Пуассона: $\zeta_j \sim Po(\lambda_j),\ j = 1,...,k$.

Схема смешивания в [3] и данной работе такова: вводится условная с.в. $X \mid \zeta$, имеющая распределение Пуассона с параметром $\mu\zeta$ и п.ф. $\tilde{g}(z) = \exp\{\mu\zeta(z-1)\}$. Исследуется распределение безусловной с.в. X и некоторые его свойства. Выражение для функции вероятностей (ф.в.) с.в. X в форме бесконечного ряда было получено в [3]; в настоящей работе рассматривается представление для ф.в. в виде суммы конечного числа слагаемых.

Наряду с моделью смеси распределений для с.в. X возможна и другая трактовка, как вытекает из теоремы Гёрлэнда ([15]; см. также [9], гл. 8), и это тоже было установлено в [3]: как обобщённой (более современная терминология – "stopped sum") с.в. Рассматривается сумма N независимых случайных слагаемых

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N ,$$

каждое из которых имеет распределение Пуассона ($X_j \sim Po(\mu)$), число слагаемых N случайно и имеет распределение Пуассона порядка k: $N \sim Po_k(\lambda)$, причём N и X_j независимы. Тогда с.в. X имеет распределение Неймана типа A порядка k [3] с п.ф.

$$G_X(z) \equiv G(z) = f(g(z)) = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{k}\left[e^{j\mu(z-1)} - 1\right]\right\} \qquad (2)$$

(здесь $g(z) = e^{\mu(z-1)}$ – п.ф. распределения $Po(\mu)$).

Выражение (2) для п.ф. является ключевым в дальнейшем рассмотрении. Получено выражение для ф.в. в виде конечной суммы (со связями) и рекуррентное соотношение, весьма облегчающее последовательное вычисление ф.в. p_n для различных n, начиная с $n = 0$. Выведены выражения для производных ф.в. по параметрам λ, μ. Рассмотрены различные моментные характеристики распределения: обычные и факториальные кумулянты, генеральные и центральные моменты. Наконец, на основе анализа характеристической функции, отвечающей (2), показана безграничная делимость распределения и получены его асимптотики.

I. Явный вид ф.в. Как известно ([9], [12]), ф.в. $p_n = P\{X = n\}$ может быть получена из п.ф. (2) как

$$p_0 = G(0) = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{k}\left[e^{-j\mu} - 1\right]\right\} = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{k} e^{-j\mu} - k\lambda\right\}, \qquad (3)$$

а для $n = 1,2,\ldots$

$$p_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G(z)\bigg|_{z=0} . \qquad (4)$$

Для получения p_n в явном виде запишем п.ф. (2) как

$$G(z) = p_0 \exp\left\{ \lambda \sum_{j=1}^{k} \left[e^{j\mu(z-1)} - e^{-j\mu} \right] \right\}$$

и воспользуемся формулой Фаа ди Бруно [9, стр. 346], [10, стр. 48], [17, стр. 626] для n–ой производной от сложной функции $\theta(z) = F(y(z))$:

$$\frac{d^n}{dz^n}\theta(z) = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{d^m F(y)}{dy^m} \sum_{\pi(n)} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{(l!)^{i_l}} \frac{(y^{(l)}(z))^{i_l}}{i_l!} \quad , \tag{5}$$

где суммирование во внутренней сумме идёт по всем разбиениям $\pi(n)$ числа n таким, что целые числа $i_l \geq 0$ удовлетворяют условиям

$$n = i_1 + 2i_2 + \ldots + ni_n, \quad m = i_1 + i_2 + \ldots + i_n .$$

В нашем случае положим $y(z) = \lambda \sum_{j=1}^{k} \left[e^{j\mu(z-1)} - e^{j\mu} \right]$; для использования (5) потребуется l–ая производная $y^{(l)}(z) = \dfrac{d^l y(z)}{dz^l}$ в нуле, обозначаемая нами $g_l^{(1)}$. Она может быть получена как l–ый член разложения в степенной ряд производящей функции

$$\widetilde{G}(x) = \lambda \sum_{j=1}^{k} \left[e^{j(x-\mu)} - e^{-j\mu} \right] = \sum_{l=1}^{\infty} g_l^{(1)} \frac{x^l}{l!}$$

и равна

$$g_l^{(1)} = \lambda \sum_{j=1}^{k} j^l \, e^{-j\mu} \quad . \tag{6}$$

Применяя (5) к $G(z)$, получим представление ф.в. p_n в виде конечной суммы:

$$p_n = p_0 \mu^n \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \sum_{\pi(n)} \frac{1}{(l!)^{i_l}} \frac{(g_l^{(1)})^{i_l}}{i_l!} \quad . \tag{7}$$

II. Рекуррентное соотношение для ф.в. Хотя, на первый взгляд, выражение (7) для ф.в. выглядит проще, чем бесконечный ряд, полученный в [3], опыт автора показывает, что рассмотрение всех i_l, удовлетворяющих нужным условиям во внутренней сумме – весьма непростое занятие даже для небольших n. Поэтому представляется важным получение рекуррентного соотношения, позволяющего (для заданных k, λ, μ) последовательно вычислять p_n, начиная с p_0, задаваемого (3).

Искомое соотношение

$$np_n = \lambda \sum_{j=1}^{k} \; e^{-j\mu} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(\mu j)^{n-l}}{(n-l-1)!} p_l \qquad (8)$$

получается применением (4):

$$p_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{dG(z)}{dz} \right\}_{z=0} = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} G'(z) \right\}_{z=0} .$$

Дифференцируя (2), имеем

$$G'(z) = \lambda G(z) \sum_{j=1}^{k} j\mu e^{j\mu(z-1)} \; . \qquad (9)$$

Далее применяем формулу Лейбница для производных высших порядков от произведения:

$$n!\, p_n = \lambda \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ G(z) \sum_{j=1}^{k} j\mu e^{j\mu(z-1)} \right\}_{z=0} =$$

$$= \lambda \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{(n-l-1)!} \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l G(z)}{dz^l} \right) \frac{d^{n-l-1}}{dz^{n-l-1}} \left(\sum_{j=1}^{k} j\mu e^{j\mu(z-1)} \right) \right] \right\}_{z=0} =$$

$$= \lambda (n-1)! \sum_{l=0}^{n-1} p_l \frac{1}{(n-l-1)!} \sum_{j=1}^{k} (j\mu)^{n-l} e^{-j\mu} .$$

Наконец, сокращаем левую и правую часть на $(n-1)!$, меняем порядок суммирования по l и по j и получаем (8). Хотя число слагаемых в (8) растёт с увеличением n, расчёт по этой формуле гораздо легче поддаётся программированию, чем перебор всех ситуаций в (7).

III. Производные по параметрам. Производные ф.в. по параметрам λ, μ интересны сами по себе; кроме того, они требуются при рассмотрении задач точечного оценивания параметров распределения (регулярность; вид уравнений максимального правдоподобия). Они могут быть следующим образом выражены через ф.в. p_n:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \mu} = \frac{(np_n - (n+1)\, p_{n+1})}{\mu} \quad , \qquad (10)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial \lambda} = -p_n + \sum_{j=1}^{k} e^{-j\mu} \sum_{l=0}^{n} \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l)!} p_l \; . \qquad (11)$$

Доказательство: для получения (10) и (11) нужно применить формулу Лейбница к производной п.ф. $G(z)$ по соответствующему параметру. Например,

$$\frac{\partial p_n}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n G(z)}{dz^n}\right\}_{z=0} = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{dz^n}\frac{\partial G(z)}{\partial \mu}\right\}_{z=0} =$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{ G(z)\,\lambda\sum_{j=1}^{k} z\, j e^{j\mu(z-1)} - G(z)\,\lambda\sum_{j=1}^{k} j e^{j\mu(z-1)} \right\}_{z=0} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\sum_{l=0}^{n} C_n^l \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}\left[G(z)\,\lambda\sum_{j=1}^{k} j e^{j\mu(z-1)}\right]\frac{d^l z}{dz^l} - \frac{d^n}{dz^n}\left[G(z)\,\lambda\sum_{j=1}^{k} j e^{j\mu(z-1)}\right]\right\}_{z=0}.$$

Выражение в квадратных скобках для n–ой производной, умноженное на μ, совпадает с $G'(z)$ в (9). В нуле l–ая производная от z равна δ_{l1}, так что в сумме по l остаётся лишь член с $l=1$, и тогда

$$\frac{\partial p_n}{\partial \mu} = \frac{1}{n!}\left\{ n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{1}{\mu}G'(z)\right] - \frac{n+1}{n+1}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{\mu}G'(z)\right]\right\}_{z=0} =$$

$$= \frac{(np_n - (n+1)\,p_{n+1})}{\mu}.$$

IV. Моментные характеристики. Начнём с самого простого – факториальных кумулянтов $\kappa_{[r]}$. Их производящая функция выражается через п.ф. (2) следующим образом ([9], стр. 45; [11]; [12], стр. 110 - 111):

$$\ln G(1+t) = \sum_{r\ge 1} \kappa_{[r]} \frac{t^r}{r!}.$$

Произведя в (2) замену и прологарифмировав, получаем

$$\ln G(1+t) = \lambda \sum_{j=1}^{k} (e^{j\mu t} - 1),$$

откуда

$$\kappa_{[r]} = \left.\frac{d^r G(1+t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \lambda \sum_{j=1}^{k} (j\mu)^r, \quad r = 1,2,\ldots . \qquad (12)$$

Несмотря на простоту выражения (12), к нему можно прийти и другим путём. Производящую функцию $G(z)$ можно рассматривать как сложную функцию $G(z) = f(g(z))$, где $f(z)$ определена в (1), а $g(z)$ – п.ф. для $Po(\mu)$. Тогда

$$\kappa_{[r]} = \frac{d^r \ln G(1+t)}{dt^r}\bigg|_{t=0} = \lambda \sum_{j=1}^{k} \frac{d^r}{dt^r}(e^{j\mu t}-1)\bigg|_{t=0} = \lambda \sum_{j=1}^{k} \frac{d^r}{dt^r} h_j(t+1;\mu)\bigg|_{t=0},$$

где $h_j(t;\mu) = e^{j\mu(t-1)}$ – п.ф. распределения Пуассона кратности j, а $h_j(t+1;\mu)$ – п.ф. факториальных моментов $\alpha_{[r]}$ этого распределения: $\alpha_{[r]} = \frac{d^r h_j(1+t;\mu)}{dt^r}\bigg|_{t=0}$. Но, как известно, ([9], стр. 156), $\alpha_{[r]} = \theta^r$ для $Po(\theta)$; в нашем случае можно положить $\theta = j\mu$, и тогда

$$\kappa_{[r]} = \lambda \sum_{j=1}^{k} (j\mu)^r = \mu^r \left(\lambda \sum_{j=1}^{k} j^r \right).$$

Последнее выражение в круглых скобках – не что иное, как обычный r–ый кумулянт распределения Пуассона порядка k с параметром λ.

Обычные кумулянты κ_j (а также «генеральные» моменты α_j относительно нуля) выражаются через факториальные кумулянты $\kappa_{[r]}$ (соответственно, факториальные моменты $\alpha_{[r]}$) с помощью чисел Стирлинга 2-го рода как ([9], стр. 44; [11])

$$\kappa_j = \sum_{r=1}^{j} \sigma_j^{(r)} \kappa_{[r]} \qquad (\alpha_j = \sum_{r=1}^{j} \sigma_j^{(r)} \alpha_{[r]}). \tag{13}$$

Учитывая, что $\sigma_1^{(1)} = 1$; $\sigma_2^{(1)} = \sigma_2^{(2)} = 1$; $\sigma_3^{(1)} = \sigma_3^{(3)} = 1$, $\sigma_3^{(2)} = 3$; $\sigma_4^{(1)} = \sigma_4^{(4)} = 1$, $\sigma_4^{(2)} = 7$, $\sigma_4^{(3)} = 6$ и т.д., получаем для первых четырёх кумулянтов κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 (нужно также иметь в виду их связь с моментами – генеральными и центральными μ_j: $\kappa_1 = \alpha_1$, $\kappa_2 = \mu_2$, $\kappa_3 = \mu_3$, $\kappa_4 = \mu_4 - 3(\mu_2)^2$ ([12], стр. 102 – 103), так что попутно мы получаем и выражения для первых моментов):

$$\kappa_1 = \kappa_{[1]} = \lambda\mu \sum_{j=1}^{k} j = \lambda\mu \frac{k(k+1)}{2} \; ; \tag{14}$$

$$\kappa_2 = \kappa_{[2]} + \kappa_{[1]} = \lambda\mu^2 \sum_{j=1}^{k} j^2 + \kappa_{[1]} = \lambda\mu \frac{k(k+1)}{2}\left(1 + \mu \frac{2k+1}{3}\right) \tag{15}$$

$$\kappa_3 = \kappa_{[1]} + \kappa_{[3]} + 3\kappa_{[2]} = \lambda\mu\frac{k(k+1)}{2}\left(1+\mu^2\ \frac{k(k+1)}{2}+\mu(2k+1)\right); \qquad (16)$$

$$\kappa_4 = \kappa_{[1]} + \kappa_{[4]} + 7\kappa_{[2]} + 6\kappa_{[3]} =$$

$$=\lambda\mu\frac{k(k+1)}{2}\left(1+\frac{7}{3}\mu(2k+1)+3\mu^2\ k(k+1)+\frac{2k+1}{15}\mu^3\,(3k^2+3k-1)\right). \qquad (17)$$

Обычно этих четырёх кумулянтов достаточно для вероятностно-статистических применений, ибо выборочные кумулянты более высоких порядков оказываются крайне чувствительны к флуктуациям в выборках. Поэтому, как правило, используя метод моментов для оценивания параметров распределения (7), применяют выборочное среднее и выборочную дисперсию, и для подсчёта асимптотической дисперсии таких оценок метода моментов нужны как раз выражения (14) – (17) ([13], гл. 27, стр. 382, 383, 388).

V. Асимптотики. Производящей функции (2) соответствует характеристическая функция (х.ф.)

$$\varphi(t) = \exp\left\{\lambda\sum_{j=1}^{k}\left[e^{j\mu(e^{it}-1)}-1\right]\right\}, \qquad (18)$$

которая и будет объектом дальнейшего рассмотрения.

Пусть $\mu \to 0$, а $\lambda = const$; тогда, разлагая внутреннюю экспоненту в (18) по формуле Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(t) = \exp\left\{\lambda\left[\sum_{j=1}^{k}\ j\,\mu(e^{it}-1)+O(\mu^2)\ \right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lambda\,\mu(e^{it}-1)\sum_{j=1}^{k}\ j\ +O(\mu^2)\ \right\},$$

получим, что при $\mu \to 0$

$$\varphi(t) \to \exp\left\{\lambda\,\mu\,\frac{k(k+1)}{2}(e^{it}-1)\right\} = \exp\{\alpha_1\,(e^{it}-1)\},$$

т.е. к х.ф. распределения $Po(\alpha_1)$. По теореме Леви, отсюда следует сходимость по распределению рассматриваемой с.в. X к пуассоновской с.в. $\eta \sim Po(\alpha_1)$.

Теперь рассмотрим случай $\mu = const, \lambda \to \infty$. Перейдём от X к нормированной и центрированной с.в.

$$\tau = \frac{X-\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{X}{\sqrt{\mu_2}} - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}}.$$

Её х.ф. равна [16, стр. 133]

$$\varphi_\tau(t)=e^{-i\alpha_1/\sqrt{\mu_2}}\,\varphi(t/\sqrt{\mu_2})=\exp\left\{-\frac{i\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}}+\lambda\sum_{j=1}^{k}\left[e^{j\mu(\exp(it/\sqrt{\mu_2}-1)}-1\right]\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{i\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}}+\lambda\sum_{j=1}^{k}\left[e^{j\mu(it/\sqrt{\mu_2}-t^2/(2\mu_2)+O(\lambda^{-3/2}))}-1\right]\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{i\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}}+\lambda\sum_{j=1}^{k}\left[j\mu(it/\sqrt{\mu_2}-t^2/(2\mu_2)+O(\lambda^{-3/2}))-\frac{j^2\mu^2t^2}{2\mu_2}\right]\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{\lambda\mu t^2}{2\mu_2}\sum_{j=1}^{k}j-\frac{\mu^2t^2}{2\mu_2}\sum_{j=1}^{k}j^2+O(\lambda^{-1/2})\right\}\to e^{-t^2/2}$$

при $\lambda\to\infty$. Таким образом, с.в. τ сходится по распределению к стандартному нормальному $N(0,1)$, а изучаемая с.в. X асимптотически нормальна $N(\alpha_1,\mu_2)$ при $\mu=const,\lambda\to\infty$.

Из вида х.ф. (18) нетрудно заключить (скажем, как это сделано в [9], стр. 351), что распределение (8) является безгранично делимым. Впрочем, это свойство – общее для обобщённых пуассоновских распределений ([9]; [14], стр. 310 –315).

Литература

1. Филиппу А.Н. Пуассоновские и сложные пуассоновские распределения порядка k и некоторые их свойства. – Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, 1983, № 130. С. 175 – 180.
2. Aki, S. (2003) Survey of Discrete Distributions of Order k and Related Distributions. http : // www2.ipcku.kansai-u.ac.jp /~aki / survey.
3. Philippou, A.N. (1989) Mixtures of distributions by the Poisson Distribution of Order k. Biometrical Journal , vol. 31, no. 1, pp. 67 – 74.
4. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические свойства двухпараметрического семейства распределений Пуассона порядка k. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2000, № 2. С. 32 – 37.

5. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. О смеси распределений Пуассона конечного порядка с биномиальным распределением // Прикладная математика и информатика № 8. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2001. С. 114 – 126.
6. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Сложный закон Пуассона с обобщающим отрицательным биномиальным распределением // Прикладная математика и информатика № 19. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2004. С. 91 – 102.
7. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические задачи при экспериментальном разделении множественных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1985. 141 с.
8. Распределение продуктов множественных процессов и дискретное "инфекционное" распределение Неймана. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 1982, № 2. С. 41 – 51.
9. Johnson, N.L., Kotz, S., and Kemp, A.W. (1992) Univariate Discrete Distributions, 2nd Edition. Wiley & Sons, New York
10. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1983. 288 с.
11. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. О моментных характеристиках распределений. В кн.: «Методы математического моделирования: Труды факультета ВМиК». М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 34 – 41.
12. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.
13. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд. 2-е. М.: Мир, 1975. 648 с.
14. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962. 720 с.
15. Gurland, J. (1957) Some interrelations among compound and generalized distributions // Biometrika, vol. 44, pp. 265 – 268.
16. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 633 с.
17. Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. 832 с.