

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

«Утверждаю»

Декан факультета ВМК МГУ  
имени М.В. Ломоносова

академик



Е.И. Моисеев

« 2017 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Уравнения смешанного типа»**

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»  
(01.01.02)

2017 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### 1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Уравнения смешанного типа

### 2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре.

### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.06.01 «Математика и механика». Направленность (профиль) «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02).

### 4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина является обязательной для освоения во 2-м семестре обучения.

### 5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
Владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики (ПК-1)	З1 (ПК-1) Знать: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1) Уметь: применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1) Владеть: навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественно-

	научных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения
Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)	З1(ОПК-1) ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области У1(ОПК-1) УМЕТЬ: уметь самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1)	У2 (УК-1)УМЕТЬ: при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений  В2 (УК-1)ВЛАДЕТЬ: навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

## 6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов.

40 часов составляет контактная работа с преподавателем – 24 часа занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 12 часов мероприятий текущего контроля успеваемости, 2 часа групповых консультаций, 2 часа мероприятий промежуточной аттестации.

68 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.

## 7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по линейной алгебре, математическому анализу, обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям в частных производных и уравнениям математической физики, соответствующим основным образовательным программам бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика» или 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

## 8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Процесс обучения состоит из изучения теории и решения практических заданий, а также самостоятельного ознакомления с научными статьями. В конце семестра проводится устный экзамен.

## 9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе изучается общая теория краевых задач для вырождающихся уравнений эллиптического типа, вырождающихся уравнений гиперболического типа и уравнений смешанного типа. Рассматриваются уравнения, моделирующие явления трансзвуковой газовой динамики, и некоторые модельные задачи. Для построения фундаментальных решений привлекаются сведения из теории специальных функций математической физики. Подробно изучаются свойства построенных решений вырождающихся эллиптических и гиперболических уравнений. Рассматривается также спектральный метод решения краевых задач.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),  форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы					Самостоятельная работа обучающегося, часы			
		из них					из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости (кол-	<b>Всего</b>	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	<b>Всего</b>

						локвумы, прак- тические кон- трольные занятия и др)*				
<p><b>Тема 1. Некоторые задачи, приводящие к уравнениям смешанного типа. Краевая задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.</b></p> <p>Плоскопараллельное течение сжимаемой среды. Уравнение Чаплыгина. Приближенная замена уравнений трансзвукового течения на плоскости годографа. Постановка задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, существование и единственность ее решения. Принцип Зарембы-Жиро. Принцип экстремума для решений волнового уравнения. Принцип экстремума для решений задачи Трикоми.</p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6
<p><b>Тема 2. Вспомогательные предложения.</b></p> <p>Гипергеометрическая функция. Аналитическое продолжение гипергеометрической функции. Уравнение Эйлера-Дарбу – определение, свойства, общее решение. Вычисление некоторых интегралов.</p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6
<p><b>Тема 3. Вырождающиеся эллиптические урав-</b></p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6

<p><b>нения.</b></p> <p>Теория потенциала. Потенциалы двойного и простого слоя. Интегральные уравнения для плотностей. Задача Хольмгрена. Функция Грина задачи Хольмгрена. Решение задачи Хольмгрена.</p>										
<p><b>Тема 4. Вырождающиеся гиперболические уравнения.</b></p> <p>Метод Римана. Задача Коши. Обобщенное решение класса <math>R_1</math>. Задача Коши-Гурса. Функция Римана-Адамара.</p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6
<p><b>Тема 5. Уравнения смешанного типа.</b></p> <p>Постановка задачи Трикоми в классе <math>R_1</math> и единственность ее решения. Теорема существования решения задачи Трикоми.</p>	12	4	-	-	-	2	6	6	-	6
<p><b>Тема 6. Спектральный метод решения краевых задач для уравнений смешанного типа.</b></p> <p>Разложение решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в биортогональный ряд. Полнота, минимальность и базисность системы негармонических синусов. Свойства решения краевой задачи, построенного в виде</p>	14	4	-	2	-	2	6	6	-	6

биортогонального ряда.										
<b>7. Промежуточная аттестация – экзамен</b>	34	2					32			
<b>Итого</b>	108	40					68			

## 10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом.

Тема 1. «Некоторые задачи, приводящие к уравнениям смешанного типа. Краевая задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе» [1, 4].

Тема 2. «Вспомогательные предложения» [2, 3].

Тема 3. «Вырождающиеся эллиптические уравнения» [2, 3].

Тема 4. «Вырождающиеся гиперболические уравнения» [2, 3].

Тема 5. «Уравнения смешанного типа» [2, 3].

Тема 6. «Спектральный метод решения краевых задач для уравнений смешанного типа» [5-8].

## 11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

### Основная литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
5. Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов // Доклады АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 794-798.
6. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 177-179.

7. Моисеев Е.И. Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 7. С. 1160-1172.
8. Моисеев Е.И. О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1229-1237.

#### Дополнительная литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961.
3. Коул Д., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989.
4. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. – Л.: ЛГУ, 1990.
5. Моисеев Е.И. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 110-121.
6. Моисеев Е.И. О существовании и единственности решения неклассической краевой задачи // Доклады РАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 448-451.
7. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
8. Пилия А.Д., Федоров В.И. Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // Журн. exper. и теор. физики. 1971. Т. 60. Вып. 1. С. 389-399.
9. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Пер. с итал. Ф.И. Франкля. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
10. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973.
11. Germain P., Bader R. Sur le problème de Tricomi // C.R. Acad. Sci. Paris. 1951. V. 232. P. 463-465.
12. Aziz A.K., Schneider M. On Uniqueness of Frankl-Morawetz Problem in  $R^2$  // Monatsch. Math. 1978. V. 85. № 4. P. 265-276.
13. Morawetz C.S. A Uniqueness Theorem for Frankl's Problem // Comm. Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. № 4. P. 697-703.
14. Morawetz C.S. Mixed equations and transonic flow // J. Hyperbolic Diff. Eq. 2004. № 1. P. 1-26.

#### Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. <http://elibrary.ru>
2. <https://istina.msu.ru/>



### **Информационные технологии, используемые в процессе обучения**

1. Программное обеспечение для подготовки слайдов лекций MS PowerPoint
2. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
3. Издательская система LaTeX.

### **Материально-техническая база**

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный проектором и экраном, а также меловой доской.

### **12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ**

Русский

### **13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛИ**

Акад. РАН Моисеев Евгений Иванович, доцент, д.ф.-м.н. Полосин Алексей Андреевич

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«Уравнения смешанного типа»**

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю) <i>(критерии и показатели берутся из соответствующих карт компетенций, при этом пользуются либо традиционной системой оценивания, либо БРС)</i>					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Удовлетворительно</b>	<b>Хорошо</b>	<b>Отлично</b>	
<b>ЗНАТЬ:</b> современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения 31 (ПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные систематические знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Устный экзамен-тест
<b>УМЕТЬ:</b> применять современ-	Отсутствие умений	Фрагментарные умения применять	В целом успешное, но не	Успешное, но содержащее	Сформированное умение применять	Устный экзамен

ные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1)		современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	систематическое умение применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	отдельные пробелы умение применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	
<b>ВЛАДЕТЬ:</b> навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1)	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	В целом успешное, но не полное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	Успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	Устный экзамен
<b>УМЕТЬ:</b> при решении иссле-	Отсутствие умений	Частично освоенное умение при решении	В целом успешное, но не систе-	В целом успешное, но содержа-	Сформированное умение при решении	доклад на научном

<p>довательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений У2 (УК-1)</p>		<p>исследовательских и практических задач генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений</p>	<p>математически осуществляемое умение при решении исследовательских и практических задач генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений</p>	<p>шее отдельные пробелы умение при решении исследовательских и практических задач генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений</p>	<p>исследовательских и практических задач генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений</p>	<p>семинаре</p>
<p><b>ВЛАДЕТЬ:</b> навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях В2 (УК-1)</p>	<p>Отсутствие навыков</p>	<p>Фрагментарное применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.</p>	<p>В целом успешное, но не систематическое применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.</p>	<p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.</p>	<p>Успешное и систематическое применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.</p>	<p>доклад на научном семинаре</p>
<p><b>УМЕТЬ:</b> самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей</p>	<p>Отсутствие умений</p>	<p>Частично освоенное умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в</p>	<p>В целом успешное, но не систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-</p>	<p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение самостоятельно осуществлять</p>	<p>Успешное и систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую</p>	<p>доклад на научном семинаре</p>

профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий У1 (ОПК-1)		соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	
ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области З1(ОПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные систематические знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	доклад на научном семинаре

### Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Список вопросов для устного экзамена.

1. Плоскопараллельное течение сжимаемой среды.
2. Уравнение Чаплыгина. Приближенная замена уравнений трансзвукового течения на плоскости годографа.
3. Постановка задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, существование ее решения.
4. Единственность решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Принцип Зарембы-Жиро. Принцип экстремума для решений волнового уравнения. Принцип экстремума для решений задачи Трикоми.

5. Гипергеометрическая функция. Аналитическое продолжение гипергеометрической функции.
6. Уравнение Эйлера-Дарбу. Определение, свойства, общее решение.
7. Вычисление некоторых сингулярных интегралов.
8. Потенциал двойного слоя для вырождающегося эллиптического уравнения.
9. Потенциал простого слоя для вырождающегося эллиптического уравнения.
10. Интегральные уравнения для плотностей.
11. Функция Грина задачи Хольмгрена.
12. Решение задачи Хольмгрена.
13. Метод Римана.
14. Задача Коши для вырождающегося гиперболического уравнения. Обобщенное решение класса  $R_1$ .
15. Задача Коши-Гурса. Функция Римана-Адамара.
16. Постановка задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта в классе  $R_1$  и единственность ее решения.
17. Теорема существования решения задачи Трикоми.
18. Разложение решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в биортогональный ряд.
19. Полнота, минимальность и базисность системы негармонических синусов.

Материалы для мероприятий текущего контроля.

Мероприятия текущего контроля реализуются в виде устных докладов, которые должен сделать каждый студент в течение семестра. Доклад заключается в подробном изложении решения какой-либо конкретной задачи из теории уравнений смешанного типа.

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

#### **Особенности организации процесса обучения**

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать основную и дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

#### **Система контроля и оценивания**

Окончательная оценка определяется исходя из оценки устного ответа студента, при этом отсутствие удовлетворительного доклада в течение семестра может понизить оценку на балл, а отличный доклад и работа в течение семестра может улучшить оценку студента не более, чем на один балл.

#### **Структура и график контрольных мероприятий**

Каждый студент делает доклад в течение семестра и сдает устный экзамен в конце семестра.