

## **Раздел III. Информатика**

---

*А.А. Васин, И.А. Лесик, О.М. Григорьева*

### **СИНТЕЗ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ МНОГОУЗЛОВОГО КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА С ПЕРЕМЕННЫМ СПРОСОМ**

#### **1. Введение**

Для многих рынков однородного товара сетевая структура имеет важное значение. В качестве примеров можно привести рынки газа, нефти, электроэнергии. Транспортная система является важнейшим компонентом этих рынков. Потребители и производители находятся в разных узлах сети, и пропускные способности линий передачи товара между ними ограничены. Проблема оптимизации транспортной системы имеет практическое значение, поскольку сетевая составляющая в ценах для потребителя велика.

В предшествующих работах по рынкам однородного товара ([1], [2], [3]) анализируются модели с фиксированными пропускными способностями. В статье [4] обсуждается задача оптимизации пропускных способностей транспортной системы. Работа [5] решает задачу об оптимальной пропускной способности линии связи (по Вальрасу) для двухузлового рынка. В качестве критерия оптимизации принимается полное общественное благосостояние, понимаемое как сумма прибылей всех агентов на рынке (производителей, покупателей и транспортной системы) за вычетом расходов на увеличение пропускной способности транспортной системы. Последние исследования [6] обобщают эти результаты на случай нескольких узлов, где структура транспортной сети соответствует некоторому неориентированному графу. В модели отражена возможность роста благосостояния за счет снижения цены на однородный товар на локальных рынках путем переброски более дешевого товара. Трудность задачи связана с учетом постоянных расходов на увеличение пропускных способностей линий. Если оптимальное множество линий, выбранных для расширения, известно, то проблема сводится к задаче выпуклого программирования. (Подобная задача рассматривается в [7].) Однако, поиск этого множества для реальных сетей с большим количеством линий требует разработки специальных методов.

Главным отличием постановки задачи в настоящей работе является учет зависимости спроса в узлах от времени, имеющей периодический характер в связи с суточными или сезонными колебаниями спроса. Как следствие, равновесные цены и значение общественного благосостояния

оказываются функциями времени. В качестве критерия оптимизации транспортной системы выбирается интегральное значение общественного благосостояния за период за вычетом затрат на увеличение пропускных способностей линий. Проблема оптимизации сводится к следующим трем задачам. Внешней назовем задачу выбора множества линий, пропускная способность которых должна быть увеличена. Основной назовем задачу оптимизации пропускных способностей линий, выбранных во внешней задаче. Частные производные общественного благосостояния как функции пропускных способностей в данный момент времени находятся как разность равновесных цен на концах соответствующих дуг [8]. Это дает возможность использовать метод градиентного типа для решения задачи оптимизации пропускных способностей линий. При этом на каждом шаге возникает задача нахождения равновесных цен при фиксированных пропускных способностях. Назовем эту задачу внутренней. В статье предлагается эффективный способ определения равновесных цен при фиксированном времени, использующий вариационную постановку задачи. Под задачей синтеза транспортной системы в настоящей работе понимается основная задача. Внешняя задача рассматривается в работе [6].

В следующем разделе дается формальная постановка задачи синтеза транспортной системы для многоузлового рынка с учетом того, что спрос зависит от времени. Третий раздел посвящен решению внутренней задачи определения равновесных цен в квадратичном приближении с использованием комбинированного метода градиентного типа. Затем приводятся численные примеры, которые показывают эффективность представленных методов для решения задач такого рода.

## 2. Постановка задачи

Развивая постановку, предложенную в [9], приведем модель многоузлового рынка с периодически меняющейся функцией спроса. Пусть  $N$  - множество узлов,  $L \subseteq N \times N$  - множество ребер,  $C_i(V)$  - себестоимость выпуска объема  $V$  в узле  $i \in N$ ;  $D^i(p, t)$  - спрос в узле  $i \in N$  как функция цены  $p \geq 0$  и времени  $t \in [0, T]$ , где  $T$  - период. Функция спроса определяет функцию полезности потребления в узле  $i$   $U_i(q, t) = \int_0^q (D^i)^{-1}(v, t) dv$ . Предполагается, что функция спроса  $D^i(p, t)$  ограничена и строго убывает по  $p$  при  $D^i(p, t) > 0$ , является непрерывной по  $p$  для любого  $t$ , измерима по  $t$  для любого  $p$  и  $D^i(p, t) = 0$  при  $p > p_m(t)$ . Из этих предположений следует непрерывность по  $q$  и измеримость по  $t$  функции  $U_i(q, t)$ .

Функция полных затрат  $C_i(V)$  предполагается выпуклой, строго возрастающей и дифференцируемой кроме конечного числа точек,  $C_i(0) = 0, \dot{C}_i(V) \rightarrow \infty$  при  $V \rightarrow \infty$ . Функция предложения  $S_i$  определяет оптимальный объем выпуска в узле  $i \in N$ , максимизирующий прибыль при данной цене:

$$S_i(p) = \underset{V \geq 0}{\text{Arg max}} (Vp - C_i(V)).$$

В данных предположениях многозначная функция предложения  $S_i(p)$  выпуклозначна, ограничена, не убывает по  $p$  [10].

Каждое ребро  $(i, j) \in L$  описывается исходной пропускной способностью  $Q_0^{ij}$  и функцией транспортных затрат:

$$E^{ij}(q_{ij}) = e_{tr}^{ij} |q_{ij}| + \begin{cases} 0, & |q_{ij}| \leq Q_0^{ij}, \\ e_f^{ij} + e_v^{ij} (|q_{ij}| - Q_0^{ij}), & |q_{ij}| > Q_0^{ij}. \end{cases}$$

Здесь  $e_{tr}^{ij}$  - удельные затраты на транспортировку. Затраты на увеличение пропускной способности линии  $(i, j)$  состоят из фиксированных затрат  $e_f^{ij} > 0$  и переменных затрат  $e_v^{ij}(\Delta Q^{ij})$ . Предполагается, что  $e_v^{ij}(0) = 0$  и функция  $e_v^{ij}(\Delta Q^{ij})$  выпукла и монотонно возрастает по  $\Delta Q^{ij}$ . Затраты  $e_f^{ij}$  и  $e_v^{ij}(\Delta Q^{ij})$  приведены к периоду  $T$  (см. [11]).

Обозначим  $q_i = \sum_{j \in Z(i)} q_{ij}$  - отток товара из узла  $i$ . Объем потребления  $\hat{v}_i$  в узле  $i$  равен  $\hat{v}_i = v_i - q_i$ . Общественное благосостояние многоузлового рынка при заданных пропускных способностях определяется по формуле:

$$W^0(q, v, t) = \sum_{i \in N} [U_i(\hat{v}_i, t) - C_i(v_i) - \sum_{j>i} e_{tr}^{ij} |q_{ij}|], \quad (1)$$

где  $Z(i)$  - множество узлов, связанных с узлом  $i$ ,  $q = (q_{ij}, (i, j) \in L)$  - вектор потоков,  $v = (v_i, i \in N)$  - объемы выпуска. Предполагается, что  $q_{ij} = -q_{ji}$ .

Для всякого вектора пропускных способностей  $Q = \{Q^{ij}, (i, j) \in L\}$  определим множество  $B(Q)$  допустимых значений  $(q, v)$  условиями  $v_i \geq 0, i \in N, |q_{ij}| \leq Q_{ij}, (i, j) \in L$ .

Задача оптимизации общественного благосостояния при заданных пропускных способностях состоит в определении величины:

$$W(Q, t) = \max_{(q, v) \in B(Q)} W^0(q, v, t). \quad (2)$$

В указанных условиях функция  $W^0(q, v, t)$  непрерывна по  $(q, v)$  для любого  $t \in [0, T]$ . Максимум в определении функции  $W(Q, t)$  наибольшего благосостояния достигается, поскольку  $C'_i(v) \rightarrow \infty$  при  $v \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** В данных предположениях функция полезности  $U_i(q, t)$  вогнута по  $q$  и задача (2) вычисления  $W(Q, t)$  представляет собой задачу выпуклого программирования.

**Доказательство.** Обратная функция  $(D^i)^{-1}(q, t)$  непрерывна, убывает и представляет собой производную функции полезности потребителя  $U_i(q, t) = \int_0^q (D^i)^{-1}(v, t) dv$ . Поэтому функция  $U_i(q, t)$  является вогнутой по  $q$ . Функция себестоимости  $C_i(v_i)$  по предположению выпукла. Отсюда следует, что функция  $W^0(q, v, t)$  является вогнутой по  $(q, v)$  на выпуклом множестве  $B(Q)$ .

Функция  $W(Q, t)$  также является вогнутой в силу следующей леммы.

**Лемма 1 (см. [12]).** Если функция  $F(x, y)$  выпукла, а  $\varphi(x, y)$  вогнута по  $(x, y)$  на произведении выпуклых множеств  $X$  и  $Y$ , то функция минимума  $f(x) = \inf_{y \in B(x)} F(x, y)$  выпукла на  $X$ , где  $B(x) = \{y \in Y \mid \varphi(x, y) \geq 0\}$ .

Согласно теореме 2.1. в работе [9], при фиксированном потоке  $(q_{ij}, (i, j) \in L)$  оптимальные объемы для задачи (2) задаются формулой  $v_i = S_i(p_i)$ , где цены  $p_i(t)$  находятся из уравнений баланса спроса и предложения с учетом потоков:  $\Delta S_i(p_i, t) \stackrel{def}{=} S_i(p_i) - D_i(p_i, t) = q_i, i \in N$ .

Предположим, что выполнено условие невырожденности цен  $p_i(t) > 0$ . В силу сделанных предположений отображение  $\Delta S_i(p_i, t)$  является монотонно не убывающим по  $p$  для любого  $t$ , хотя может быть и многозначным. Далее допустим, что функции  $C_i(v)$ ,  $i \in I$ , строго выпуклы, а  $C'_i(v)$  ограничены. Тогда отображение  $\Delta S_i(p_i, t)$  строго монотонно и непрерывно по  $p$ . Выполнения этих условий можно добиться за счет сколь угодно малого изменения функций  $D_i$  и  $C_i$  с сохранением их свойств. Тогда обратное отображение  $p_i(q_i, t) = (\Delta S_i)^{-1}(q_i)$  будет однозначным и непрерывным по  $q_i$ . Условие экономического равновесия  $\Delta S_i(p_i, t) = q_i$  для узла  $i$  при фиксированных потоках  $q_{ij}, (i, j) \in L$ , можно записать в форме

$$p_i(q_i, t) = (\Delta S_i)^{-1}(q_i), i \in N. \quad (3)$$

Это позволяет исключить  $v$  из критерия  $W^0(q, v, t)$  при помощи формулы  $v_i(t) = S_i(p_i(t))$ , где  $p_i(t)$  определяется по формуле (3). Получим новое выражение для общественного благосостояния многоузлового рынка:

$$\bar{W}^0(q, t) = \sum_{i \in N} \text{Pr}_i(q, t) + \sum_{i \in N} CS_i(q, t) + \text{Pr}T(q, t). \quad (4)$$

Здесь  $\text{Pr}_i(q, t) = \int_0^{p_i(q, t)} S_i(p) dp$  – прибыль производителей;

$CS_i(q, t) = \int_{p_i(q, t)}^{\infty} D_i(p, t) dp$  – выигрыш потребителей (сюрплас) на  $i$ -м рынке, прибыль транспортной системы  $\text{Pr}T(q, t)$  определяется по формуле:

$$\text{Pr}T(q, t) = \sum_{(i, j) \in L, i < j} ((p_j(q, t) - p_i(q, t)) q_{ij} - e_{tr}^{ij} |q_{ij}|).$$

Для  $Q = \{Q^{ij}, (i, j) \in L\}$  определим множество  $\bar{B}(Q)$  допустимых значений  $q$  условиями:

$$|q_{ij}| \leq Q_{ij}, (i, j) \in L. \quad (5)$$

В эквивалентной форме задачу оптимизации общественного благосостояния (2) можно записать в виде:

$$W(Q, t) = \max_{q \in \bar{B}(Q)} \bar{W}^0(q, t). \quad (6)$$

Пара  $(q, p)$  называется равновесием данного сетевого рынка, если она удовлетворяет условиям:

$$\Delta S_i(p_i, t) = q_i \forall i \in N; |q_{ij}| \leq Q_{ij} \forall i, j \in N; \quad (7)$$

$$p_j > p_i + e_{tr}^{ij} \Rightarrow q_{ij} = Q_{ij}; |p_i - p_j| < e_{tr}^{ij} \Rightarrow q_{ij} = 0; p_j - p_i = e_{tr}^{ij} \Rightarrow q_{ij} \in [0, Q_{ij}].$$

Из Утверждения 2 в [6] вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.** Для любого решения  $(q, v)$  задачи (2) поток  $q = (q_{ij}, (i, j) \in L)$  вместе с ценами  $p$ , определяемыми по формуле (3), образует пару  $(q, p)$ , являющуюся равновесием. И обратно, если  $(q, p)$  равновесие, то  $(q, v)$ , где  $v = (v_i = S_i(p_i), i \in N)$ , – решение задачи (2).

**Теорема 3.** Для любого  $Q > 0$  функция  $W(Q, t)$  является дифференцируемой в точке  $Q$  и справедливы формулы:

$$W'_{Q_{ij}}(Q, t) = \max(|p_j - p_i| - e_{tr}^{ij}, 0), \quad (8)$$

где  $(p, q)$  – равновесие из теоремы 2.

**Доказательство.** В точке максимума задачи (2)  $\hat{v}_i^* < D_i(0, t)$  либо  $\hat{v}_i^* = 0$  при этом функция  $U_i(\hat{v}_i, t)$  строго вогнута по  $\hat{v}_i$ . Поскольку  $C_i(V)$  строго выпукла, значения  $(v_i^*, q_i^*, i \in I)$  однозначно определены. Поскольку  $\Delta S_i(p_i, t)$  – строго монотонная почти всюду

дифференцируемая функция и ее производная  $\Delta S_i'(p_i, t) > \varepsilon > 0$ , то определена монотонная непрерывная обратная функция  $p_i(q_i, t)$ . В этих условиях  $q_i^*$  непрерывно зависит от  $Q_i$  по теореме о неявной функции [13]. В работе [4] доказано, что если в равновесии  $|p_j - p_i| \leq e_{ij}^{tr}$ , то оптимальный поток без учета ограничения  $|q_{ij}| \leq Q_{ij}$  не превосходит текущего  $q_{ij}^*(Q)$ , поэтому  $W_{Q_{ij}}'(Q, t) = 0$ . Если же  $p_j - p_i > e_{ij}^{tr}$ , то  $W_{Q_{ij}}'(Q, t) = p_j - p_i - e_{ij}^{tr}$ . Поскольку  $p(Q)$  - непрерывная вектор-функция, то эти частные производные непрерывны в окрестности  $Q$  и согласно известной теореме из [13] функция  $W$  дифференцируема по  $Q$ .

**Замечание 1.** В случае, когда допускаются значения  $Q_{ij} = 0$ , можно перейти к сглаженной задаче (2), если в (1) заменить  $|q_{ij}|$  на усредненную функцию  $|q_{ij}|_\varepsilon = \int_{E^1} |q_{ij} + \varepsilon \rho| \omega_1(\rho) d\rho$ . Ядро осреднения определяется, например, по формуле:

$$\omega_1(\rho) = \begin{cases} 2^{-1}, & \rho \in O_1 \\ 0, & \rho \notin O_1 \end{cases},$$

где  $O_1 = [-1, 1]$ . Тогда справедливо равенство  $|q_{ij}| = |q_{ij}|_\varepsilon \forall q_{ij} : |q_{ij}| > \varepsilon$ . Определим функцию  $W^\varepsilon(Q, t)$  аналогично формуле (2). Тогда она будет дифференцируема, причем справедлива формула  $W_{Q_{ij}}^\varepsilon(Q, t) = \max(0, |p_j^\varepsilon - p_i^\varepsilon| - e_{ij}^{tr})$ , где  $(p^\varepsilon, q^\varepsilon)$  - соответствующее равновесие. Остается заметить, что  $|W^\varepsilon(Q, t) - W(Q, t)| = O(\varepsilon)$ , то есть функция  $W^\varepsilon(Q, t)$  сколько угодно точно аппроксимирует функцию  $W(Q, t)$ .

**Замечание 2.** Для энергетических систем типична ситуация, когда в некотором узле есть несколько генераторов, имеющих ограниченные мощности и разные удельные затраты. В этом случае функция полных затрат  $C_i(V)$  не является дифференцируемой, а функция предложения  $S_i(p)$  имеет горизонтальные участки. Для нахождения производной общественного благосостояния в таких энергетических системах можно перейти к сглаженной задаче аналогично замечанию 1.

В качестве критерия оптимизации транспортной системы рассмотрим величину полного общественного благосостояния за период с учетом затрат на увлечение пропускных способностей:

$$TW(Q) = \int_{t=0}^T W(Q,t)dt - \sum_{(i,j) \in L: Q^{ij} > Q_0^{ij}} (e_f^{ij} + e_v^{ij}(Q^{ij} - Q_0^{ij})) . \quad (9)$$

Задача оптимизации заключается в нахождении

$$Q^* = \{Q^{ij*}, (i,j) \in L\} \in \text{Arg max}_{(Q^{ij}, (i,j) \in L)} TW(Q) . \quad (10)$$

Пусть  $\bar{L}$  - фиксированное множество линий, пропускная способность которых увеличена, т.е.  $Q^{ij} - Q_0^{ij} > 0 \Rightarrow (i,j) \in \bar{L}$ . Тогда основная задача имеет вид

$$\bar{Q}^* = \{Q^{ij*}, (i,j) \in \bar{L}\} \in \text{Arg max}_{(Q^{ij}, ij \in \bar{L})} \left( \int_{t=0}^T W(Q,t)dt - \sum_{ij \in \bar{L}} (e_v^{ij}(Q^{ij} - Q_0^{ij})) \right) . \quad (11)$$

В условиях теоремы 2 функция  $W(Q)$  дифференцируема, причем справедливы формулы:

$$TW'_{Q_{ij}}(Q) = \int_{t=0}^T W'_{Q_{ij}}(Q,t)dt - (e_v^{ij})'(Q_{ij}) , \quad (12)$$

где  $(e_v^{ij})'(Q_{ij})$  - производная функции переменных затрат  $e_v^{ij}$  в точке  $Q_{ij}$ .

Существование интеграла в (12) вытекает из измеримости  $W'_{Q_{ij}}(Q,t)$  по  $t$  при любом  $Q$ . Последняя следует из измеримости многозначного отображения  $\tilde{B}(Q,t)$  в силу леммы 1.6 в книге [12].

Данный результат дает возможность использовать метод градиентного типа для решения задачи (10). При этом на каждом шаге возникает внутренняя задача нахождения равновесных цен при фиксированных пропускных способностях.

### 3. Внутренняя задача определения равновесных цен в квадратичном приближении.

3.1. Квадратичная модель распределенного рынка. Допустим, что для  $i=1, \dots, n$  функции себестоимости выпуска объема  $V$  в  $i$ -м узле имеют вид  $C_i(V) = A_i V^2 + B_i V$ . Тогда производная  $\dot{C}_i(V) = 2A_i V + B_i$ . Для возрастания функции затрат на множестве  $V \geq 0$  необходимо и достаточно, чтобы  $A_i, B_i \geq 0$ . Поскольку функция затрат дифференцируема, то соответствующая функция предложения задается формулой (см.[10]):

$$S_i(p) = \begin{cases} (\dot{C}_i)^{-1}(p), & p \geq \dot{C}_i(0) \\ 0, & 0 \leq p \leq \dot{C}_i(0) \end{cases} = \max \left\{ \frac{p - B_i}{2A_i}; 0 \right\} . \quad (13)$$

Функции спроса в узлах возьмем кусочно-линейными:

$$D_i(p,t) = \max \{D_i(t) - G_i(t)p; 0\} . \quad (14)$$

Фиксируем  $t \in [0, T]$  и опускаем зависимость от  $t$ . При  $p \geq P_i \stackrel{def}{=} D_i / G_i$  спрос отсутствует. Для расчета равновесных цен получаем формулу

$$\Delta S_i(p) = \begin{cases} G_i p - D_i, & 0 \leq p < B_i, \\ \left( \frac{1}{2A_i} + G_i \right) p - \left( \frac{B_i}{2A_i} + D_i \right), & B_i \leq p < P_i, \\ \frac{p - B_i}{2A_i}, & p \geq P_i, \end{cases} \quad (15)$$

справедливую при условии

$$B_i < P_i. \quad (16)$$

Обратную функцию к функции (15) можно записать в виде:

$$(\Delta S_i)^{-1}(Q) = \begin{cases} \frac{Q + D_i}{G_i}, & Q < G_i B_i - D_i, \\ \frac{Q + 0.5B_i / A_i + D_i}{0.5 / A_i + G_i}, & G_i B_i - D_i \leq Q < \frac{P_i - B_i}{2A_i}, \\ 2A_i Q + B_i, & Q \geq \frac{P_i - B_i}{2A_i}. \end{cases} \quad (17)$$

Вспоминая, что величины  $D_i = D_i(t), G_i = G_i(t)$  в (14) являются функциями времени, условие (3) можно записать в виде:

$$p_i(q_i, t) = \begin{cases} \frac{q_i + D_i}{G_i}, & q_i < G_i B_i - D_i, \\ \frac{q_i + 0.5B_i / A_i + D_i(t)}{0.5 / A_i + G_i(t)}, & G_i B_i - D_i \leq q_i < \frac{P_i - B_i}{2A_i}, \\ 2A_i q_i + B_i, & q_i \geq \frac{P_i - B_i}{2A_i}. \end{cases} \quad (18)$$

**Замечание 3.** Условие (16) не ограничивает общности рассуждений. Анализ случая  $B_i \geq P_i$  аналогичен данному выше.

Прибыли производителей и потребителей в квадратичном случае определяются по формулам:

$$\Pr_i(\vec{Q}, t) = \int_0^{p_i(\vec{Q}, t)} S_i(p) dp = \frac{p_i^2(\vec{Q}, t)}{4A_i},$$

$$CS_i(\vec{Q}, t) = \int_{p_i(\vec{Q}, t)}^{\infty} D_i(p, t) dp = \frac{D_i^2(t)}{2G_i} - D_i(t) p_i(\vec{Q}, t) + \frac{G_i}{2} p_i^2(\vec{Q}, t)$$



Из вогнутости функции  $W^0(\vec{q}, t)$  для любого  $t \in [0, T]$  следует, что внутренняя задача (8),(18) представляет собой задачу выпуклого программирования, для решения которой можно использовать метод проекции градиентов [14]:

$$\vec{q}(k+1) = P(\vec{q}(k) + a_k r_k), k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где  $k$  - номер шага;  $a_k \rightarrow 0, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ , (например,  $a_k = Dk^{-\gamma}$  - программный шаг метода,  $0 < \gamma \leq 1$ , - параметр;  $D$  - характерный размер множества допустимых решений задачи, например, оценка диаметра);  $r_k = \nabla \bar{W}^0(\vec{q}(k), t)$  - градиент функции  $\bar{W}^0(\vec{q}, t)$ , который может быть вычислен с помощью формулы (8);  $P$  - оператор проектирования на множество, заданное неравенствами(5).

Любая предельная точка последовательности  $\{\vec{q}(k)\}$  является решением задачи (4), (18), см. (Теорема 7 в [14]).

**3.2. Пример решения внутренней задачи для трехузлового рынка.** Рассмотрим следующий пример трехузлового рынка. Предположим, что плата за передачу равна нулю. В таблице 1 приводятся исходные данные по узловым рынкам.

**Таблица 1. Характеристики узловых рынков**

$i$	$A_i$	$B_i$	$D_i$	$G_i$	$P_i$	$\tilde{p}_i(0)$
1	1.03	0	10	1	10	6.732
2	0.5	0	20	2	10	6.667
3	0.5	0	30	3	10	7.5

Фиксированные и переменные затраты имеют вид  $e_f^{ij}(\Delta Q) = \alpha c_{ij}$ ,  $e_v^{ij}(\Delta Q) = \alpha(a_{ij}\Delta Q^2 + b_{ij}\Delta Q)$  (см. табл. 2). Значение параметра  $\alpha$  принято равным 0.01.

**Таблица 2. Данные по транспортным линиям**

$(i, j)$	$a_{ij}$	$b_{ij}$	$c_{ij}$	$Q_{ij}$
(2,1)	2	2	2	0.6
(2,3)	2	1	1,5	0.7273
(1,3)	1	2	2,5	0.9546

Перебирая возможные варианты, можно убедиться, что единственное равновесие соответствует случаю  $|q_{21}| < Q_{21} \Rightarrow p_1 = p_2 = p_{1-2}$ ,  $q_{23} = Q_{23}$ ,  $q_{31} = Q_{31}$ . Уравнения баланса в данном случае имеют вид:

$$\Delta S_1(p_{1-2}) = S_1(p_{1-2}) - D^1(p_{1-2}) = \frac{p_{1-2}}{2A_1} - D_1 + G_1 p_{1-2} = 1.4854 p_{1-2} - 10 = -q_{21} + Q_{13},$$

$$\Delta S_2(p_{1-2}) = S_2(p_{1-2}) - D^2(p_{1-2}) = \frac{p_{1-2}}{2A_2} - D_2 + G_2 p_{1-2} = 3 p_{1-2} - 20 = q_{21} + Q_{23},$$

$$\Delta S_3(p_3) = S_3(p_3) - D_3(p_3) = \frac{p_3}{2A_3} - D_3 + G_3 p_3 = 4 p_3 - 30 = -Q_{23} - Q_{13},$$

откуда получим решение

$$p_{1-2} = \frac{30 + Q_{23} + Q_{31}}{4.4854} = \frac{30 + Q}{4.4854} = 7.0633; \quad p_3 = \frac{30 - Q}{4} = 7.0795.$$

При этом  $q_{21} = 3 p_{1-2} - 20 - Q_{23} = 0.4625$ .

Используем это решение для тестирования практической сходимости метода (19). Равновесные цены составляют  $p_1 = p_2 = 7.0633$ ,  $p_3 = 7.0795$  и достигаются при потоках  $q_{21} = 0.4625 < Q_{21} = 0.6$ ,  $q_{23} = Q_{23} = 0.7273$ ,  $q_{13} = Q_{13} = 0.9546$ .

Ограничение потоков пропускными способностями запишется в виде:

$$-0.6 \leq q_{21} \leq 0.6, -0.7273 \leq q_{23} \leq 0.7273, -0.9546 \leq q_{13} \leq 0.9546. \quad (20)$$

Критерий общественного благосостояния имеет вид:

$$\bar{W}^0(\vec{q}) = \frac{p_1^2}{4.12} + \frac{(10 - p_1)^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{(10 - p_2)^2}{1} + \frac{p_3^2}{2} + \frac{3(10 - p_3)^2}{2} + \quad (21)$$

$$+ (p_2 - p_1)q_{21} + (p_3 - p_2)q_{23} + (p_3 - p_1)q_{13},$$

где связь между  $p_i$  и  $q_{ij}$  определяется по формуле (18), которая в данном случае имеет вид  $p_1 = 0.673(-q_{21} + q_{23} + 10)$ ,  $p_2 = 0.333(q_{21} + q_{23} + 20)$ ,  $p_3 = 0.250(-q_{23} - q_{13} + 30)$ .

Таким образом, внутренняя задача определения равновесных цен состоит в максимизации критерия (21) при ограничениях (18, 20). Подставляя (18) в (21), можно убедиться, что полученная квадратичная форма будет отрицательно определенной. Таким образом, задача (18, 20, 21) представляет собой задачу квадратичного программирования.

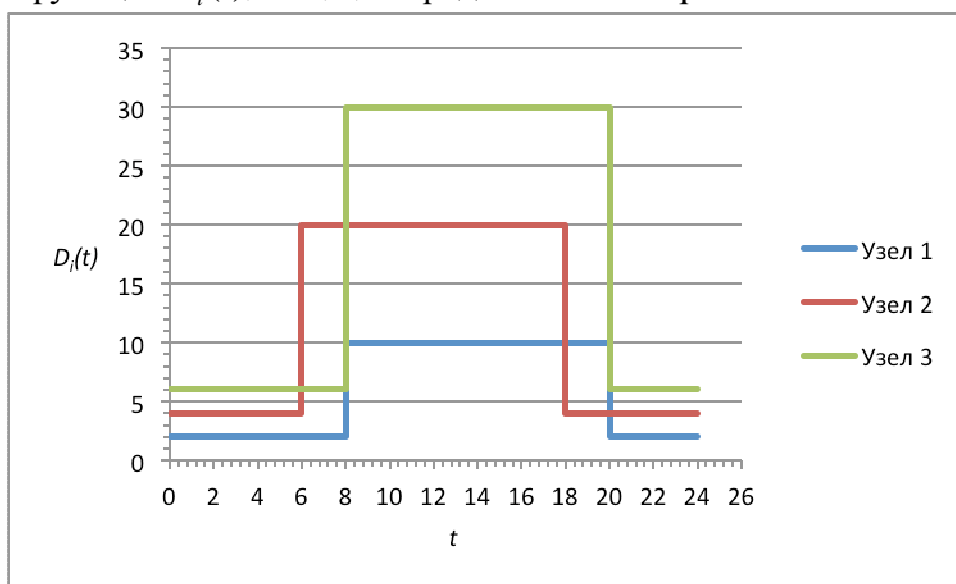
Проведенные численные эксперименты по проверке алгоритма (19) показывают практическую сходимость. Точность  $eps = 0.001$  решения задачи достигается приблизительно за 1000 шагов. При этом сложность каждого шага не высока, что является преимуществом алгоритмов с программным выбором шага. Обычно требуется несколько сотен шагов для практической сходимости. Но по времени это занимает считанные минуты и является допустимым.

#### 4. Модельный пример синтеза транспортной сети трехузлового рынка

Рассмотрим пример трех рынков  $i = 1, 2, 3$ . Предположим, что спрос  $D_i(p, t)$  в узле  $i$  определяется по формуле (14), где  $G_i(t) = 0.1D_i(t)$ ,  $P_i(t) = D_i(t) / G_i(t) = 10$ , а  $D_i(t)$  имеют вид

$$D_1(t) = \begin{cases} 2; 0 \leq t < 8 \\ 10; 8 \leq t < 20 \\ 2; 20 \leq t \leq 24 \end{cases}, \quad D_2(t) = \begin{cases} 4; 0 \leq t < 6 \\ 20; 6 \leq t < 18 \\ 4; 18 \leq t \leq 24 \end{cases}, \quad D_3(t) = \begin{cases} 6; 0 \leq t < 8 \\ 30; 8 \leq t < 20 \\ 6; 20 \leq t \leq 24 \end{cases},$$

Графики функции  $D_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  представлены на рис. 1.



**Рисунок 1.** Графики функции  $D_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$

Предполагается, что множество линий для развития  $L = \{(2,3), (1,3)\}$ . Коэффициент потерь, плата за передачу и начальные пропускные способности равны нулю. Фиксированные и переменные затраты имеют вид  $e_f^{ij}(\Delta Q) = c_{ij}$ ,  $e_v^{ij}(\Delta Q) = a_{ij}\Delta Q^2 + b_{ij}\Delta Q$  (см. табл. 3).

**Таблица 3.** Данные по транспортным линиям

$(i, j)$	$a_{ij}$	$b_{ij}$	$c_{ij}$
(2,3)	0.02	0.01	0.015
(1,3)	0.01	0.02	0.025

Параметры  $A_i, B_i$  функции предложения (13) и равновесные цены представлены в табл. 4.

**Таблица 4.** Данные по изолированным узловым рынкам

$i$	$A_i$	$B_i$	$\tilde{p}_i(0)$
1	1.03	0	6.734
2	0.5	0	6.667
3	0.5	0	7.500

Предположим, что  $Q = (Q_{(2,3)}, Q_{(1,3)}) \in \Omega = [0; 1.713] \times [0; 1.713]$ . Это условие получается следующим образом. Для любого  $t$  находится общая равновесная цена  $p(t)$  без ограничения на пропускные способности линий из условия  $\sum_i \Delta S_i(p, t) = 0$  и показывается, что любой поток, обеспечивающий равновесную цену  $p(t)$ , удовлетворяет условию  $q(t) = (q_{(2,3)}(t), q_{(1,3)}(t)) \in \Omega$ . И хотя этого не достаточно для того, чтобы утверждать, что оптимальное значение  $Q^* \in \Omega$ , как в случае цепочки рынков (см. утверждение 3.3.2 в работе [8]), но для простоты ограничимся этим случаем.

Общественное благосостояние  $W(Q, t)$  в (9) определяется по формуле:

$$W(Q, t) = \frac{p_1^2(Q, t)}{4A_1} + (P_1 - p_1(Q, t))G_1(t)/2 + \frac{p_2^2(Q, t)}{4A_2} + (P_2 - p_2(Q, t))G_2(t)/2 + \frac{p_3^2(Q, t)}{4A_3} + (P_3 - p_3(Q, t))G_3(t)/2 + (p_3(Q, t) - p_1(Q, t))Q_{(1,3)} + (p_3(Q, t) - p_2(Q, t))Q_{(2,3)} \quad (22)$$

Уравнения баланса  $\Delta S_i(p_i, t) = q_i$  определяют функции  $p_i = p_i(q, t)$  и имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta S_1(p_1, t) &= \left(\frac{1}{2A_1} + G_1(t)\right)p_1 - D_1(t) = q_{(1,3)}; \\ \Delta S_2(p_2, t) &= \left(\frac{1}{2A_2} + G_2(t)\right)p_2 - D_2(t) = q_{(2,3)}; \\ \Delta S_3(p_3, t) &= \left(\frac{1}{2A_3} + G_3(t)\right)p_3 - D_3(t) = -q_{(1,3)} - q_{(2,3)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя неотрицательность потоков и равенство нулю начальных пропускных способностей, все равновесия можно перебрать по схеме: выбрать  $\bar{L} \subseteq L$  и найти соответствующее равновесие из системы равенств и неравенств, вытекающих из определения общего равновесия:

$$\begin{cases} q_{ij} = Q_{ij}, p_i(q) < p_j(q), (i, j) \in \bar{L} \\ p_i(q) = p_j(q), |q_{ij}| < Q_{ij}, (i, j) \in L \setminus \bar{L} \end{cases} \quad (24)$$

Подставляя сюда функции  $p_i(q, t)$ , получаем, что количество равенств в (24) равняется количеству неизвестных потоков  $q_{ij}$ ,  $(i, j) \in L$ . В результате получим зависимость  $q_{ij} = q_{ij}(Q, t)$ . Подставляя в функции  $p_i(q, t)$ , получим зависимость от  $p_i = p_i(q(Q), t)$ . При этом неравенство в (24) дает условия на  $Q$  при заданном  $t$  в виде линейных неравенств. Полученную область в пересечении с  $\Omega$  обозначим через  $\Omega_{\bar{L}}(t)$ . В результате для

любого  $t$  получаем разбиение множества  $\Omega$  на множества  $\Omega_L(t), \bar{L} \subseteq L$ . Период  $t \in [0, 24]$  разбивается на четыре участка  $[(0, 6), (6, 8)], [8, 18], [18, 20]$ , на которых все параметры модели постоянные. Это означает, что существует только четыре разбиения. Перебирая их всевозможные пересечения, получим разбиение множества  $\Omega$  на многоугольники, в которых функции  $p_i(q(Q), t)$  заданы в виде линейных функций с постоянными коэффициентами. Это позволяет определить производные  $W'_{Q_i} = p_j(q(Q), t) - p_i(q(Q), t)$  на каждом куске как аффинные функции с постоянными коэффициентами. Критерий (9) можно представить в виде

$$TW(Q) = \left( \int_0^6 W(Q, t) dt + \int_6^8 W(Q, t) dt + \int_8^{18} W(Q, t) dt + \int_{18}^{20} W(Q, t) dt \right) - E(Q) \rightarrow \max_{Q \in \Omega}$$

В результате частная производная от критерия будет иметь вид:

$$TW'_{Q_i}(Q) = 10(p_j(q(Q), 3) - p_i(q(Q), 3)) + 2(p_j(q(Q), 7) - p_i(q(Q), 7)) + 10(p_j(q(Q), 13) - p_i(q(Q), 13)) + 2(p_j(q(Q), 19) - p_i(q(Q), 19)) - E'_{Q_i}(Q). \quad (25)$$

Можно решить задачу (9) на соответствующем многоугольнике методом субградиентов. Глобальное решение совпадает с локальным, реализующим максимум критерия общественного благосостояния. При этом на каждом куске получается задача квадратичного программирования.

4.1. Решение модельного примера. Множество  $\Omega$  разбивается на 13 областей (представлены на рис. 2), в которых функции  $p_i(q(Q), t)$  заданы в виде линейных функций с постоянными коэффициентами.

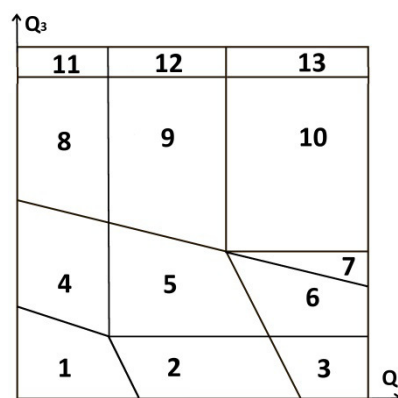


Рисунок 2. Разбиение множества  $\Omega$

Решая в каждой области задачу квадратичного программирования, можно убедиться, что глобальный максимум достигается в точке  $Q^* = (1.714; 1.616)$ , при этом значение критерия  $TW(Q^*) = 1564.307$ .

4.2. Метод проекции градиента. Представленный пример был разработан для проверки численных методов решения основной задачи. Используем метод проекции градиента для решения задачи (9). Начальное приближение  $Q^1 \in \Omega$  устанавливается любое. Очередное приближение на шаге  $k$  получается по формуле:  $Q^{k+1} = P_{\Omega}(Q^k + \gamma \nabla TW(Q^k))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Здесь  $P_{\Omega}$  – оператор проектирования на  $\Omega$ . Компоненты градиента  $\nabla TW(Q^k)$  определяются по формуле (25). Шаг  $\gamma$  определяется из условия  $0 < \gamma < 2/L$ , где  $L$  – любая оценка сверху константы Липшица градиента функции  $TW(Q)$  на множестве  $V$ .

Из теоремы 1 в [14] вытекает, что последовательность  $\{Q^k\}$  сходится к решению задачи (9). Поскольку функция  $TW(Q)$  в данном примере сильно вогнута, то имеет место сходимость со скоростью геометрической поверхности по той же теореме. Численный эксперимент показал, что метод сходится за 66 шагов с точностью  $eps = 0.001$  к значению  $Q^* = (1.714; 1.616)$ , что соответствует ранее найденному решению.

Стохастический вариант метода состоит в замене градиента  $\nabla TW(Q^k)$  на случайную величину  $S_k = 24 \nabla \bar{W}^0(Q^k, t^k) - E'(Q^k)$ , где  $t^k$  –  $k$ -я реализация случайной величины  $t$ , равномерно распределенной на интервале  $[0, 24]$ . Справедлива формула  $M(S_k | Q^1, t^1, \dots, Q^k, t^k) = \nabla TW(Q^k)$  для условного мат ожидания. В этом случае  $\gamma = \gamma^k$  выбирается из условия:  $\gamma^k \rightarrow 0, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k = \infty, \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma^k)^2 < \infty$ . Численный эксперимент показал, что метод сходится за 1691 шаг с точностью  $eps = 0.001$  к значению  $Q^* = (1.714; 1.616)$ , что соответствует ранее найденному решению. Преимущество стохастического метода состоит в простоте его реализации. Для нахождения градиента  $\nabla TW(Q^k)$  в методе проекции градиента приходится разбивать период  $t$  на интервалы, в которых параметры модели постоянны. Для стохастического метода это не требуется.

## 5. Пример с большим количеством узлов

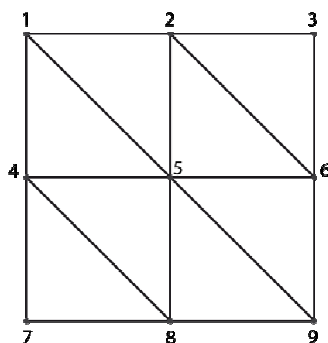
Рассмотрим пример девяти рынков  $i = 1, \dots, 9$ . Параметры  $A_i, B_i$  функции предложения (13) и  $D_i(t), G_i(t)$  функции спроса (14) представлены в таблице 5.

**Таблица 5. Данные по узловым рынкам**

$i$	$A_i$	$B_i$	$D_i(t)$	$G_i(t)$
1	1.03	0	$\begin{cases} 4; 0 \leq t < 6 \\ 20; 6 \leq t < 18 \\ 4; 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4; 0 \leq t < 6 \\ 2; 6 \leq t < 18 \\ 0,4; 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$
2	0.5	0	$\begin{cases} 2; 0 \leq t < 8 \\ 10; 8 \leq t < 20 \\ 2; 20 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2; 0 \leq t < 8 \\ 1; 8 \leq t < 20 \\ 0,2; 20 \leq t \leq 24 \end{cases}$
3	0.5	0	$\begin{cases} 6; 0 \leq t < 10 \\ 30; 10 \leq t < 22 \\ 6; 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,6; 0 \leq t < 10 \\ 3; 10 \leq t < 22 \\ 0,6; 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$
4	0.9	0	$\begin{cases} 5; 0 \leq t < 6 \\ 18; 6 \leq t < 18 \\ 5; 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,3; 0 \leq t < 6 \\ 2,1; 6 \leq t < 18 \\ 0,3; 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$
5	0.75	0	$\begin{cases} 2; 0 \leq t < 8 \\ 13; 8 \leq t < 20 \\ 2; 20 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2; 0 \leq t < 8 \\ 1,4; 8 \leq t < 20 \\ 0,2; 20 \leq t \leq 24 \end{cases}$
6	0.57	0	$\begin{cases} 6; 0 \leq t < 10 \\ 28; 10 \leq t < 22 \\ 6; 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,6; 0 \leq t < 10 \\ 2,7; 10 \leq t < 22 \\ 0,6; 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$
7	0.53	0	$\begin{cases} 4; 0 \leq t < 6 \\ 23; 6 \leq t < 18 \\ 4; 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,3; 0 \leq t < 6 \\ 2,5; 6 \leq t < 18 \\ 0,3; 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$
8	0.85	0	$\begin{cases} 1; 0 \leq t < 8 \\ 11; 8 \leq t < 20 \\ 1; 20 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2; 0 \leq t < 8 \\ 1,4; 8 \leq t < 20 \\ 0,2; 20 \leq t \leq 24 \end{cases}$
9	0.97	0	$\begin{cases} 4; 0 \leq t < 10 \\ 20; 10 \leq t < 22 \\ 4; 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,6; 0 \leq t < 10 \\ 2,7; 10 \leq t < 22 \\ 0,6; 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$

Предполагается, что множество линий для развития  $L = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (5, 6), (7, 8), (8, 9), (1, 4), (4, 7), (2, 5), (5, 8), (3, 6), (6, 9), (1, 5), (2, 6), (4, 8), (5, 9)\}$ ,

(представлены на рис. 3). Коэффициент потерь, плата за передачу и начальные пропускные способности равны нулю.



**Рисунок 3.** Структура множества линий для развития  $L$

Фиксированные и переменные затраты имеют вид  $e_f^{ij}(\Delta Q) = c_{ij}$ ,  $e_v^{ij}(\Delta Q) = a_{ij}\Delta Q^2 + b_{ij}\Delta Q$  (см. табл. 6).

**Таблица 6.** Данные по транспортным линиям

$(i, j)$	$a_{ij}$	$b_{ij}$	$c_{ij}$
(1,2)	0.02	0.01	0.015
(2,3)	0.01	0.02	0.025
(4,5)	0.015	0.023	0.017
(5,6)	0.01555	0.018	0.023
(7,8)	0.01	0.013	0.0185
(8,9)	0.012	0.025	0.01333
(1,4)	0.0193	0.014	0.01456
(4,7)	0.01113	0.022	0.01234
(2,5)	0.01712	0.01749	0.02145
(5,8)	0.0194	0.02224	0.0101
(3,6)	0.0194	0.0156	0.02343
(6,9)	0.01295	0.024	0.01944
(1,5)	0.01	0.0167	0.022223
(2,6)	0.0185	0.0101	0.013
(4,8)	0.0203	0.01451	0.0112
(5,9)	0.0111	0.0189	0.023

Численный эксперимент показал, что метод стохастического градиента сходится за ~20000 шагов с точностью  $eps = 0.01$  к значению  $Q^* = (0; 0.322; 0; 0.235; 0; 0; 0.215; 0.004; 0; 0.125; 0; 0.38; 0; 0; 0.361; 0; 0.07)$ . При этом значение критерия  $TW(Q^*) = 2903.587$ .



## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hogan W.* (1998): Competitive electricity market design: a wholesale primer // Harvard University, WP.
2. *Давидсон М.Р.* и др. (2004): Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия Академии наук. Теория и системы управления. -№ 3. -2004.– с. 72-83.
3. *Васин А.А.* , *Дайлова Е.А.* (2014, б): Модели развития сетевых рынков // Тезисы докладов Всероссийской конференции ЭКОМОД-2014.
4. *Васин А.А.* , *Дайлова Е.А.* (2014, в): Двухузловой рынок в условиях несовершенной конкуренции // Математическая Теория Игр и ее Приложения, т.2, в.3, с. 150–152.
5. *Васин А.А.* , *Дайлова Е.А.* (2014, а): Об оптимальной пропускной способности системы перемещения товара на двухузловом рынке // Вестник Московского университета. Серия 15: Прикладная математика и кибернетика. - № 3. - с.40-45.
6. *Vasin A., Dolmatova M., Kartunova P.* (2016): Optimization of energetic markets' transportinfrastructure. // VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Москва, 17-22 октября 2016 г.: Труды. Том I / Отв. ред. А.А.Васин, А.Ф.Измаилов. – М.:МАКС Пресс, 2016. – 224с.
7. *Коваленко А.Г.* Математические модели и методы анализа рассредоточенных рынков. Развитие моделей и методов теории гидравлических сетей, методов оптимизации и многокритериального анализа // Saarbrucken, Germany: Palmarium Academic Publishing, 2013. 324 с.
8. *Дайлова Е.А.* (2014): Теоретико-игровые модели форвардных и сетевых рынков однородного товара. Диссертация. – М.: МГУ.
9. *Vasin A., Dolmatova M.* Optimization of transmission capacities for multinodal markets. Procedia Computer Science. 91; 2016. p. 238-244.
10. *Васин А.А., Морозов В.В.* (2005): Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс.
11. Стофт С. Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии: Пер. с англ. – М: Мир, 2006. – 623с.
12. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. – М: Наука, 1979.
13. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 648 с.
14. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.