

Г.П. Васильев, В.А. Личман, Н.В. Песков, Н.Л. Семендяева

УЧЁТ ПРОЦЕССОВ ЗАМЕРЗАНИЯ/ТАЯНИЯ ПОРОВОЙ ВЛАГИ В ГРУНТЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ТЕРМОСКВАЖИН*

1. Введение

В настоящее время во многих странах мира пристальное внимание уделяется использованию в народном хозяйстве возобновляемых источников экологически чистой энергии. Таким источником является, например, внутреннее тепло Земли, которое можно извлекать с помощью геотермальных теплонасосных систем теплоснабжения (ГТСТ). Одним из основных элементов ГТСТ является грунтовый теплообменник, который состоит из труб, размещённых в грунте на такой глубине, где температура грунта практически постоянна в течение года. По трубам прокачивается жидкость-теплоноситель, температура которой ниже температуры грунта, так что при движении по трубам жидкость нагревается. Отобранное из грунта тепло затем используется, например, для отопления зданий.

ГТСТ широко применяются в регионах с умеренным климатом (Северная Америка, Европа и Китай [1]) для отопления жилых и промышленных зданий. Для этих регионов характерны достаточно высокие естественные температуры грунта и непродолжительные отопительные сезоны, что делает возможным извлечение необходимого количества тепловой энергии из грунта при его положительных температурах. Для большинства регионов России, напротив, характерны низкие естественные температуры грунта и продолжительный отопительный период. В таких условиях эксплуатация ГТСТ при положительных температурах извлекаемого из грунта низкопотенциального тепла экономически неэффективна. Многолетняя эксплуатация ГТСТ в почвенно-климатических условиях большинства регионов РФ практически всегда связана с замораживанием/оттаиванием грунта, окружающего термоскважины [2].

Отражение этих процессов в математических моделях таких сложных капиллярно-пористых структур, как грунт, представляет собой чрезвычайно сложную задачу. В теплофизике подобные задачи известны как задачи Стефана [3-5]. Строго говоря, при моделировании теплового режима грунтового массива кроме учёта механизмов осуществления в сис-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России и имеет уникальный идентификатор RFMEFI57914X0026.

теме процессов тепломассопереноса необходимо принимать в расчёт химико-минералогическую природу грунтового скелета, механическую структуру материала твёрдых частиц, степень дисперсности среды, форму и размер частиц и пор, а также другие физико-химические параметры. Детальный учёт перечисленных факторов при построении математической модели представляет собой весьма серьёзную проблему и, зачастую, при помощи современного математического аппарата практически невозможен.

На практике, однако, при моделировании тепловых процессов в грунтовом массиве оказывается возможным с достаточной степенью точности описать эти процессы обычным уравнением теплопроводности, в котором *характеристики тепломассопереноса являются "эффективными"*.

Изучение существующих моделей процессов теплопередачи в системе грунт-термоскважина [6,7] показало практическое отсутствие общепризнанных алгоритмов решения этой задачи и учёта в моделях процессов фазовых превращений поровой влаги в грунте. В капиллярно-пористых системах, каковой является грунтовый массив системы теплосбора, наличие влаги в поровом пространстве оказывает заметное влияние на процесс распространения тепла. Корректный учёт этого влияния на сегодняшний день сопряжён со значительными трудностями, которые, прежде всего, связаны с отсутствием чётких представлений о характере распределения твёрдой, жидкой и газообразной фаз влаги в той или иной структуре системы. До сих пор не выяснена природа сил связи влаги с частицами грунтового скелета, зависимость форм связи влаги с материалом на различных стадиях увлажнения, механизм перемещения влаги в поровом пространстве. Недостаточность наших представлений в этой области подтверждается многочисленными классификациями форм влаги, предлагаемыми в последние годы различными исследователями (рыхлосвязанная вода, молекулярная вода, жёсткосвязанная вода и т.д.). Однако использование при построении математических моделей "эффективных" характеристик тепломассопереноса позволяет учитывать влияние влажности грунтового массива на протекающие в нём тепловые процессы с достаточной для практических целей степенью точности.

В простейшем случае тепломассоперенос в грунте в окрестности термоскважины моделируется с помощью начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в цилиндре достаточно большого радиуса R_∞ , ось которого совпадает с осью термоскважины:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q(r, T), \quad 0 < r < R_\infty, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$T(r, t)|_{r=R_\infty} = T_g, \quad T(r, t)|_{t=0} = T_g.$$

Здесь c, ρ, λ - теплоёмкость, плотность и коэффициент теплопроводности грунта, функция Q описывает влияние теплосборника на температуру грунта $T(r, t)$, T_g - естественная температура грунта. Отметим, что функция Q обычно линейна по температуре.

Для численного решения линейной задачи (1) разработано множество прикладных программ, которые используются для инженерных расчётов при проектировании ГТСТ. На практике для выбора оптимального варианта ГТСТ необходимо проведение большого количества расчётов, поэтому нужен быстрый алгоритм решения задачи (1). В группе компаний "Инсолар" разработана оригинальная программа для оптимизации параметров ГТСТ, в которой задача (1) решается с помощью разложения в ряд по собственным функциям однородной краевой задачи. При отрицательных температурах учёт скрытой теплоты фазового перехода делает задачу (1) нелинейной и непосредственное применение выбранного способа решения становится невозможным. Однако для проектирования ГТСТ важна лишь величина потока тепла между теплосборником и грунтом, а не реальное распределение температуры в грунте. Для оценки потока тепла нелинейную задачу Стефана можно заменить линейной задачей (1) с "исправленным" значением коэффициента теплопроводности. Основная цель данной работы состоит в описании предлагаемого нами алгоритма определения "исправленного" значения коэффициента теплопроводности для учёта скрытой теплоты фазовых переходов в поровой влаге при проектировании ГТСТ.

"Исправление" коэффициента теплопроводности грунта состоит в следующем. При положительных значениях температур грунта T_b у стенки термоскважины решается линейная задача (1) с номинальным значением коэффициента теплопроводности λ_g . При отрицательных значениях $T_b < 0$ номинальное значение λ_g заменяется "эффективным" значением $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_g + \lambda_{\text{pt}}(T_b)$, где λ_{pt} учитывает скрытую теплоту фазового перехода, выделяющуюся при замораживании грунтовой влаги. В случае замораживания $\lambda_{\text{pt}} > 0$, следовательно, тепловой поток увеличивается, в то время как в случае размораживания $\lambda_{\text{pt}} < 0$ и тепловой поток уменьшается. При подстановке λ_{eff} в (1) задача становится нелинейной, однако она может быть решена методом итераций с использованием той же программы, что и для решения линейной задачи.

Для оценки количества скрытого тепла, выделенного или поглощённого во время данного периода, и определения значения λ_{pt} нужно знать изменение объёма зоны промерзания, происходящего за этот период. Для этого в разделе 2 мы предлагаем два простых уравнения для ап-

проксимации радиуса цилиндрической зоны замерзания вокруг термоскважины. В разделе 3 описан алгоритм определения λ_{eff} , и, наконец, в разделе 4 представлены результаты вычислительного эксперимента.

2. Оценка радиуса зоны замерзания поровой влаги в грунте

Рассмотрим тепловой режим термоскважины радиуса R_b , расположенной вдоль оси цилиндрической области грунта радиуса R_d . Предположим, что температура стенки термоскважины T_b (при $r = R_b$) остаётся неизменной, и температура грунта t_g вне цилиндрической области (при $r > R_d$) также постоянна, при этом $T_b < t_0$ и $t_g > t_0$, где t_0 - температура замерзания влаги. В таких условиях грунтовая влага вокруг термоскважины начнёт замерзать в зоне $R_f(\tau)$ радиуса промёрзшего грунта, увеличивающегося с течением времени τ .

Чтобы получить уравнение изменения R_f , представим количество тепла $Q(\tau)$, поступающего в термоскважину на единицу длины в течение времени τ , в виде:

$$Q(\tau) = Q_g(\tau) + Q_{\text{pt}}(\tau), \quad (2)$$

где Q_g обозначает теплоту, полученную из грунта, и Q_{pt} - скрытую теплоту фазового перехода. Для оценки Q и Q_g мы используем формулу для постоянного теплового потока $q(r)$ через окружность радиуса r в плоском кольце $r_1 < r < r_2$ с коэффициентом теплопроводности λ при постоянных граничных температурах t_1 на радиусе r_1 и t_2 на радиусе r_2 :

$$q(r) = -2\pi \frac{\lambda(t_2 - t_1)}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (3)$$

Скрытая теплота замерзания воды и таяния льда может быть выражена как

$$Q_f(\tau) = \omega\pi(R_f^2(\tau) - R_b^2)\rho_w q_L, \quad Q_t(\tau) = \omega\pi(R_f^2(\tau) - R_b^2)\rho_i q_L,$$

где ω - объёмная концентрация влаги в грунте, ρ_w (ρ_i) - плотность воды (льда), и q_L - скрытая теплота замерзания воды (таяния льда).

Таким образом, пренебрегая для простоты различием в тепловых особенностях свободной воды и поровой влаги, можно переписать уравнение (2) для случая замораживания в виде:

$$2\pi k \int_0^\tau \frac{\lambda_g(t_0 - T_b)}{\ln(R_f(v)/R_b)} dv = 2\pi k \int_0^\tau \frac{\lambda_g(t_g - t_0)}{\ln(R_d/R_f(v))} dv + \omega\pi(R_f^2(\tau) - R_b^2)\rho_w q_L.$$

Дифференцируя это равенство по τ , получаем дифференциальное уравнение:

$$\omega\rho_w q_L \pi R_f(\tau) \frac{dR_f(\tau)}{d\tau} = k \left[\frac{\lambda_g (t_0 - T_b)}{\ln(R_f(\tau)/R_b)} - \frac{\lambda_g (t_g - t_0)}{\ln(R_d/R_f(\tau))} \right] \quad (4)$$

с начальным условием $R_f(0) = R_b$. Коэффициент k в (4) является коэффициентом соответствия, который может быть оценён через сравнение решения (4) и численного решения задачи Стефана, полученного при тех же условиях.

Если $R_d \gg R_b$, то второе слагаемое в правой части (4) может быть опущено, и уравнение примет вид:

$$\omega\rho_w q_L \pi R_f(\tau) \frac{dR_f(\tau)}{d\tau} = k \frac{\lambda_g (t_0 - T_b)}{\ln(R_f(\tau)/R_b)}. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) может быть написано в неявной форме:

$$\left(\frac{R_f}{R_b} \right)^2 \left[2 \ln \left(\frac{R_f}{R_b} \right) - 1 \right] + 1 = 4k \frac{\lambda_g (t_0 - T_b) \tau}{\omega\rho_w q_L R_b^2}. \quad (6)$$

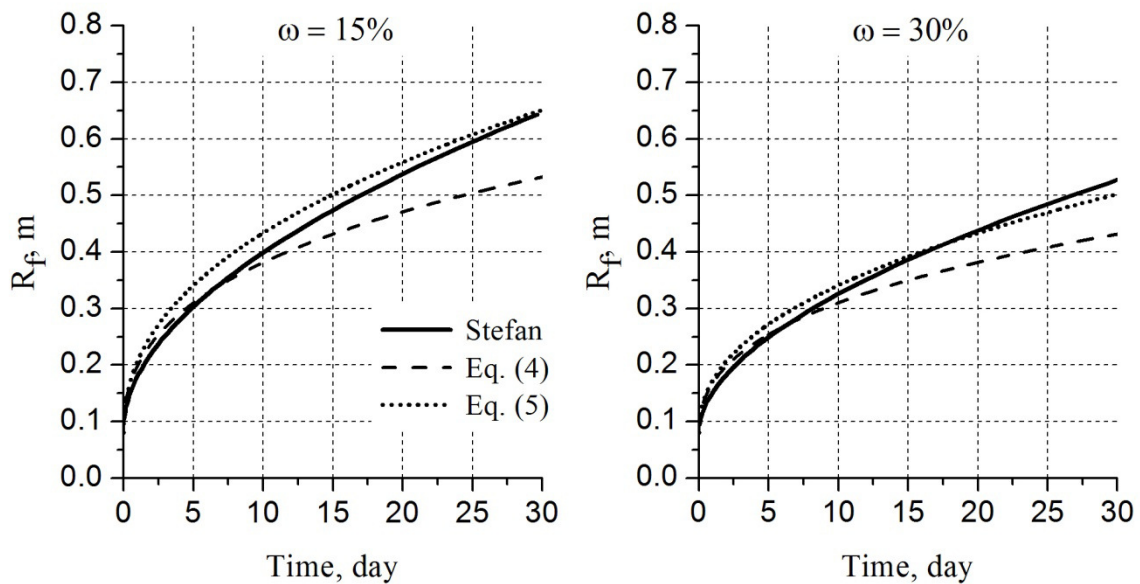


Рис.1. Сравнение радиуса мерзлого грунта R_f , определённого из численного решения задачи Стефана и вычисленного по формулам (4), (5).

На рисунке 1 приведены результаты вычислений R_f по формулам (4) и (5) с $k = 0.25$ и численного решения задачи Стефана. Радиус ствола термоскважины $R_b = 0.08$ м, радиус грунтового цилиндра $R_d = 20$ м. Температура стенки термоскважины $T_b = -10^\circ\text{C}$, температура грунта за пределами цилиндра $t_g = +10^\circ\text{C}$. Теплоёмкость грунта $c_g = 850$ Дж/(кг·К), теплопроводность $\lambda_g = 2.6$ Вт/(м·К), плотность $\rho_g = 1500$ кг/м³. Плотность

воды $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$ и скрытая теплота замерзания воды $q_L = 330 \text{ кДж/кг}$. Радиус мёрзлого грунта был вычислен для двух значений насыщения грунтовой влаги $\omega = 15\%$ и $\omega = 30\%$.

В дальнейшем на числовых примерах мы будем использовать формулу (6) для оценки $R_f(\tau)$ с $k = 0.25$.

3. Оценка эффективного коэффициента теплопроводности

На практике период времени, для которого решается задача (1), разбивается на равные интервалы времени длиной Δ , причём на каждом таком интервале мощность источника Q в (1) считается постоянной. Как указывалось выше, скорректированный коэффициент λ_{eff} должен учитывать изменения теплового потока от грунта к термоскважине, вызванные выделением или поглощением скрытой теплоты замораживания/оттаивания грунта. Такие корректировки выполняются для каждого временного интервала Δ , температура грунта $t_g(R_b, \tau_{m-1})$ в начале которого, или температура грунта $t_g(R_b, \tau_m)$ в конце, или они обе - меньше, чем t_0 . В результате эффективный коэффициент λ_{eff} будет выражен как $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_g + \lambda_{\text{pt}}$. Корректирующий член λ_{pt} рассчитывается по разным формулам в зависимости от того, находится ли тепловой насос в "активном" или "пассивном" состоянии.

Мы называем состояние теплового насоса на m -ом временном интервале Δ "активным", если в течение этого интервала существует отличный от нуля ($Q_m \neq 0$) тепловой поток между грунтом и термоскважиной. Если радиус мёрзлого грунта R_f изменяется в интервале времени Δ , то для расчета λ_{pt} используется следующее уравнение:

$$\pi \left(R_f^2(\tau_m) - R_f^2(\tau_{m-1}) \right) \omega \rho_w q_L = 2\pi k \lambda_{\text{pt}} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{t_0 - t_b}{\ln(R_f(v)/R_b)} dv,$$

где мы приравниваем скрытую теплоту фазового перехода к теплоте, переданной за счёт теплового потока между границей замороженной земли и буровой скважиной за интервал времени Δ с неизвестной теплопроводностью и тем же значением параметра $k = 0.25$, как в уравнении (4). Используя простое приближение интеграла, мы получаем уравнение для λ_{pt} :

$$\left(R_f^2(\tau_m) - R_f^2(\tau_{m-1}) \right) \omega \rho_w q_L = k \lambda_{\text{pt}} \left[\frac{(t_0 - t_b) \Delta}{\ln(R_f(\tau_{m-1})/R_b)} + \frac{(t_0 - t_b) \Delta}{\ln(R_f(\tau_m)/R_b)} \right]. \quad (7)$$

Если $R_f(\tau_{m-1}) = R_b$ либо $R_f(\tau_m) = R_b$, тогда соответствующий член в правой части (9) принимается равным нулю.

Если состояние термоскважины для интервала Δ "пассивно", то есть $Q_m = 0$, и $R_f(\tau_{m-1}) > R_b$, то предполагается, что тепло, передаваемое от внешней массы грунта, расходуется на повышение температуры мёрзлого грунта от t_{fg} до t_0 и таяние льда. Снова используя выражение для постоянного теплового потока (3), мы можем оценить тепло, полученное от внешней земли за интервал времени Δ_t и от полного таяния мёрзлого грунта следующим уравнением:

$$Q_g = 2\pi k \lambda_g \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_{m-1} + \Delta_t} \frac{(t_g - t_0) dv}{\ln(R_d/R_f(v))} \approx \pi k \lambda_g \left[\frac{(t_g - t_0) \Delta_t}{\ln(R_d/R_f(\tau_{m-1}))} + \frac{(t_g - t_0) \Delta_t}{\ln(R_d/R_b)} \right].$$

Тепло, необходимое для нагревания и оттаивания оставшегося мёрзлого грунта, может быть выражено как:

$$Q_{hm} = \pi (R_f^2(\tau_{m-1}) - R_b^2) (c\rho(t_0 - t_{fg}) + \omega\rho_w q_L),$$

где t_{fg} - средняя температура мёрзлого грунта, которая может быть определена так: $t_{fg} = \frac{t_0 + t_g(R_b, \tau_{m-1})}{2}$.

Приравнявая Q_g и Q_{hm} , можно оценить время Δ_t , требуемое, чтобы расплавить весь мёрзлый грунт. Если $\Delta_t \leq \Delta$, то у нас нет мёрзлого грунта в момент τ_m ; в противном случае $R_f(\tau_m)$ определяется как решение R уравнения:

$$(R_f^2(\tau_{m-1}) - R^2) (c\rho(t_0 - t_{fg}) + \omega\rho_w q_L) = k \lambda_g \left[\frac{(t_g - t_0) \Delta}{\ln(R_d/R_f(\tau_{m-1}))} + \frac{(t_g - t_0) \Delta}{\ln(R_d/R)} \right].$$

Если $\Delta_t > \Delta$ то величина корректировки λ_{pt} вычисляется из уравнения:

$$(R_f^2(\tau_{m-1}) - R_f^2(\tau_m)) \omega\rho_w q_L = k \lambda_{pt} \left[\frac{(t_g - t_0) \Delta}{\ln(R_d/R_f(\tau_{m-1}))} + \frac{(t_g - t_0) \Delta}{\ln(R_d/R_f(\tau_m))} \right]. \quad (8)$$

Если $\Delta_t \leq \Delta$, то λ_{pt} получают из уравнения:

$$(R_f^2(\tau_{m-1}) - R_b^2) \omega\rho_w q_L = k \lambda_{pt} \left[\frac{(t_g - t_0) \Delta_t}{\ln(R_d/R_f(\tau_{m-1}))} + \frac{(t_g - t_0) \Delta_t}{\ln(R_d/R_b)} \right], \quad (9)$$

и в этом случае $\lambda_{eff} = \frac{(\lambda_g - \lambda_{pt})\Delta_t + \lambda_g(\Delta - \Delta_t)}{\Delta}$.

Учёт скрытой теплоты фазового перехода в решении (1) выполняется с помощью итерационной процедуры. На первом шаге задача (1) решается с номинальной величиной теплопроводности грунта λ_g . Для каждого момента времени $\tau_m = m\Delta$, где Δ обычно равняется 30 дням, вычисляется

температура грунта у стенки термоскважины $t_{g,0}(R_b, t_m)$, и если $t_{g,0}(R_b, t_m) < t_0$, радиус мерзлого грунта $R_f(\tau_m)$ рассчитывается по уравнению (5). Тогда эффективная теплопроводность λ_{eff} вычисляется по уравнениям (7), (8) или (9), и полученное значение λ_{eff} используется в (1) вместо λ_g . По (1) вычисляется новая температура грунта $t_{g,1}(R_b, t_m)$. Процедура продолжается до тех пор, пока различие температур грунта у стенки термоскважины в двух последовательных вычислениях не станет меньше заданной малой погрешности δ : $|t_{g,n}(R_b, t_m) - t_{g,n-1}(R_b, t_m)| < \delta$.

4. Вычислительный эксперимент по оценке влияния замораживания/оттаивания поровой влаги на тепловой режим грунта

Вычислительный эксперимент по оценке влияния на тепловой режим грунта процессов замораживания/оттаивания поровой влаги при эксплуатации ГТСТ проводился с помощью программного комплекса «INSOLAR.GSHP.12», разработанного в группе компаний "Инсолар". Программа предназначена для определения оптимальных параметров ГТСТ в зависимости от местного климата и строительных особенностей объекта теплоснабжения. Основная особенность программы - использование метода Фурье для решения задачи (1) вычисления температуры на границе грунта и термоскважины, а также температуры теплоносителя как для горизонтального, так и для вертикального расположения трубы. В программе осуществлён метод учёта скрытого тепла замораживания/оттаивания поровой влаги, описанный выше. В эксперименте основное внимание было обращено на сравнение результатов расчёта для сухого и влажного грунта.

На рисунке 2 представлены среднемесячные температуры наружного воздуха для московского региона. Отопление жилых зданий в Москве обычно начинается в октябре и заканчивается в апреле (значения 1-7 по оси абсцисс на рис.3). Используя средние температурные, теплофизические характеристики здания, грунта, и некоторых технических параметров устройства теплового насоса, программа вычисляет необходимый тепловой поток из грунта, который удовлетворяет спрос потребителей при минимальных энергетических затратах.

На рисунке 3 приведены графики вычисленного теплового потока на единицу длины термоскважины в течение двух отопительных сезонов для сухого и влажного грунта с 15%-й и 30%-й объёмной влажностью. Потоки для влажного грунта практически одинаковы, поэтому линия, соответствующая $\omega = 30\%$, накладывается на линию, соответствующую $\omega = 15\%$.

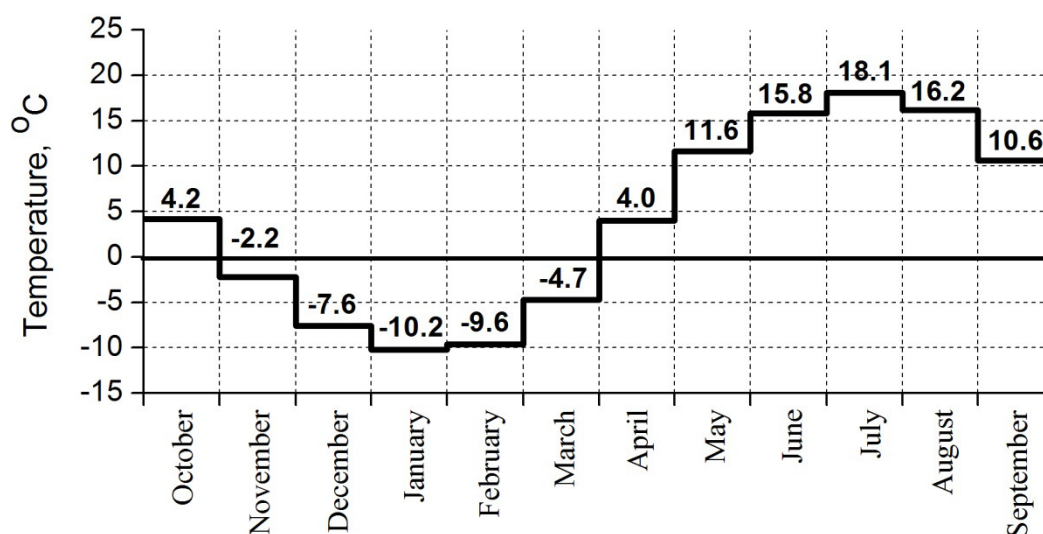


Рис.2. Среднемесячные температуры наружного воздуха для московского региона.

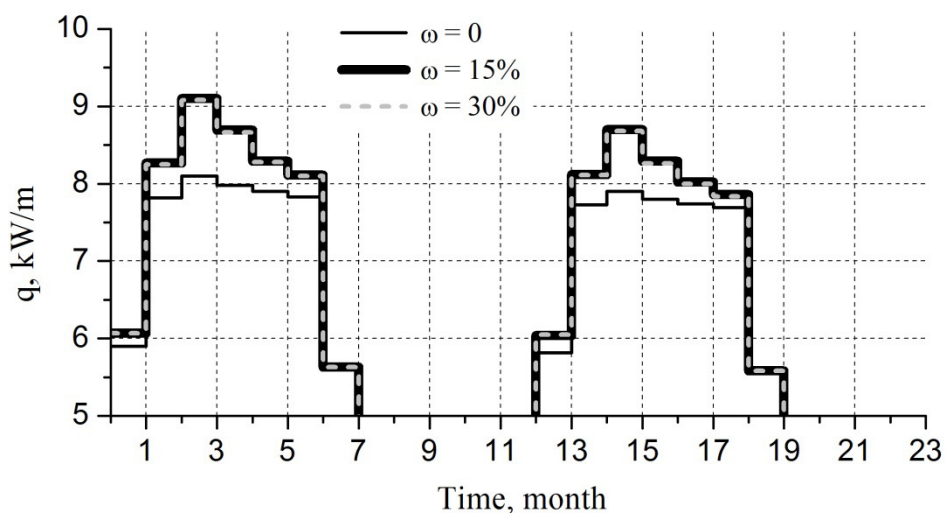


Рис.3. Тепловой поток от грунта к термоскважине при различных значениях объёмной влажности грунта.

Как следует из рис.3, процедура оптимизации, выполненная с учётом скрытой теплоты замораживания и оттаивания влаги грунта, даёт более высокие ежемесячные значения извлечённой тепловой энергии. Увеличение в количестве извлечённой энергии вызвано тем, что температура грунта на стенке термоскважины, вычисленная с учётом скрытой теплоты, получается гораздо выше, чем без такого учёта, как это показано на рисунке 4. В зимние месяцы скрытая теплота замерзания увеличивает температуру грунта, в то время как весной и летом скрытая теплота оттаивания, напротив, уменьшает температуру грунта.

На рисунке 5 представлены графики изменения радиуса мёрзлого грунта вокруг термоскважины в зависимости от времени. Как следует из предыдущей иллюстрации, температура грунта в первый год является одинаковой для грунта разной влажности. Таким образом, количество скрытого тепла и объём замороженной влаги для грунта указанной влажности не различаются. Но те же объёмы воды содержатся в различных объёмах грунта, при различных объёмах влажности. По этой причине радиус мёрзлого грунта больше для земли с меньшей влажностью.

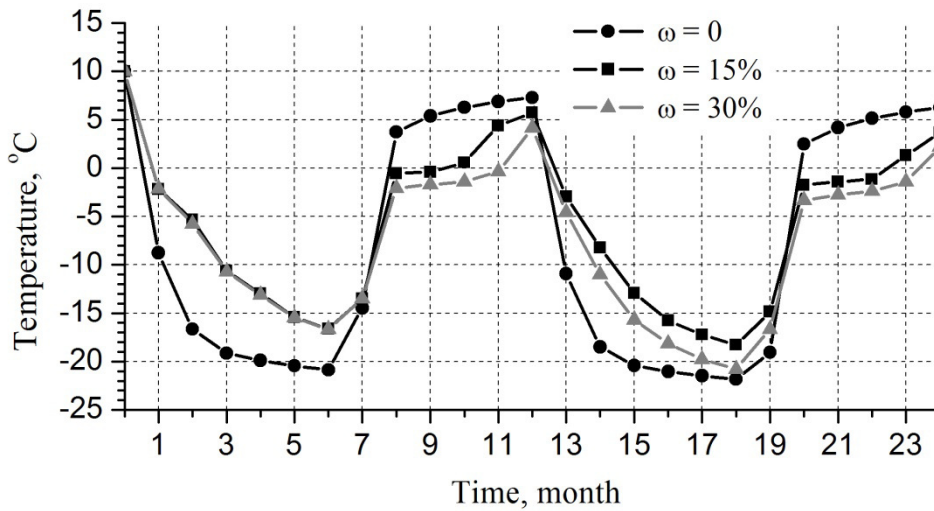


Рис.4. Температура грунта на стенке термоскважины.

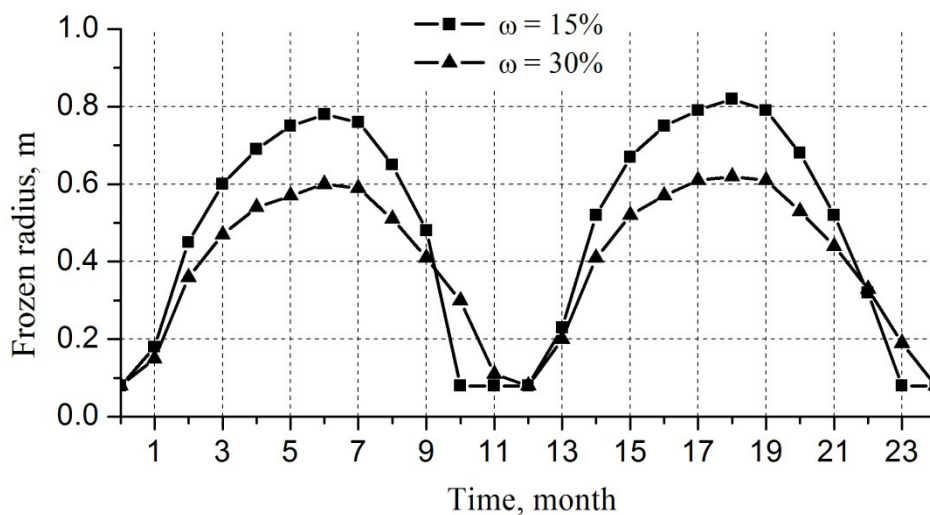


Рис.5. Радиус мёрзлого грунта вокруг буровой скважины радиуса 0.08 м.

На рисунке 6 представлены данные об изменении эффективного коэффициента теплопроводности грунта λ_{eff} в процессе эксплуатации грунтового теплообменника. Данные наглядно иллюстрируют отличие фактических значений эффективного коэффициента теплопроводности грунта (учитывающих теплоту фазовых переходов поровой влаги в грунте) от

используемых в обычной практике проектирования номинальных значений λ_g , как правило, определяемых по справочным данным, полученным при положительных температурах грунта.

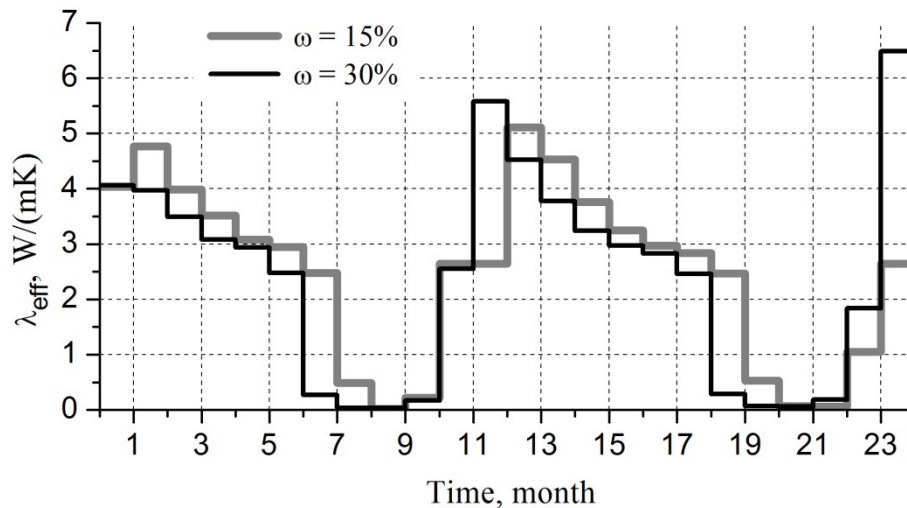


Рис.6. Эффективный коэффициент теплопроводности грунта λ_{eff} , номинальное значение $\lambda_g = 2.65$ W/(m·K).

Как видно из рис.6, значения λ_{eff} и λ_g могут отличаться более чем в два раза. Игнорирование этого обстоятельства на практике приводит к проектированию слишком больших термоскважин и к избыточным инвестициям в ГТСТ. Таким образом, использование при проектировании ГТСТ предлагаемого в настоящей статье эффективного коэффициента теплопроводности λ_{eff} , учитывающего энергию, выделяющуюся при фазовых переходах поровой влаги в грунте, представляется чрезвычайно важным и определяющим точность моделирования параметров термоскважин и ГТСТ в целом, в особенности для стран с холодным и продолжительным сезоном отопления, таких как Россия, в которых эксплуатация термоскважин при положительных температурах грунта экономически неэффективна.

5. Заключение

Результаты исследований, представленные в этой статье, доказывают, что проблема правильного учёта теплоты конденсации/испарения поровой влаги при моделировании тепловых процессов в грунте за пределами термоскважины является одной из наиболее серьёзных проблем, особенно для стран с холодным климатом (включая Россию), в которых использование геотермальных тепловых насосов систем отопления практически всегда проходит в условиях фазовых переходов поровой влаги

грунта. Во время эксплуатационного периода влага грунтового массива, находящегося в пределах зоны теплового влияния ГТСТ, обычно подвергается многократному замораживанию и оттаиванию в результате сезонных изменений климата и рабочей тепловой нагрузки на ГТСТ. Кроме того, физическое состояние поровой влаги в жидких, твёрдых и газовых фазах, как правило, изменяется одновременно. Правильное рассмотрение этих эффектов в нестационарных пространственных моделях чрезвычайно сложно даже для современного компьютерного оборудования. Для решения этой проблемы можно использовать такое понятие, как "эквивалентная" теплопроводность грунта, предложенное в этой статье. Результаты вычислений с учётом эквивалентной теплопроводности показывают, что процессы замораживания/оттаивания поровой влаги могут быть достаточно точно учтены в модели ГТСТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.W. Lund, D.H. Freeston, T.L. Boyd.* Direct utilization of geothermal energy 2010 worldwide review. // *Geothermics*, 2011, Vol.40, pp.159-180.
2. *Г.П. Васильев.* Геотермальные теплонасосные системы теплоснабжения и эффективность их применения в климатических условиях России. // *АВОК*, 2007, № 5, с.58-68.
3. *S.D. Guidice, G. Comini, R.W. Lewis.* Finite element simulation of freezing processes in soils. // *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 1978, Vol.2, pp.223-235.
4. *G.P. Newman, G.W. Wilson.* Heat and mass transfer in unsaturated soils during freezing. // *Can. Geotech. J.*, Vol.34, pp.63-70.
5. *M. Mikkola, J. Hartikainen.* Mathematical model of soil freezing and its numerical implementation. // *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2001, Vol.52, pp.543-557.
6. *H. Yang, P. Cui, Z. Fang.* Vertical-borehole ground-coupled heat pumps: A review of models and systems. // *Applied Energy*, 2010, Vol.87, pp.16-27.
7. *L. Lamarche, S. Kajl, B. Beauchamp.* A review of methods to evaluate borehole thermal resistances in geothermal heat-pump systems. // *Geothermics*, 2010, Vol.39, pp.187-200.