Раздел I. Обратные задачи

В.И Дмитриев.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ.

Введение.

Вопрос единственности решения обратной задачи является важной составляющей обоснования метода распознавания объекта с помощью дистанционного его изучения. К таким задачам относятся методы электромагнитного зондирования, в которых по измеряемым характеристикам электромагнитного поля определяют распределение электропроводности в пространстве, а, следовательно, структуру и строение этого пространства. Основные результаты по единственности решения обратных задач электромагнитного зондирования были получены А.Н. Тихоновым для слоистых сред [1], [2]. В дальнейшем были получены теоремы единственности зондирования слоистых сред локальным источником [3], а также для двумерной задачи в случае *E*-поляризации поля [4]. В последнее время была доказана теорема единственности для двумерной задачи зондирования локального неоднородного тела при любой поляризации поля [5]
В настоящей статье рассмотрен вопрос единственности решения обратной задачи- зондирования локальной неоднородной зоны при возбуждении поля произвольной плоской волной.

1.Постановка задачи.

Рассмотрим произвольное слоистое полупространство *(z>0)* с распределением электропроводности $\sigma(z)$, $\min\sigma(z) \ge \sigma_1 > 0$. При *z<0* имеем однородное полупространство с очень малой электропроводимостью $\sigma_0 \ll \min\sigma(z)$. В полупространстве *z*>0 находится локальная проводящая зона V с произвольным распределением электропроводимости $\sigma_H(M)$ $M \in V$, $\sqrt{x_M^2 + y_M^2} \le L$, $z_M \in [h_0, H]$. Источником электромагнитного поля является плоская электромагнитная волна, нормально падающая на границу полупространства *z=0*. Среда считается магнитооднородной, т.е. магнитная проницаемость $\mu = const$. Поле считается квазистационарным. В этом случае электрическое поле *E(M)* и магнитное поле *H(M)* удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$rot\overline{H} = \sigma\overline{E};\ rot\overline{E} = i\omega\mu\overline{H} \qquad (1)$$

где ω- частота поля.

На границах разрыва распределения электропроводимости непрерывные тангенциальные составляющие $\bar{E}_\tau$ и $\bar{H}_\tau$. На бесконечности $r \to \infty$ электромагнитное поле экспоненциально убывает.
Прямая задача электромагнитного зондирования состоит в определении электромагнитного поля при заданных источниках поля и распределением электропроводности. Решение прямой задачи существует, единственно и устойчиво.

Обратная задача электромагнитного зондирования заключается в определении распределения $\sigma_H(M), z_M > 0$ по известному электрическому полю на плоскости z=0 в зависимости от координат x,y и частоты поля ω. Доказательству единственного решения обратной задачи зондирования при некоторых ограничениях на параметры задачи и посвящена настоящая статья.

2.Лемма Лоренца и переход к интегральным уравнениям.

В теории электромагнитных полей большую роль играет лемма Лоренца, которая связывает поля разных источников в одной и той же среде. Обычно лемму Лоренца приводят для однородной ограниченной области. Мы выведем лемму для случая неограниченной области со слоистым распределением электропроводности $\sigma(z), \min\sigma(z) \gg \sigma_1 > 0$.
Пусть в безграничной области с проводимость $\sigma(z)$ заданы источники электромагнитного поля в виде электрического $\bar{j}_l(m)$ и магнитного $\bar{j}_m(m)$ токов.
Электромагнитное поле $\bar{E}(M)$ и $\bar{H}(M)$ подчиняется уравнениям Максвелла.

$$rot\bar{H} = \sigma\bar{E} + \bar{j}_l; rot\bar{E} = i\omega\mu\bar{H} + \bar{j}_m; \qquad (2)$$

Рассмотрим электромагнитные поля $\bar{E}^i(M), \bar{H}^i(M), i \in [1,2]$ для источников $\bar{j}_l^i(M), \bar{j}_m^i(M)$ для которых введем выражение

$$W = d\omega([\bar{E}^1 \times \bar{H}^2]) - ([\bar{E}^2 \times \bar{H}^1]) =$$
$$\bar{H}^2 rot\bar{E}^1 - \bar{E}^1 rot\bar{H}^2 - \bar{H}^1 rot\bar{E}^2 + \bar{E}^2 rot\bar{H}^1$$

Подставив в данное выражение роторы полей из управлений Максвелла, получим
$W = \bar{H}^2\bar{j}_m^1 - \bar{H}^1\bar{j}_m^2 + \bar{E}^2\bar{j}_l^1 - \bar{E}^1\bar{j}_l^2$. Проинтегрировав это равенство по области V и используя формулу Гаусса, получим интегральную лемму Лоренца.

$$\int_S ([\bar{E}^1 \times \bar{H}^2]) - ([\bar{E}^2 \times \bar{H}^1])\bar{n}dS =$$
$$= \int_V (\bar{H}^2\bar{j}_m^1 - \bar{H}^1\bar{j}_m^2 + \bar{E}^2\bar{j}_l^1 - \bar{E}^1\bar{j}_l^2)dv \qquad (3)$$

где S - поверхность, ограничивающая область V, в которой непрерывно $\sigma(z)$, $\bar{n}$ - нормаль к поверхности S.

Учитывая, что $[\bar{E} \times \bar{H}]) \bar{n}$ непрерывна на плоскостях разрыва $\sigma(z)$, $\bar{E}$ и $\bar{H}$ экспоненциально убывают на бесконечности, из (3) для безграничного слоистого пространства получаем лемму Лоренца в виде:

$$\int_V (\bar{H}^2 \bar{j}_m^1 - \bar{H}^1 \bar{j}_m^2 + \bar{E}^2 \bar{j}_l^1 - \bar{E}^1 \bar{j}_l^2) dv = 0 \tag{4}$$

Используя лемму Лоренца (4), легко перейти от дифференциальной задачи электромагнитного зондирования (1) к системе интегральных уравнений. Для этого введем понятие нормальной (фоновой) среды и аномальной среды, а также нормального (первичного) и аномального поля.

В качестве нормальной (фоновой) среды возьмем слоистую среду с распределением электропроводности:

$$\sigma^N(M) = \begin{cases} \sigma(z) \ \text{при} \ z > 0 \\ \sigma_0 \ll \min \sigma(z) \ \text{при} \ z < 0 \end{cases} \tag{5}$$

а в качестве аномальной среды распределение электропроводности:

$$\sigma^a(M) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ \mathrm{M} \notin \mathrm{V} \\ \sigma(M) - \sigma(z) \quad \text{при} \ \mathrm{M} \in \mathrm{V} \end{cases} \tag{6}$$

В качестве первичного нормального поля возьмем поле, которое возникает в нормальной слоистой среде от плоской волны, нормально падающей на слоистое полупространство, и является решением уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} rot\bar{H}^N &= \sigma^N(z)\bar{E}^N \\ rot\bar{E}^N &= i\omega\mu\bar{H}^N \end{aligned} \tag{7}$$

При этом в неоднородности с аномальным распределением электропроводности (6) возникает аномальный (избыточный) ток

$$\bar{j}^a(M) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ \mathrm{M} \notin \mathrm{V} \\ (\sigma_H(M) - \sigma(z))\bar{E}(M) \quad \text{при} \ \mathrm{M} \in \mathrm{V} \end{cases} \tag{8}$$

Аномальный ток возбуждает вторичное (аномальное) поле $\bar{E}^a$, $\bar{H}^a$, которое является решением уравнений Максвелла.

$$\begin{aligned} rot\bar{H}^a &= \sigma(z)\bar{E}^a + \bar{j}^a(M) \\ rot\bar{E}^a &= i\omega\mu\bar{H}^a \end{aligned} \tag{9}$$

Для вывода интегрального уравнения для $\bar{E}^a$ вводится вспомогательное поле $\bar{E}^{(p)}(M), \bar{H}^{(p)}(M)$, которое является решением уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} rot\bar{H}^{(p)} &= \sigma(z)\bar{E}^{(p)} + \bar{p}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \\ rot\bar{E}^{(p)} &= i\omega\mu\bar{H}^{(p)} \end{aligned} \tag{10}$$

Вспомогательные поля представляют собой поля, возбуждаемые в слоистой среде электрическим диполем, расположенным в точке $(x_0, y_0, z_0 > 0)$ и направленного по вектору $\overline{p}$. Если в лемме Лоренца (4) взять

$\overline{j}_m^1 = \overline{j}_m^2 = 0$, $\quad j_l^1 = \overline{j}^a(M)$, $\quad \overline{j}_l^{(2)} = \overline{p}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$, $\quad \overline{E}^1 = \overline{E}^a$, $\overline{E}^2 = \overline{E}^{(p)}$,

получим

$$\int\limits_V \overline{E}^a(M)\overline{p}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)dv_m =$$

$$\int\limits_V \overline{E}^{(p)}(M, M_0)\overline{j}^a(M)dv_m$$

или
$$\overline{p}\overline{E}^a(M_0) = \int\limits_V \overline{E}^{(p)}(M, M_0)\overline{j}^a(M)dv_m \tag{11}$$

Взяв $\overline{p}^x = (1,0,0)$, $\overline{p}^y = (0,1,0)$, $\overline{p}^z = (0,0,1)$, получим

$$\overline{E}^a(M_0) = \int\limits_V \hat{G}(M, M_0)\overline{j}^a(M)dv_m \tag{12}$$

$$\hat{G}(M, M_0) = (\overline{E}^x(M, M_0), \overline{E}^y(M, M_0), \overline{E}^z(M, M_0)), \tag{13}$$

где $\overline{E}^q(M, M_0)$ – электрическое поле в слоистой среде от электрического единичного диполя, направленного по координате $q = (x, y, z)$. Функция $\hat{G}(M, M_0)$ - тензорная функция Грина для уравнений Максвелла в слоистой среде. Формула (12) позволяет определить аномальное электрическое поле во всем пространстве, если известен аномальный ток $\overline{j}^a(M)$ внутри области V.

Если к выражению (12) прибавить нормальное поле, получим интегральное уравнения для $\overline{E}(M_0)$:

$$\overline{E}(M_0) = \overline{E}^N(M_0) + \int\limits_V (\sigma_H(M) - \sigma(z))\hat{G}(M, M_0)\overline{E}(M)dv_M \tag{14}$$

которое дает возможность однозначно определить $\overline{E}(M)$, $M \in V$ и, соответственно, согласно (8), аномальный ток $\overline{j}^a(M) = (\sigma_H(M) - \sigma(z))\overline{E}(M)$. Таким образом прямая задача состоит в решении интегрального уравнения (14) при заданном $\sigma(z)$, а, следовательно, известных $\overline{E}^N(M_0)$, $\hat{G}(M, M_0)$, а так же при известном $\sigma_H(M)$ – проводимости неоднородной зоны. Зная $\overline{E}(M)$ при $M \in V$, согласно (12), можно определить $\overline{E}(M)$ во всем пространстве.

Обратная задача состоит в определении $\sigma_H(M), M \in V$, если известно поле при *z=0* как функция *(x,y)*: $\overline{E}$ *(x,y, z=0).*

3.Модель слоистого тела, переход к дискретной модели.

Для дальнейших исследований введем понятие слоистого тела. Разобьем тело на конечное число слоев по *z* одинаковой толщины *h*. Распределение электропроводности $\sigma_H(M)$ можно приблизить кусочно-постоянным по *z* и произвольным распределением вдоль *k*-го слоя $\sigma^{(k)}(x,y)$, т.е. при $M \in V$ имеем

$$\sigma_H(M) = \sigma_H^{(k)}(x,y) \text{ при } z \in [h_0 + (k-1)h, h_0 + kh], k \in [1,N] \tag{15}$$

где h_0 - глубина погружения верхней границы тела, *N*- число слоев.

Таким образом, множеством неоднородностей в обратной задаче является множество распределений электропроводности, описываемые функциям кусочно-постоянными по *z* и кусочно-непрерывными по *(x,y)*.

Это достаточно широкое множество распределений электропроводности, позволяющее описать практически любые трехмерные неоднородности. При дискретизации рассматриваемой задачи можно считать, что электрическое поле в слоях, на которые разбита неоднородная зона также не зависит от координаты *z*. Для этого должны выполняться условия тонного слоя, т.е.

$$\omega\mu \bullet \max \sigma_k h^2 \ll 1 \tag{16}$$

Если *h*-толщина слоев, на которые разбито тело, удовлетворяет условиям (16), то аномальный ток в слое, согласно (8), не зависит от *z*. В результате при $z \in [z_k, z_{k+1}]$, $k \in [1,N]$, $z_k = h_0 + (k-1)h$.

$$\bar{E}(x,y,z) = \bar{E}^{(k)}(x,y)$$

$$\bar{j}^a(x,y,z) = \bar{j}^{(k)}(x,y) = \left(\sigma_H^{(k)} - \sigma(z - z^{(k)})\right)\bar{E}^{(k)}(x,y),$$

где $z^{(k)} = 0{,}5(z_k + z_{k+1})$. Тогда интегральное уравнение (14) можно записать в виде системы интегральных уравнений относительно электрического поля в каждом слое

$$\bar{E}^{(m)}(x,y) - \bar{E}^N(z^{(m)}) = \sum_{k=1}^{N} \iint_{S_k} \hat{G}^{(km)}(x-x_0, y-y_0)\bar{j}^{(k)}(x_0,y_0)dx_0dy_0 \tag{17}$$

где S_k - сечение неоднородной зоны при $z = z^{(k)}$, а

$$\hat{G}^{(km)} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \hat{G}(x-x_0, y-y_0, z = z^{(m)}, z_0)dz_0 ,\ m \in [1,N],\ k \in [1,N] \tag{18}$$

Решив систему интегральных уравнений (17) и определив аномальный ток во всех слоях неоднородной зоны, согласно (12), легко определить электрическое поле во всем пространстве. Формула (12) для слоистой неоднородной зоны приобретает вид:

$$\bar{E}^a(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} \iint_{S_k} \hat{G}^{(k)}(x-x_0, y-y_0, z)\bar{j}^{ak}(x_0,y_0)dx_0dy_0 \tag{19}$$

где $$\hat{G}^{(k)} = \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \hat{G}(x - x_0, y - y_0, z, z_0) dz_0 \qquad (20)$$

Формула (20) определяет аномальное электрическое поле во всем пространстве по известному аномальному току в неоднородной зоне.

Таким образом, прямая задача для слоистого тела состоит в решении системы интегральных уравнений (17). Определив аномальный ток во всех слоях тела, можно рассчитать поле $\bar{E}(x, y, z)$ во всех точках пространства по (19). Обратная задача состоит в определении распределения проводимости в каждом слое неоднородной зоны по известному электрическому полю на плоскости *z=0*:

$$E_x^a(x, y, z = 0) = E_x^0(x, y)\,;\ E_y^a(x, y, z = 0) = E_y^0(x, y) \qquad (21)$$

Именно для этой обратной задачи будет доказана единственность решения. Условие обратной задачи получается, если в (21) подставить представление аномального электрического поля через аномальный ток (19). В результате имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{S_k} \hat{G}_0^{(k)}(x - x_0, y - y_0) \cdot \bar{j}^{ak}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \bar{E}^0(x, y) \qquad (22)$$

$$\hat{G}_0^{(k)} = \begin{pmatrix} E_x^x & E_x^y & E_x^z \\ E_y^x & E_y^y & E_y^z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \hat{G}(x - x_0, y - y_0, z = 0, z_0) dz_0 \qquad (23)$$

$$\bar{E}^0(x, y) = \left(E_x^0(x, y), E_y^0(x, y), 0 \right)$$

Представление поля $\bar{E}(M)$ (19) позволяет сделать следующее утверждение.

Лемма 1. При фиксированном нормальном распределении электропроводности $\sigma(z)$ разным $\sigma_H(M), M \in V$ соответствуют разные распределения аномального тока $\bar{j}^a(M)$ в теле $M \in V$.

Доказательство.

Доказательство следует из теоремы единственности решения прямой задачи электромагнитного зондирования. Из этой теоремы следует, что разным $\sigma_H(M), M \in V$ соответствуют разные электрические поля в пространстве. Так как нормальное электрическое поле неизменно в следствии фиксирования нормального (фонового) распределения электропроводности $\sigma(z)$ и источника поля, то разным $\sigma_H^{(k)}(M), M \in V$ соответствуют разные аномальные электрические поля $\bar{E}^a$, определенные во всем пространстве. Аномальные поля $\bar{E}^a$, согласно (17), определяются через аномальный ток. Следовательно, разным аномальным полям соответствуют разные аномальные токи. Окончательно, получаем, что разным распределениям $\sigma(M), M \in V$ соответствуют разные $\bar{j}^a(M), M \in V$. Лемма доказана.

Следует отметить, что при доказательстве леммы было использовано утверждение, что разным $\sigma_H(M), M \in V$ соответствуют разные поля $\bar{E}(m)$ во всем пространстве. Для доказательства теоремы единственности обратной задачи зондирование нам необходимо показать, что разным $\sigma_H(M), M \in V$ соответствуют разные поля $\bar{E}(M)$ в некоторой части пространства. В нашем случае это плоскость *z=0.*

Заметим, что интегральные уравнения (16) и представление поля $\bar{E}^a$ при *z=0* (18) являются интегралами свертки, поэтому для дальнейшего исследования обратной задачи удобно перейти к преобразованию Фурье.

4. Спектральные характеристики тензора Грина для слоистой среды.

Для определения тензора Грина уравнений Максвелла в слоистой среде необходимо определить электрическое поле $\bar{E}^p(x,y,z)$ для единичного диполя, расположенного в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ для произвольного направления диполя. Для простоты рассмотрим случай двух полупространств, когда

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0,\ z < 0 \\ \sigma_1,\ z > 0 \end{cases}.$$

Электрическое поле выражается через векторный потенциал $\bar{A}(x,y,z)$ в виде:

$$\bar{E} = i\omega\mu\bar{A} + grad\left(\frac{1}{\sigma(z)} d\omega\bar{A}\right). \tag{24}$$

Векторный потенциал является решением уравнения

$$\Delta\bar{A} + k^2(z)\bar{A} = -\bar{p}\sigma(x-x_0)\sigma(y-y_0)\sigma(z-z_0), \tag{25}$$

где $k^2 = i\omega\mu\sigma(z)$. На границе *z=0* выполняются условия непрерывности $A_x, A_y, A_z, \frac{\partial A_x}{\partial z}, \frac{\partial A_y}{\partial z}$ и $\frac{1}{\sigma} d\omega\bar{A}$. На бесконечности $\bar{A}$ убывает к нулю.

Применив преобразование Фурье по *x,y* , получим образы Фурье

$$\bar{e}(\lambda,\nu,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \bar{E}(x,y,z) e^{i\lambda(x-x_0)+i\nu(y-y_0)} dxdy, \tag{26}$$

$$\bar{a}(\lambda,\nu,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \bar{A}(x,y,z) e^{i\lambda(x-x_0)+i\nu(y-y_0)} dxdy. \tag{27}$$

Согласно (26), образ электрического поля выражается через образ векторного потенциала

$$e_x = i\omega\mu a_x + i\lambda\left(\frac{1}{\sigma(z)}(i\lambda a_x + i\nu a_y + a_z'(z))\right)$$

$$e_y = i\omega\mu a_y + i\nu\left(\frac{1}{\sigma(z)}(i\lambda a_x + i\nu a_y + a_z'(z))\right) \qquad (28)$$

$$e_x = i\omega\mu a_z + \left(\frac{1}{\sigma(z)}(i\lambda a_x(z) + i\nu a_y(z) + a_z'(z))\right)'$$

Уравнение для образа Фурье векторного потенциала, согласно (27), имеет вид

$$\frac{d\bar{a}}{dz^2} - (\eta^2 - k^2(z))\bar{a} = -\bar{p}\sigma(z - z_0),\ \eta^2 = \lambda^2 + \nu^2\ . \qquad (29)$$

При $z=0$ непрерывны $a_x, a_y, a_z, a_x', a_y', \frac{1}{\sigma}(i\lambda a_x + i\nu a_y + a_z')$.

При $|z| \to \infty, \bar{a} \to 0.$

Рассмотрим поля для единичных диполей.

1. Случай горизонтального диполя по оси ОХ $\bar{p} = (1,0,0)$

$$a_x = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta_1 + \eta_0} e^{\eta_0 z - \eta_1 z_0} \text{ при } z < 0, z_0 > 0, \eta_0 = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2 - k_0^2}, \eta_1 = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2 - k_1^2} \\ \dfrac{1}{2\eta_1}\left(e^{-\eta_1|z - z_0|} + \dfrac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} e^{-\eta_1(z + z_0)}\right) \text{при } z > 0, z_0 > 0, \end{cases}$$

$$a_z = \frac{i\lambda(\sigma_1 - \sigma_0)e^{-\eta_1 z_0}}{(\eta_1 + \eta_0)(\eta_0\sigma_1 + \eta_1\sigma_0)}\begin{cases} e^{\eta_0 z}, z < 0 \\ e^{-\eta_1 z}, z > 0 \end{cases}$$

Тогда электрические поля равны

$$e_x^x = \frac{k_1 - \lambda^2}{2\sigma_1\eta_1}\left(e^{-\eta_1|z - z_0|} + \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} e^{-\eta_1(z + z_0)}\right) + \frac{\lambda^2(\sigma_0 - \sigma_1)\eta_1}{\sigma_1(\eta_1 + \eta_0)(\sigma_1\eta_0 + \sigma_0\eta_1)} e^{-\eta_1(z + z_0)}$$

$$e_y^x = -\frac{\lambda\nu}{2\sigma_1\eta_1}\left(e^{-\eta_1|z - z_0|} + \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} e^{-\eta_1(z + z_0)}\right) + \frac{\lambda\nu(\sigma_0 - \sigma_1)\eta_1}{\sigma_1(\eta_1 + \eta_0)(\sigma_1\eta_0 + \sigma_0\eta_1)} e^{-\eta_1(z + z_0)}$$

$$e_z^x = -\frac{i\lambda}{2\sigma_1}\left(\frac{z - z_0}{|z - z_0|} e^{-\eta_1|z - z_0|} + \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} e^{-\eta_1(z + z_0)}\right) + \frac{i\lambda\eta^2(\sigma_0 - \sigma_1)}{\sigma_1(\eta_1 + \eta_0)(\sigma_1\eta_0 + \sigma_0\eta_1)} e^{-\eta_1(z + z_0)}$$

Кроме полей при $z>0$ нам, необходимо задать поля при $z=-0$, которые входят в условие обратной задачи.

$$e_x^x(z = 0) = \left(\frac{k_1^2}{\sigma_1(\eta_1 + \eta_0)} - \frac{\lambda^2}{\sigma_1\eta_0 + \sigma_0\eta_1}\right) e^{-\eta_1 z_0}$$

$$e_y^x(z=0) = -\frac{\lambda\nu}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1}e^{-\eta_1 z_0}$$

$$e_z^x(z=+0) = \frac{\sigma_0 i\lambda(k_1^2+\eta_0\eta_1+\eta^2)}{\sigma_1(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1 z_0}$$

$$e_z^x(z=-0) = \frac{i\lambda(k_1^2+\eta_0\eta_1+\eta^2)}{(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1 z_0}$$

2. Случай горизонтального диполя по оси OY $\overline{p}=(0,1,0)$.

В этом случае векторный потенциал

$$a_x = 0$$

$$a_y = \frac{1}{2\eta_1}\left(e^{-\eta_1|z-z_0|}+\frac{\eta_1-\eta_0}{\eta_1+\eta_0}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right) \text{ при } z>0$$

$$a_z = \frac{i\nu(\sigma_1-\sigma_0)}{(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1(z+z_0)} \text{ при } z>0$$

Откуда получаем образы Фурье электрического поля

$$e_x^y = -\frac{\lambda\nu}{2\sigma_1\eta_1}\left(e^{-\eta_1|z-z_0|}+\frac{\eta_1-\eta_0}{\eta_1+\eta_0}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right)+\frac{\lambda\nu(\sigma_0-\sigma_1)\eta_1}{\sigma_1(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1(z+z_0)}$$

$$e_y^y = \frac{k_1-\nu^2}{2\sigma_1\eta_1}\left(e^{-\eta_1|z-z_0|}+\frac{\eta_1-\eta_0}{\eta_1+\eta_0}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right)+\frac{\nu^2(\sigma_0-\sigma_1)\eta_1}{\sigma_1(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1(z+z_0)}$$

$$e_z^y = -\frac{i\nu}{2\sigma_1}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta_1|z-z_0|}+\frac{\eta_1-\eta_0}{\eta_1+\eta_0}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right)+\frac{i\lambda\eta^2(\sigma_0-\sigma_1)}{\sigma_1(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1(z+z_0)}$$

Соответственно, получаем поля при $z=0$.

$$e_y^x(z=0) = -\frac{\lambda\nu}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1}e^{-\eta_1 z_0}$$

$$e_y^y(z=0) = \left(\frac{k_1^2}{\sigma_1(\eta_1+\eta_0)}-\frac{\nu^2}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1}\right)e^{-\eta_1 z_0}$$

$$e_z^y(z=+0) = \frac{\sigma_0 i\nu(k_1^2+\eta_0\eta_1+\eta^2)}{\sigma_1(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1 z_0}$$

$$e_z^x(z=-0) = \frac{i\nu(k_1^2+\eta_0\eta_1+\eta^2)}{(\eta_1+\eta_0)(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1 z_0}$$

Случай вертикального диполя $\overline{p}=(0,0,1)$.

$$a_x=0,\ a_y=0,\ a_z=\frac{1}{2\eta_1}\left(e^{-\eta_1|z-z_0|}-\frac{\sigma_1\eta_0-\sigma_0\eta_1}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right) \text{ при } z>0.$$

Тогда электрические поля при $z\geq 0$ равны

$$e_x^z = -\frac{i\lambda}{2\sigma_1}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta_1|z-z_0|} - \frac{\sigma_1\eta_0-\sigma_0\eta_1}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right)$$

$$e_y^z = -\frac{i\nu}{2\sigma_1}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta_1|z-z_0|} - \frac{\sigma_1\eta_0-\sigma_0\eta_1}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right)$$

$$e_z^z = -\frac{i\nu}{2\sigma_1}\left(e^{-\eta_1|z-z_0|} - \frac{\sigma_1\eta_0-\sigma_0\eta_1}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1(z+z_0)}\right)$$

Соответственно, при $z=0$ имеем

$$e_x^z = \frac{i\lambda\eta_0}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1}e^{-\eta_1 z_0},\; e_y^z = \frac{i\nu\eta_0}{\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1}e^{-\eta_1 z_0},\; e_z^z = \frac{\sigma_0\eta^2}{\sigma_1(\sigma_1\eta_0+\sigma_0\eta_1)}e^{-\eta_1 z_0}.$$

5. Асимптотика представления Фурье тензора Грина при больших значениях спектральных параметров.

В дальнейшем нам потребуется знание поведения полей $\overline{e}^x, \overline{e}^y, \overline{e}^z$ при больших значениях спектральных параметров λ, ν. При $\lambda \to \infty, \nu \to \infty$ имеем: $\eta_0 \to \eta = \sqrt{\lambda^2+\nu^2}, \eta_1 \to \eta$. Используя выражения для электрических полей при $z \ge 0$, полученные в предыдущем пункте, найдем:

$$e_x^x = -\frac{\lambda^2}{2\sigma_1\eta}\left(e^{-\eta|z-z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)})\right),$$

$$e_y^x = -\frac{\lambda\nu}{2\sigma_1\eta}\left(e^{-\eta|z-z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)})\right),$$

$$e_z^x = -\frac{i\lambda}{2\sigma_1}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta|z-z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)})\right),$$

$$e_x^y = -\frac{\lambda\nu}{2\sigma_1\eta}\left(e^{-\eta|z-z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)})\right),$$

$$e_y^y = -\frac{\nu^2}{2\sigma_1\eta}\left(e^{-\eta|z-z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)})\right),$$

$$e_z^y = -\frac{i\nu}{2\sigma_1}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta|z-z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)})\right),$$

$$e_x^z = -\frac{i\lambda}{2\sigma_1}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta|z-z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)})\right),$$

$$e_y^z = -\frac{i\nu}{2\sigma_1}\left(\frac{z - z_0}{|z - z_0|} e^{-\eta|z - z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)}) \right),$$

$$e_z^z = \frac{\eta}{2\sigma_1}\left(e^{-\eta|z - z_0|} + \mathrm{O}(e^{-\eta(z+z_0)}) \right)$$

Из полученных асимптотик следует, что образ Фурье тензора Грина при $\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \to \infty$ стремится к образу Фурье тензора Грина для однородного пространства. При $z=0$ имеем асимптотику образов Фурье электрических полей в виде

$$e_x^x = \frac{\lambda^2}{\eta}\mathrm{O}(e^{-\eta z_0}); e_x^y = \frac{\lambda\nu}{\eta}\mathrm{O}(e^{-\eta z_0}); e_x^z = \lambda\mathrm{O}(e^{-\eta z_0});$$

$$e_y^x = \frac{\lambda\nu}{\eta}\mathrm{O}(e^{-\eta z_0}); e_y^y = \frac{\nu^2}{\eta}\mathrm{O}(e^{-\eta z_0}); e_y^z = \lambda\mathrm{O}(e^{-\eta z_0});$$

6. Исследование решения интегрального уравнения.

Система интегральных уравнений для электрического поля в слоях неоднородности (17) является системой интегральных операторов типа свертки. Применим к этой системе двойное преобразование Фурье. Считая $\bar{E}^{am} = \bar{E}^{(m)}(x,y) - E^N(z^{(m)}) = 0$ вне тела, получим преобразование Фурье для аномального электрического поля

$$\bar{e}^{\alpha m}(\lambda,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}^{\alpha m}(x,y) e^{i\lambda x + i\nu y} dxdy \tag{32}$$

Интегральное уравнение (17)перейдет в уравнение для образов Фурье

$$\bar{e}^{\alpha m}(\lambda,\nu) = \sum_{k=1}^{N} \hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu) \bullet \bar{I}^{(k)}(\lambda,\nu),\ m \in [1,N] \tag{33}$$

где
$$\sum_{k=1}^{N} \hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{G}^{(k,m)}(x - x_0, y - y_0) e^{i\lambda x + i\nu y} dxdy \tag{34}$$

Функция $\hat{G}^{(k,m)}$ определена формулой (18) через тензор Грина. Образ Фурье для аномального тока $\bar{I}^{(k)}(\lambda,\nu)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{I}^{(k)}(\lambda,\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int (\sigma_H^{(k)}(x,y) - \sigma(z^{(k)}))(\bar{E}^{ak}(x,y) + \bar{E}^N(z^k)) e^{i\lambda x + i\nu y} dxdy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int (\sigma_H^{(k)}(x,y) - \sigma(z^{(k)}) \bar{E}^{ak}(x,y) e^{i\lambda x + i\nu y} dxdy + \gamma_k(\lambda,\nu) \bar{E}^N(z^{(k)}),\end{aligned} \tag{35}$$

где
$$\gamma_k(\lambda,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_H^{(k)}(x,y) - \sigma(z^{(k)}) e^{i\lambda x + i\nu y} dxdy \text{ -} \tag{36}$$

образ Фурье от нормальной проводимости в *k*-ом слое.

Выражение (33) связывает образ Фурье электрического поля в k-ом слое неоднородности с образами аномальных токов во всех слоях неоднородности. Матрицей связи является образ Фурье функции Грина для уравнения Максвелла. Для того, чтобы перейти к интегральному уравнению, преобразуем выражение (35), используя теорему об образе Фурье для произведения функций, согласно которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)V(\xi-\omega)d\xi,$$

где $U(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{i\omega t}dt, V(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{i\omega t}dt$.

Тогда получим из (34)-(35):

$$\overline{I}^{(k)}(\lambda,\nu)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_k(\lambda_0-\lambda,\nu_0-\nu)e^{ak}(\lambda_0,\nu_0)d\lambda_0 d\nu_0+\gamma_k(\lambda,\nu)\overline{E}^N(z^{(\omega)}) \quad (37)$$

Подставив (37) в (33), получим систему интегральных уравнений относительно образов Фурье электрически полей в слоях неоднородности $\overline{e}^{ax}(\lambda,\nu),\ k\in[1,N]$

Рассмотрим асимптотику $\overline{e}^{ax}(\lambda,\nu)$ при больших значениях спектральных параметров λ,ν. Для этого рассмотрим асимптотику $\hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu)$, входящую в (33). Подставив (18) в (34), получим:

$$\hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu)=\int_{z_k}^{z_{k+1}}\int\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)e^{i\lambda x+i\nu y}dxdy.$$

Учитывая (13), найдем

$$\hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu)=\int_{z_k}^{z_{k+1}}\hat{e}(\lambda,\nu,z^{(m)},z_0)dz_0,\ \text{где}\ \hat{e}(\lambda,\nu,z^{(m)},z_0)=(\overline{e}^x,\overline{e}^y,\overline{e}^z) \quad (38)$$

При $\lambda,\nu\to\infty$ $\hat{e}(\lambda,\nu,z^{(m)},z_0)$ определяется формулами (30)при $z=z^{(m)}$. Подставив 30 в (38) и положив $z=z^{(m)}$, получаем после интегрирования по z_0 асимптотику для $\hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu)$:

при $m=k$

$$\hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu)=\frac{-1}{\sigma_1}\begin{pmatrix}\frac{\lambda^2}{\eta^2} & \frac{\lambda\nu}{\eta^2} & 0\\ \frac{\lambda\nu}{\eta^2} & \frac{\nu^2}{\eta^2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}+\hat{I}\bullet\mathrm{O}(e^{-\frac{\eta h}{2}}) \quad (40)$$

при $|m-k|\geq 1$

$$\hat{g}^{(k,m)}(\lambda,\nu)=\hat{I}\bullet\mathrm{O}(e^{-\eta(|m-k|+0.5)h}),$$

где $\hat{I}$ -единичный тензор.

Полученные асимптотики показывают, что при больших спектральных параметрах λ,ν система интегральных уравнений разбивается на N отдельных уравнений для каждого слоя $k\in[1,N]$. В каждом слое, согласно (33), имеем интегральное соотношение

$$\overline{e}^{ak}(\lambda,\nu)=\hat{g}(\lambda,\nu)\bullet\hat{I}^{(k)}(\lambda,\nu),k\in[1,x], \tag{41}$$

где $\hat{I}^{(k)}(\lambda,\nu)$ определяется формулой (37).

Запишем (41) покомпонентно:

$$\begin{cases} e_x^{ak}(\lambda,\nu)=-\dfrac{\lambda}{\sigma_1\eta^2}\left(\lambda\hat{I}_x^{(k)}+\nu\hat{I}_y^{(k)}\right), \\ e_y^{ak}(\lambda,\nu)=-\dfrac{\nu}{\sigma_1\eta^2}\left(\lambda\hat{I}_x^{(k)}+\nu\hat{I}_y^{(k)}\right), \\ e_z^{ak}(\lambda,\nu)=\dfrac{\lambda}{\sigma_1}\bullet\hat{I}_z^{(k)}(\lambda,\nu). \end{cases} \tag{42}$$

Подставив $\hat{I}^{(k)}(\lambda,\nu)$ из (37)в (41), получим интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} &e_x^{ak}(\lambda,\nu)+\frac{\lambda^2}{2\pi\sigma_1\eta^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_k(\lambda_0-\lambda,\nu_0-\nu)e_x^{ak}(\lambda_0,\nu_0)d\lambda_0 d\nu_0+ \\ &+\frac{\lambda\nu}{2\pi\sigma_1\eta^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_k(\lambda_0-\lambda,\nu_0-\nu)e_y^{ak}(\lambda_0,\nu_0)d\lambda_0 d\nu_0= \\ &=-\frac{\lambda^2}{\sigma_1\eta^2}\gamma_k(\lambda,\nu)E_x^N(z^{(\omega)}) \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &e_y^{ak}(\lambda,\nu)+\frac{\lambda\nu}{2\pi\sigma_1\eta^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_k(\lambda_0-\lambda,\nu_0-\nu)e_x^{ak}(\lambda_0,\nu_0)d\lambda_0 d\nu_0+ \\ &+\frac{\nu^2}{2\pi\sigma_1\eta^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_k(\lambda_0-\lambda,\nu_0-\nu)e_y^{ak}(\lambda_0,\nu_0)d\lambda_0 d\nu_0=0 \end{aligned} \tag{44}$$

$$e_z^{ak}(\lambda,\nu)-\frac{1}{2\sigma_1\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_k(\lambda_0-\lambda,\nu_0-\nu)e_z^{ak}(\lambda_0,\nu_0)d\lambda_0 d\nu_0=0 \tag{45}$$

Эти уравнения определяют асимптотики $\overline{e}^{ak}(\lambda,\nu)$ при $\lambda\to\infty$ и $\nu\to\infty$. Из уравнения (45) следует, что $\overline{e}^{ak}(\lambda,\nu)\to 0$ при $\sqrt{\lambda^2+\nu^2}\to\infty$.

Из уравнений (43)-(44) видно, что асимптотики e_x^{ak} и e_y^{ak} пропорциональны $E_x^N(z^{(\omega)})$, которое равно полю плоской волны в однородном полупространстве

$$E_x^N(z^{(\omega)}) = E_x^N(z=0)\bullet e^{ik_1 z^{(k)}} \quad . \tag{46}$$

Из уравнений (43)-(44) следует, что асимптотики $e_x^{ak} / E_x^N(z^{(k)})$ и $e_y^{ak} / E^N(z^{(k)})$ имеют один и тот же порядок по λ и ν.

7. Исследование обратной задачи.

Рассмотрим условие обратной задачи (22). Оно представлено интегралом типа свертки. Применив к этому условию преобразование Фурье, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \hat{g}(\lambda,\nu)\bullet\hat{I}^{(k)}(\lambda,\nu) = \overline{e}^0(\lambda,\nu), \tag{47}$$

где $\overline{e}^0 = (e_x^0(\lambda,\nu,z=0), e_y^0(\lambda,\nu,z=0), 0)$ - образ Фурье тангенциальной составляющей аномального электрического поля при $z=0$,
$\overline{I}^{(k)}(\lambda,\nu) = (I_x^{(k)}(\lambda,\nu), I_y^{(k)}(\lambda,\nu), I_z^{(k)}(\lambda,\nu))$ - образ Фурье аномального тока в *k*-ом слое неоднородности, $\hat{g}(\lambda,\nu)$ - образ Фурье тензора Грина при $z=0, z_0 = z^{(k)}$. Полученные соотношения позволяют доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Разным распределениям аномальных токов $\overline{j}^{ak}(x,y)$ в неоднородности следуют разные электрические поля $E^0(x,y)$ при $z=0$.

Доказательство.

Достаточно доказать, что разным образам Фурье аномальных токов $\overline{I}^{(k)}(\lambda,\nu)$ соответствуют разные образы Фурье электрических полей $\overline{e}^0(\lambda,\nu)$ при $z=0$.

Для этого рассмотрим соотношение (47) между образами Фурье аномального тока $\overline{I}^{(k)}(\lambda,\nu)$ в *k*-слое и электрического поля $\overline{e}^0(\lambda,\nu)$ при $z=0$. Учитывая, что
при $z=0$

$$\hat{g}^{(k)}(\lambda,\nu) = \begin{pmatrix} e_x^x & e_x^y & e_x^z \\ e_y^x & e_y^y & e_y^z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим из (47):

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N} (e_x^x I_x^{(k)} + e_x^y I_y^{(k)} + e_x^z I_z^{(k)}) = e_x^0(\lambda,\nu) \\ &\sum_{k=1}^{N} (e_y^x I_x^{(k)} + e_y^y I_y^{(k)} + e_y^z I_z^{(k)}) = e_y^0(\lambda,\nu) \end{aligned} \tag{48}$$

Покажем, что при больших спектральных параметрах λ,ν разным $I^{(k)}(\lambda,\nu)$ соответствуют разные $\overline{e}^{0}(\lambda,\nu)$. Для этого подставим в (48) асимптотику $\overline{e}^{p}$, $p=(x,y,z)$, определенную в (31). В результате, получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\lambda^2}{\eta}I_x^{(k)}(\lambda,\nu)+\frac{\lambda\nu}{\eta}I_y^{(k)}(\lambda,\nu)\right)\mathrm{O}(e^{-\eta z^{(k)}})=e_x^0(\lambda,\nu)\\
&\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\lambda\nu}{\eta}I_x^{(k)}(\lambda,\nu)+\frac{\nu^2}{\eta}I_y^{(k)}(\lambda,\nu)\right)\mathrm{O}(e^{-\eta z^{(k)}})=e_y^0(\lambda,\nu)
\end{aligned}\tag{49}$$

где $z^{(k)}=h_0+(k-0.5)h, k\in[1,N]$. Пусть аномальные токи при $k\in[1,k^*-1]$ не изменились, а изменились при $k\in[z^*,N]$.

Тогда, согласно (49), имеем изменение полей при $z=0$ равными:

$$\begin{aligned}
&e^{-\eta z^*}\sigma e_x^0(\lambda,\nu)=\sum_{k=k^*}^{N}\left(\frac{\lambda^2}{\eta}\sigma I_x^{(k)}(\lambda,\nu)+\frac{\lambda\nu}{\eta}\sigma I_y^{(k)}(\lambda,\nu)\right)\mathrm{O}(e^{-\eta(k-k^*)h})\\
&e^{-\eta z^*}\sigma e_y^0(\lambda,\nu)=\sum_{k=k^*}^{N}\left(\frac{\lambda\nu}{\eta}\sigma I_x^{(k)}(\lambda,\nu)+\frac{\nu^2}{\eta}\sigma I_y^{(k)}(\lambda,\nu)\right)\mathrm{O}(e^{-\eta(k-k^*)h})
\end{aligned}.$$

Следовательно, при больших λ,ν можно пренебречь всеми членами суммы по сравнению с членом при $k=k^*$

$$\begin{aligned}
&e^{-\eta z^*}\sigma e_x^0(\lambda,\nu)=\frac{\lambda^2}{\eta}\sigma I_x^{(k^*)}(\lambda,\nu)+\frac{\lambda\nu}{\eta}\sigma I_y^{(k^*)}(\lambda,\nu)\\
&e^{-\eta z^*}\sigma e_y^0(\lambda,\nu)=\frac{\lambda\nu}{\eta}\sigma I_x^{(k^*)}(\lambda,\nu)+\frac{\nu^2}{\eta}\sigma I_y^{(k^*)}(\lambda,\nu)
\end{aligned}.$$

Легко видеть, что при $\lambda\gg\nu$ основной вклад в σe_x^0 дает $\sigma I_x^{(k^*)}$, а в σe_y^0 дает $\sigma I_y^{(k^*)}$. Таким образом, разным I_x и I_y соответствуют разные $e_x^0(\lambda,\nu)$ и $e_y^0(\lambda,\nu)$. Лемма доказана.

Доказательство лемм 1 и 2 позволяют доказать теорему о единственности решения обратной задачи электромагнитного зондирования.

Теорема. Решение обратной задачи электромагнитного зондирования локального слоистого тела, расположенного в проводящем полупространстве при возбуждении плоской волной, нормально падающей на полупространство, единственно.

Доказательство. Согласно Лемме 1 разным распределениям электропроводности в слоистом теле соответствуют разные аномальные токи, возникающие в слоистом теле, а, согласно Лемме 2, разным распределениям аномальных токов в теле соответствуют разные электрические поля $E_x(x,y)$ и $E_y(x,y)$ на плоскости $z=0$. Следовательно, разным распределениям электропроводности отвечают разные поля

$E_x(x,y)$ и $E_y(x,y)$ при $z=0$. Это означает, что заданным распределениям $E_x(x,y)$ и $E_y(x,y)$ при $z=0$ соответствует единственное распределение электропроводности в слоистом теле. Теорема доказана.

Заключение

В результате получено утверждение, что в слоистой проводящей неоднородной зоне, расположенной в проводящем полупространстве, единственным образом определяется распределение электропроводности по известным тангенциальным компонентам электрического поля на плоскости $z=0$. Полученный результат может быть перенесен на случай, когда неоднородная зона находится в одном слое слоистого полупространства.

Литература.

1. *Тихонов А.Н.* О единственности решения задач электроразведки ДАН 1949, т69, №6 с.797-800.
2. *Тихонов А.Н.* К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. ЖВМиМФ 19 №5,т5, №3 с 545-547.
3. *Дмитриев В.И.* О единственности обратной задачи электромагнитного зондирования слоистых сред. Известия РАН, Физика Земли, 1994, №6, с 30-34.
4. *Гусаров А.Л.* К вопросу о единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред // Математические модели задач геофизики. М.. Изд. МГУ 1981, с. 31-60
5. *Дмитриев В.И.* О двумерной обратной задаче магнитотеллурического зондирования неоднородной среды // Прикладная математика и информатика. №56, М., Изд-во факультета ВМК МГУ, 2017.