Васильева Е.В.

ОБ УСЛОВИЯХ ПОСТОЯНСТВА ЗНАКА ПРОИЗВОДНОЙ ВРЕМЕНИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ*

Рассматривается задача оптимального быстродействия для системы

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \geq 0,\ x(0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ для всех $t \geq 0$; A, B — постоянные матрицы. В качестве допустимых управлений рассмотрим измеримые функции $u(\cdot)$ со значениями в ограниченном выпуклом замкнутом множестве $U \subset R^m$. Обозначим через $x(t)=x(t,x_0,u(\cdot))$ движение системы (1), соответствующее начальному положению x_0 и управлению $u(\cdot)$. Зафиксируем ненулевой вектор $s \in R^n$. Пусть целевое множество S_ξ имеет вид

$$S_\xi = \{y \in R^n : \langle y,s \rangle \geq \xi\},\ \xi > \langle x_0,s \rangle.$$

Здесь и далее угловые скобки обозначают скалярное произведение в R^n. Обозначим через $w_\xi(x_0)$ время быстродействия из начального положения x_0, т.е. наименьший момент времени такой, что $x(w_\xi(x_0),x_0,u(\cdot)) \in S_\xi$ для некоторого допустимого управления $u(\cdot)$. Если для данного x_0 эта задача неразрешима, положим $w_\xi(x_0)=+\infty$. Таким образом, получим функцию $w_\xi : R^n \backslash S_\xi \to [0,+\infty]$. Требуется определить, в каких случаях задача быстродействия разрешима при всех $\xi > \langle s,x_0 \rangle$, и как изменяется знак $\partial w_\xi / \partial p(x)$ при $\xi \to +\infty$ для фиксированного вектора p. Задачи подобного типа исследуются в рамках теории чувствительности оптимального управления и параметрической оптимизации [1].

Рассмотрим возможную интерпретацию поставленной задачи. Пусть текущее положение системы $x(t)$ описывает состояние некоторой (экологической) системы в момент времени t, а управление $u(t)$ — неизвестное внешнее воздействие, например, интенсивность источника загрязнения. Предположим, что при попадании $x(t)$ на множество S_ξ система оказывается в критической ситуации (наступает экологическая катастрофа). Значение $w_\xi(x)$ можно интерпретировать как время до наступления катастрофы при наиболее неблагоприятном для нас внешнем воздействии $u(t)$. Пусть известно, что система перемещается в направлении вектора p. Если при этом $w_\xi(x)$ возрастает, то время до наступления катастрофы увеличивается, следовательно, это благоприятная для нас ситуация; в случае,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00682) и программы поддержки ведущих научных школ России (грант 00-15-96086).

если $w_\xi(x)$ убывает, ситуация неблагоприятна. Если существует производная $\partial w_\xi/\partial p(x)$, то о возрастании или убывании функции $w_\xi(x)$ в направлении p можно судить по знаку этой производной. Далее, предположим, что значение ξ неизвестно, известно лишь ``плохое" направление s. Поэтому интересно было бы выделить и исследовать случаи, когда целевое множество S_ξ достижимо при любых $\xi>\langle s,x\rangle$, и знак производной $\partial w_\xi/\partial p(x)$ один и тот же для всех $\xi\geq\xi_1$ при некотором $\xi_1\in R$. Исследование этой задачи для случая точного задания целевого множества было проведено в работе [2].

Введем обозначения $r(t)=e^{A^*t}s$ (здесь и далее звездочка обозначает операцию транспонирования),

$$f(t)=\langle r(t),x\rangle+\int_0^t \max_{u\in U}\langle r(\tau),Bu\rangle d\tau.$$

Далее будут использоваться приведенные ниже теоремы, доказанные в [2].

Теорема 1. Задача оптимального по быстродействию перевода системы (1) на множество S_ξ разрешима тогда и только тогда, когда уравнение $f(t)=\xi$ имеет решение $t>0$. При этом $w_\xi(x)$ — наименьший положительный корень этого уравнения.

Теорема 2. Пусть $w_\xi(x)\in(0,+\infty)$. Функция w_ξ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда $f'(w_\xi(x))>0$. При этом

$$\nabla w_\xi(x)=-r(w_\xi(x))\ /\ f'(w_\xi(x)). \tag{2}$$

Обратимся теперь к изучению поведения знака $\partial w_\xi/\partial p(x)$ при $\xi\to+\infty$. Пусть $x\in R^n$. Обозначим $\xi_0=\langle s,x\rangle$, $C(x)=\{\xi>\xi_0 : w_\xi(x)<+\infty\}$. Из определения функции $w_\xi(x)$ следует, что если $\xi\in C(x)$, то $(\xi_0,\xi)\subset C(x)$, поэтому возможны четыре варианта: $C(x)=(\xi_0,+\infty)$, $C(x)=\varnothing$, $C(x)=(\xi_0,\xi_1)$ или $C(x)=(\xi_0,\xi_1]$ для некоторого $\xi_1>\xi_0$. Для изучения асимптотики задачи при $\xi\to+\infty$ важно выделить случай, когда $C(x)=(\xi_0,+\infty)$.

Лемма 1. $C(x)=(\xi_0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\sup\{f(t):t>0\}=+\infty$.

Доказательство. Пусть $\sup\{f(t):t>0\}=+\infty$. Тогда для любого $\xi>\xi_0$ найдется $t>0$ такое, что $f(t)=\xi$. Следовательно, по теореме 1 имеет место включение $\xi\in C(x)$. Обратно, пусть $C(x)=(\xi_0,+\infty)$, тогда для любого $\xi>\xi_0$ уравнение $f(t)=\xi$ имеет решение $t>0$. Следовательно, $\sup\{f(t):t>0\}=+\infty$. Лемма доказана.

Обозначим $C_1(x)=\{\xi\in C(x): f'(w_\xi(x))>0\}$. По теореме 2 $C_1(x)$ — множество тех значений ξ, для которых функция w_ξ дифференцируема в точке x. В следующих теоремах рассмотрены случаи, когда s или p являются собственными векторами матриц A^* или A соответственно. Введем обозначения:

$$Q(x)=\{Ax+Bu : u\in U\}$$

— множество возможных скоростей системы (1) в точке x,

$$z(x,l)=\max_{q\in Q(x)}\langle l,q\rangle$$

— опорная функция множества $Q(x)$. Заметим, что $Q(x(t))$ — правая часть дифференциального включения, соответствующего управляемой системе (1):

$$x'(t)\in Q(x(t),\ t\geq 0,\ x(0)=x_0.$$

Теорема 3. Пусть $A^*s=\lambda s$ для некоторого $\lambda\in R$.

1) Если $z(x,s)\leq 0$, то $C(x)=\varnothing$.

2) Пусть $z(x,s)>0$. $C(x)=(\xi_0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lambda\geq 0$. Далее, $C(x)=C_1(x)$, и для всех $\xi\in C(x)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x)=-\frac{\langle s,p\rangle}{z(x,s)},$$

т.е. величина $\partial w_\xi/\partial p(x)$ не зависит от ξ.

Доказательство. Поскольку $A^*s=\lambda s$, то $r(t)=e^{A^*t}s=e^{\lambda t}s$. Дифференцируя функцию $f(t)$, получаем

$$f'(t)=\langle r'(t),x\rangle+\max_{u\in U}\langle r(t),Bu\rangle=\langle A^*r(t),x\rangle+\max_{u\in U}\langle r(t),Bu\rangle=$$
$$=\max_{u\in U}\langle r(t),Ax+Bu\rangle=\max_{q\in Q(x)}\langle r(t),y\rangle=z(x,r(t))=e^{\lambda t}z(x,s).$$

Если $z(x,s)<0$, то $f'(t)<0$ для всех $t\geq 0$, поэтому $f(t)<f(0)=\xi_0$ при $t>0$. Следовательно, если $\xi>\xi_0$, то уравнение $f(t)=\xi$ не имеет положительных решений. Применяя теорему 1, получаем отсюда, что $C(x)=\varnothing$. Далее, если $z(x,s)=0$, то для всех $t\geq 0$ имеем $f'(t)=0$, следовательно, $f(t)\equiv\xi_0$. Поэтому также $C(x)=\varnothing$. Пусть теперь $z(x,s)>0$. Если $\lambda=0$, то $f(t)=\xi_0+z(x,s)t$, а если $\lambda\neq 0$, то $f(t)=\xi_0+\lambda^{-1}(e^{\lambda t}-1)z(x,s)$. Анализируя эти формулы, заключаем, что $\sup\{f(t):t>0\}=+\infty$ тогда и только тогда, когда $\lambda\geq 0$. Применяя лемму 1, выводим, что $C(x)=(\xi_0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lambda\geq 0$. Далее, $f'(t)=e^{\lambda t}z(x,s)>0$ при $t\geq 0$, поэтому $C_1(x)=C(x)$. Используя формулу (2), получаем

$$\frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x)=\langle w_\xi(x),p\rangle=\frac{\langle r(w_\xi(x)),p\rangle}{f'(w_\xi(x))}=\frac{\langle r(w_\xi(x)),p\rangle}{z(x,r(w_\xi(x)))}=-\frac{\langle s,p\rangle}{z(x,s)},$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $Ap=\lambda p$ для некоторого λ. Тогда знак производной $\partial w_\xi/\partial p(x)$ не зависит от $\xi\in C_1(x)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{d\langle r(t),p\rangle}{dt}=\langle A^*r(t),p\rangle=\langle r(t),Ap\rangle.$$

Поэтому если $Ap=\lambda p$, то $\langle r(t),p\rangle=e^{\lambda t}\langle s,p\rangle$. Пусть $\xi\in C_1(x)$. Обозначим $T=w_\xi(x)$. По формуле (2) имеем

$$\frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x)=\left\langle -\frac{r(T)}{f'(r(T))},p\right\rangle=-\frac{\langle r(T),p\rangle}{f'(r(T))}=-\frac{e^{\lambda T}\langle s,p\rangle}{f'(r(T))}.$$

По теореме 2 $f'(r(T))>0$, поэтому

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x)=-\operatorname{sgn}\ \langle s,p\rangle,$$

что завершает доказательство теоремы.

Пусть $v(t)=r(t)/|r(t)|$, $t\geq 0$. Выясним, существует ли предел $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)$. Для этого рассмотрим линейный оператор A^*: $C^n\to C^n$, определяемый матрицей A^*. Как известно (см., например, [3]), пространство C^n раскладывается в прямую сумму корневых подпространств для оператора A^*, соответствующих собственным значениям этого оператора:

$$C^n=\sum\nolimits_{\lambda\in S(A)}K_\lambda,$$

где $S(A)$ — множество собственных значений матрицы A. Поэтому существует единственное разложение

$$s=\sum\nolimits_{s_\lambda\in K_\lambda}s_\lambda.$$

Введём обозначения:

$$\Lambda=\{\lambda : s_\lambda\neq 0\},\ \alpha=\max_{\lambda\in\Lambda}\ \mathrm{Re}\lambda,\ \Lambda_0=\{\lambda\in\Lambda : \mathrm{Re}\lambda=\alpha\},$$

$$K(\lambda)=\min\{k\in N\cup\{0\} : (A-\lambda E)^{k+1}s_\lambda=0\},\quad \text{для}\quad \lambda\in\Lambda.$$

Лемма 2. Предел $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=v_0$ существует тогда и только тогда, когда $\alpha\in\Lambda$, и для всех $\lambda\in\Lambda_0\setminus\{\alpha\}$ выполнено неравенство $k(\lambda)<k(\alpha)$. При этом

$$v_0=\frac{(A^*-\alpha E)^{k(\alpha)}s_\alpha}{\left|(A^*-\alpha E)^{k(\alpha)}s_\alpha\right|},\ A^*v_0=\alpha v_0.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$r(t)=\sum_{\lambda\in\Lambda}e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{k(\lambda)}\frac{t^k}{k!}(A^*-\lambda E)^k s_\lambda. \tag{3}$$

Пусть

$m=\max\limits_{\lambda\in\Lambda_0} k(\lambda),\ \Lambda_1=\{\lambda\in\Lambda_0 : k(\lambda)=m\},$

$$\rho(t)=\sum_{\lambda\in\Lambda_1}e^{\lambda t}\frac{t^m}{m!}(A^*-\lambda E)^m s_\lambda, \tag{4}$$

$\Lambda_1=\{\lambda_j\}_{j=1}^N;\ \lambda_j=\alpha+i\beta_j,\ h_j=(A^*-\lambda_j E)^m s_\lambda/m!.$

Тогда

$$\rho(t)=e^{\alpha t}t^m\sum_{j=1}^N e^{i\beta_j t}h_j.$$

Оценим сверху и снизу функцию $a(t)=\left|\sum_{j=1}^N e^{i\beta_j t}h_j\right|$. Обозначим $a_2=\sum_{j=1}^N|h_j|$. Имеем $a(t)\le\sum_{j=1}^N\left|e^{i\beta_j t}h_j\right|=a_2$. С другой стороны,

$$a(t)=\left|e^{i\beta_j t}\left(h_1+\sum_{j=2}^N e^{i(\beta_j-\beta)_1 t}h_j\right)\right|=|h_1+h_0(t)|,$$

где $h_0(t)=\sum_{j=2}^N e^{i(\beta_j-\beta)_1 t}h_j$. Пусть

$$L_0=\left\{\ \sum_{j=2}^N\alpha_j h_j : \alpha_j\in C\ \right\}$$

— линейная оболочка векторов h_2, ..., h_N, и $L_1=h_1+L_0$. Заметим, что h_j ($1\le j\le N$) — собственный вектор матрицы A^*, соответствующий собственному значению λ_j, поэтому система векторов $\{h_1, \dots, h_N\}$ линейно независима. Следовательно, множество L_1 не содержит ноль пространства C^n. Кроме того, L_1 замкнуто. Таким образом, расстояние от нуля пространства C^n до L_1 есть положительное число a_1. Поскольку $h_1+h_0(t)\in L_1$, то $|h_1+h_0(t)|\ge a_1$. Поэтому $a(t)\ge a_1$. Итак, справедливы оценки $a_1\le a(t)\le a_2$, откуда

$$a_1e^{\alpha t}t^m\le|\rho(t)|\le a_2e^{\alpha t}t^m,\ t\ge0. \tag{5}$$

Обозначим $\delta(t)=\rho(t)-r(t)$. Из формул (3) и (4) следует, что

$$|\delta(t)|=o(e^{\alpha t}t^m)\quad\text{при}\quad t\to+\infty. \tag{6}$$

Поэтому существуют $a,r_1,r_2>0$ такие, что

$$r_1 e^{\alpha t} t^m \le |r(t)| \le r_2 e^{\alpha t} t^m,\ t \ge a. \tag{7}$$

Пусть $g(t) = \rho(t)/|\rho(t)|$. Справедливы равенства

$$g(t) - v(t) = \frac{\rho(t)}{|\rho(t)|} - \frac{r(t)}{|r(t)|} = \frac{\delta(t)}{|\rho(t)|} + \frac{|r(t)| - |\rho(t)|}{|r(t)|}.$$

Отсюда $|g(t) - v(t)| \le 2|\delta(t)|/|\rho(t)|$. Учитывая (5) и (6), получаем $\lim_{t\to+\infty}(g(t) - v(t)) = 0$, поэтому пределы $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ и $\lim_{t\to+\infty} g(t)$ существуют одновременно, и если существуют, равны. Таким образом, нужно доказать, что предел $\lim_{t\to+\infty} g(t)$ существует тогда и только тогда, когда $\Lambda_1 = \{\alpha\}$.

Пусть $\Lambda_1 = \{\alpha\}$, тогда $\rho(t) = e^{\alpha t} t^m h_1$, следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \frac{h_1}{|h_1|} = \frac{(A^* - \alpha E)^{k(\alpha)} s_\alpha}{\left|(A^* - \alpha E)^{k(\alpha)} s_\alpha\right|}.$$

Обратно, предположим, что $\Lambda_1 \ne \{\alpha\}$. Тогда хотя бы одно из чисел $\beta_1, \ldots, \beta_N$ отлично от нуля. Пусть $\beta_N \ne 0$. Обозначим $\gamma_j(t) = e^{i\beta_j t}/a(t)$. Тогда $g(t) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j(t) h_j$. Предположим, что $g(t) \to g_0$ при $t \to +\infty$. Тогда существуют пределы $\lim_{t\to+\infty} \gamma_j(t)$, $1 \le j \le N$. В частности, существует предел $\lim_{t\to+\infty} \gamma_N(t)$. Пусть $\tau = \pi/\beta_N$, тогда

$$\gamma_N(t) - \gamma_N(t+\tau) \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Но

$$|\gamma_N(t) - \gamma_N(t+\tau)| = \left|\frac{e^{i\beta_N t}}{a(t)} + \frac{e^{i\beta_N t}}{a(t+\tau)}\right| = \frac{1}{a(t)} + \frac{1}{a(t+\tau)} \ge \frac{2}{a_2},$$

следовательно, наше предположение неверно, т.е. не существует предела $\lim_{t\to+\infty} g(t)$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $n=2$, $A \in R^{2\times 2}$. Предел $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ существует тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A вещественны.

Лемма 3. Пусть существует предел $\lim_{t\to+\infty} v(t) = v_0$, и $\langle v_0, p\rangle \ne 0$. Тогда найдётся $a \ge 0$ такое, что для любого $\xi \in C_1(x)$ если $w_\xi(x) \ge a$, то

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x) = -\operatorname{sgn}\ \langle v_0, p\rangle.$$

Доказательство. Поскольку $r(t) = |r(t)| \cdot v(t)$, то для всех $\xi \in C_1(x)$ имеем

$$\frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x) = \frac{|r(w_\xi(x))| \langle v(w_\xi(x)), p \rangle}{f'(w_\xi(x))}.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = v_0$, то найдётся $a \geq 0$ такое, что для всех $t \geq a$ выполнено равенство $\operatorname{sgn}\langle v(t),p\rangle = \operatorname{sgn}\langle v_0,p\rangle$. Обозначим $T=w_\xi(x)$, и пусть $T \geq a$. Тогда

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x) = -\operatorname{sgn}\ \langle v(T), p\rangle = -\operatorname{sgn}\ \langle v_0, p\rangle.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $0 \in \operatorname{int} Q(x)$. Тогда $C(x)=C_1(x)$, и $C(x)=(\xi_0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 0$.

Доказательство. Если $0 \in \operatorname{int} Q(x)$, то найдётся число $c_0 > 0$ такое, что

$$z(x,l) \geq c_0(l) \qquad \text{для всех} \quad l \in R^n. \tag{8}$$

Поэтому $z(x,r(t)) > 0$ для всех $t > 0$, следовательно, $f'(t) > 0$ при $t > 0$. Применяя теорему 2, получаем первое утверждение леммы. Далее, $f'(t)=z(x,r(t))$, поэтому в силу формул (7), (8) и ограниченности множества $Q(x)$

$$c_0 r_1 e^{\alpha t} t^m \leq f'(t) \leq C r_2 e^{\alpha t} t^m,\ t \geq a,$$

где $C = \max\{|q| : q \in Q(x)\}$. Отсюда видно, что $\sup\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 0$. Применяя лемму 1, получаем второе утверждение леммы.

Лемма 5. Пусть существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = v_0$ (необходимое и достаточное условие существования этого предела указано в лемме 2, и $z(x,v_0)\neq 0$. $C(x)=(\xi_0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда $z(x,v_0)>0$ и $\alpha\geq 0$.

Доказательство. Обозначим

$$K_+(x) = \{l \in R^n : z(x,l) > 0\}, \quad K_-(x) = \{l \in R^n : z(x,l) < 0\},$$

$$K_0(x) = \{l \in R^n : z(x,l) = 0\}.$$

Нетрудно проверить, что множества $K_+(x)$, $K_-(x)$ и $K_0(x)$ являются конусными. Поскольку функция $z(x,l)$ непрерывна по $l \in R^n$, а для непрерывных отображений прообраз открытого множества открыт, то $K_+(x)$, $K_-(x)$ — открытые множества, $K_0(x)$ замкнуто. По условию $z(x,v_0)\neq 0$, поэтому $v_0 \in K_+(x)$ или $v_0 \in K_-(x)$. Рассмотрим эти два случая.

1. Пусть $v_0 \in K_+(x)$. Множество $K_+(x)$ открыто, поэтому найдётся $a\geq 0$ такое, что для всех $t\geq a$ выполнено включение $v(t) \in K_+(x)$. Следовательно,

$f'(t)>0$ для $t\in[0,+\infty)$. Далее, найдётся $a_1>a$ такое, что для всех $t\geq a_1$ выполнено неравенство $|v(t)-v_0|\leq z(x,v_0)/2C$, поэтому для $t\in[a_1,+\infty)$

$$z(x,v(t))\geq z(x,v_0)-z(x,v(t)-v_0)\geq z(x,v_0)-C|v(t)-v_0|\geq z(x,v_0)/2.$$

Заметим, что $z(x,v(t))=z(x,r(t))/|r(t)|=f'(t)/|r(t)|$. Таким образом, для $t\in[a_1,+\infty)$

$$f'(t)\geq k_1|r(t)|, \tag{9}$$

где $k_1= z(x,v_0)/2$. Если $\alpha\geq 0$, то, учитывая (7) и (9), получаем, что $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$, поэтому $C(x)=(\xi_0,+\infty)$. Пусть теперь $\alpha<0$. Для всех $t\geq a$ имеем $0<f'(t)\leq Cr_2e^{\alpha t}t^m$, поэтому существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\xi_1<+\infty$, следовательно, множество $C(x)$ ограничено.

2. Пусть $v_0\in K_-(x)$. Тогда найдётся $a\geq 0$ такое, что для всех $t\geq a$ выполнено включение $v(t)\in K_-(x)$. Следовательно, $f'(t)<0$ для $t\in[a,+\infty)$, поэтому множество $C(x)$ ограничено. Лемма доказана.

Объединяя результаты леммы 3 и 5, получаем следующую теорему.

Теорема 5. Пусть существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=v_0$, и выполнены соотношения $\langle v_0,p\rangle\neq 0$, $z(x,v_0)>0$, и $\alpha\geq 0$. Тогда $C(x)=(\xi_0,+\infty)$, и найдется $\xi_1\geq\xi_0$ такое, что для всех $\xi>\xi_1$ выполнено равенство

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial w_\xi}{\partial p}(x)=-\operatorname{sgn}\ \langle v_0,p\rangle.$$

Литература

1. Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. —М.: Мир, 1987.
2. Васильева Е.В. О чувствительности времени быстродействия линейной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000. №3.
3. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.,1984.