А.Ю. Важенцев

ПРОБЛЕМА ВНЕШНЕГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ОБЪЕДИНЕНИЯ ДВУХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ЭЛЛИПСОИДОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ [1]

1 Введение

В последнее время большой интерес приобрели исследования, относящиеся к области, именуемой теорией гарантированного эллипсоидального оценивания. Она объединяет методы построения точных внутренних и внешних аппроксимаций в классе эллипсоидов для различных множеств, как выпуклых, так и невыпуклых. Как правило, эти множества имеют большое практическое значение, но непосредственное обращение с ними связано со значительными трудностями в силу особенностей их строения или определенных сложностей их вычисления. Типичным примером является множество достижимости динамической системы, особенно при наличии ограничений на фазовые координаты (см. [1] и [2]). Другой класс примеров связан с задачами гарантированной идентификации, посвященными оцениванию неизвестных параметров некоторой динамической системы. В этом случае основная задача гарантированного подхода заключается в построении (или гарантированном оценивании) множества всех допустимых значений параметров исследуемой системы, совместимых с результатами наблюдений. Конструирование алгоритмов эллипсоидального оценивания легче всего производить в случае, когда имеют место естественные эллипсоидальные ограничения на параметры задачи. Это связано с наличием широко развитого аппарата эллипсоидального исчисления, включающего методы построения внутренних и внешних эллипсоидальных оценок для результатов различных операций над эллипсоидами. Наиболее полно эта тема освящается в [1], где в частности дается исчерпывающее решение данной проблемы для суммы и геометрической разности эллипсоидов. Менее изученными в этом плане остаются такие важные операции, как объединение и пересечение, хотя, к примеру, построение внутренних аппроксимаций для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства общего и профессионального образования, грант "Университеты России - фундаментальные исследования" N990891, и гранта РФФИ N0001-00646.

пересечения эллипсоидов играет ключевую роль в решении задачи синтеза управления для динамической системы при наличии эллипсоидальных ограничений на фазовые координаты (см. [1],[3]). Данная работа имеет своей целью частично восполнить данный пробел. В ней рассматривается проблема внешнего эллипсоидального оценивания объединения концентрических эллипсоидов. При этом делается акцент на построении целого семейства внешних недоминируемых аппроксимаций, позволяющих точно представить оцениваемое множество в виде пересечения всех оценок этого семейства. Постановка задачи именно в таком виде заимствована из [1] и связана с естественным стремлением наделить метод оценивания свойством неограниченного повышения точности аппроксимации за счет рассмотрения все большего и большего количества эллипсоидов. Внешние оценки объединения эллипсоидов представляют интерес прежде всего в силу их тесной связи с внутренними оценками пересечения эллипсоидов и некоторых других множеств. Эта связь обусловлена тем фактом, что объединение и пересечение выпуклых множеств являются в определенном смысле двойственными операциями относительно "полярного преобразования", то есть перехода от конкретных выпуклых множеств к их полярам. Рассмотрение объединения именно концентрических эллипсоидов связано с максимальным упрощением поставленной задачи, так как в этом случае и оцениваемое множество, и его аппроксимации, обладают центральной симметрией. Наличие метода внешнего оценивания даже в таком упрощенном случае можно успешно использовать при решении некоторых задач внутреннего оценивания несимметричных тел, которые можно свести к эквивалентным задачам внешнего оценивания симметричных тел посредством полярной двойственности при удачном выборе точки, принимаемой за начало координат. Последний раздел данной работы посвящен описанию некоторых классов множеств, двойственных объединению концентрических эллипсоидов. Кроме того, в нем приводятся конкретные примеры практического использования такой двойственности для получения внутренних эллипсоидальных оценок этих множеств.

2 Постановка задачи

Определение 1 *Эллипсоидом с центром $a \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательно определенной матрицей $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется выпуклый компакт $\mathcal{E}(a,Q) \in 2^{\mathbb{R}^n}$, обладающий следующей опорной функцией*

$$\rho\big(\ell \,|\, \mathcal{E}(a,Q)\big) = \langle a, \ell\rangle + \langle \ell, Q\ell\rangle^{1/2}, \quad \ell \in \mathbb{R}^n$$

Эллипсоид называется невырожденным, если его матрица Q положительно определена, и вырожденным в противном случае. Для невырожденного эллипсоида справедливо представление

$$\mathcal{E}(a,Q) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|x-a\|^2_{Q^{-1}} \le 1\big\}$$

Эллипсоид $\mathcal{E}$ будем называть *гарантированной* внешней (внутренней) аппроксимацией для множества $\mathcal{M}$, если $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ ($\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$). Далее под термином "аппроксимация" будет пониматься именно гарантированная аппроксимация. Среди всех эллипсоидальных оценок множества $\mathcal{M}$ особый интерес представляет класс неулучшаемых или *недоминируемых* оценок.

Определение 2 *Внешняя (внутренняя) эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}$ множества $\mathcal{M}$ называется недоминируемой, если она является минимальной (максимальной) по включению среди всех возможных эллипсоидальных аппроксимаций $\mathcal{M}$. Последнее означает, что не существует другого эллипсоида $\mathcal{E}_0 \ne \mathcal{E}$, такого что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{M}$).*

Очевидно, что среди методов эллипсоидального оценивания, наиболее предпочтительными являются те, которые позволяют строить именно недоминируемые аппроксимации, или, в крайнем случае, близкие к ним.

В данной работе рассматривается следующая задача. Для двух данных концентрических эллипсоидов $\mathcal{E}(0,Q_1)$ и $\mathcal{E}(0,Q_2)$, таких что

$$\mathcal{E}(0,Q_1) \nsubseteq \mathcal{E}(0,Q_2), \quad \mathcal{E}(0,Q_1) \nsubseteq \mathcal{E}(0,Q_2),$$

требуется построить семейство эллипсоидов $\big\{\mathcal{E}_\alpha \;\big|\; \alpha \in \mathcal{A}\big\}$, удовлетворяющих требованиям:

1. $\mathcal{E}(0,Q_1) \cup \mathcal{E}(0,Q_2) \subseteq \mathcal{E}_\alpha$

2. $\mathcal{E}_\alpha$ – недоминируемая аппроксимация для $\mathcal{E}(0,Q_1) \cup \mathcal{E}(0,Q_2)$

3. $\mathrm{co}\big(\mathcal{E}(0,Q_1)\cup\mathcal{E}(0,Q_2)\big)=\bigcap\big\{\mathcal{E}_\alpha\;\big|\;\alpha\in\mathcal{A}\big\}$

Прежде всего, отметим, что в силу симметричности оцениваемого множества относительно нуля, разумно желать сохранения этого же свойства и у его аппроксимаций. Поэтому далее будет производится построение аппроксимаций с центром только в начале координат. Учитывая вид опорной функции эллипсоида, поставленную задачу в этом случае можно переформулировать в терминах симметричных матриц следующим образом. Для любых двух несравнимых неотрицательно определенных симметричных матриц Q_1 и Q_2 требуется построить множество симметричных матриц $\big\{Q_\alpha\;\big|\;\alpha\in\mathcal{A}\big\}$, таких что

1. $Q_1\le Q_\alpha,\;Q_2\le Q_\alpha$
2. не существует ни одной симметричной матрицы $Q^*\ne Q_\alpha$, обладающей свойствами $Q_1\le Q^*\le Q^\alpha$ и $Q_2\le Q^*\le Q^\alpha$
3. для почти каждого $\ell\in I\!\!R^n$ найдется такой $\alpha\in\mathcal{A}$, что выполняется равенство $\langle\ell,Q_\alpha\ell\rangle=\max\big\{\langle\ell,Q_1\ell\rangle,\langle\ell,Q_2\ell\rangle\big\}$

3 Достаточное условие недоминируемости гарантированных эллипсоидальных оценок

Решение поставленной задачи начнем с построения легкопроверяемого достаточного условия недоминируемости гарантированных эллипсоидальных оценок. Результаты, представленные в этом разделе, помимо своей значимости для данной работы, обладают самостоятельной ценностью, а проблема нахождения критерия недоминируемости без сомнения заслуживает отдельного изучения.

Далее через E_n будем обозначать единичную матрицу размерности n, через A' – операцию транспонирования матрицы $A\in I\!\!R^{n\times m}$, а через $\mathrm{co}\,\mathcal{M}$ и $\mathrm{aff}\,\mathcal{M}$ – соответственно выпуклую и аффинную оболочки множества $\mathcal{M}\in 2^{R^n}$. Достаточное условие недоминируемости базируется на следующем утверждении:

Теорема 1 *Пусть в пространстве $I\!\!R^n$ задана произвольная система афинно-независимых векторов $x_0,\ldots,x_n$ и некоторая система нормированных векторов $\ell_0,\ldots,\ell_n$ ($\|\ell_i\|=1$). Обозначим через $\mathcal{L}$ семейство невырожденных эллипсоидов $\mathcal{E}(a,Q)$, таких что $x_i\in\partial\mathcal{E}(a,Q)$ и $\langle\ell_i,x_i\rangle=\rho(\ell_i|\mathcal{E}(a,Q))$, $i=0,\ldots,n$.*

Тогда семейство $\mathcal{L}$ состоит не более, чем из одного эллипсоида.

Доказательство: Далее будем предполагать, что $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Прежде всего покажем, что $\mathcal{L}$ является семейством концентрических эллипсоидов. Рассмотрим произвольный эллипсоид $\mathcal{E}(a, Q) \in \mathcal{L}$ и докажем, что его центр однозначно определяется через вектора x_i и ℓ_i. Если существуют два таких вектора ℓ_i и ℓ_j, что $\ell_i = -\ell_j$, то в силу центральной симметрии эллипсоида его центр $a = (x_i + x_j)/2$. В случае, когда среди нормалей ℓ_i нет попарно коллинеарных, можно утверждать, что для любой пары $i \neq j$ вектор a принадлежит гиперплоскости

$$\mathcal{H}_{ij} = \operatorname{aff}\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^n \Big| \langle x - x_i, \ell_i \rangle = 0,\ \langle x - x_j, \ell_j \rangle = 0 \right\} \right) =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \Big| \left\langle n_{ij},\ x - \frac{x_i + x_j}{2} \right\rangle = 0 \right\},$$

где

$$n_{ij} = \ell_i \langle \ell_j, x_i - x_j \rangle + \ell_j \langle \ell_i, x_i - x_j \rangle.$$

Это очевидно для случая $Q = E_n$ (рис. 1), а в общем случае утверждение справедливо в силу своей инвариантности относительно аффинного преобразования. Таким образом, вектор a можно однозначно определить из системы

$$\left\langle n_{i0},\ a - \frac{x_i + x_0}{2} \right\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

Невырожденность матрицы системы (3.1) достаточно проверить для $Q = E_n$. В этом случае $n_{i0} = (\langle x_i, x_0 \rangle - 1)(x_i - x_0)$, и в силу аффинной независимости векторов x_i, система векторов n_{i0}, $i = 1, \ldots, n$ обладает линейной независимостью.

Осталось обосновать, что матрица Q эллипсоида $\mathcal{E}(a, Q)$ также определяется однозначно. Действительно, вектор $Q^{-1}(x_i - a)$ является нормалью к $\partial\mathcal{E}(a, Q)$ в точке x_i и связан с нормалью ℓ_i соотношением

$$Q^{-1}(x_i - a) = \frac{\ell_i}{\langle \ell_i, x_i - a \rangle}.$$

Поэтому преобразование Q^{-1} однозначно определяется своим действием на систему линейно независимых векторов $\{x_i - x_0\}_{i=1}^n$:

$$Q^{-1}(x_i - x_0) = \frac{\ell_i}{\langle \ell_i, x_i - a \rangle} - \frac{\ell_0}{\langle \ell_0, x_0 - a \rangle}.$$

Таким образом, мы не только доказали теорему, но и предложили конкретный алгоритм нахождения параметров единственного эллипсоида $\mathcal{E}(a, Q) \in \mathcal{L}$. □

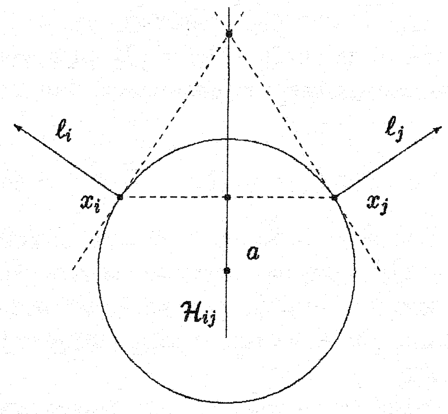

Рис 1.

Из доказанной теоремы непосредственно следует способ проверки гарантированной эллипсоидальной аппроксимаций на недоминируемость:

Следствие 1 *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *рассмотрим произвольный выпуклый компакт* $\mathcal{M}$ *и эллипсоид* $\mathcal{E}$ *такой, что* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$). *Пусть известно, что выполнено одно из следующих соотношений:*

$$\dim \operatorname{co}\{\ell \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\ell|\mathcal{E}) = \rho(\ell|\mathcal{M})\} = n \tag{3.2}$$

$$\dim \operatorname{co}(\partial\mathcal{E} \cap \partial\mathcal{M}) = n \tag{3.3}$$

Тогда для $\mathcal{M}$ *аппроксимация* $\mathcal{E}$ *является недоминируемой.*

Доказательство: Отметим, что в рассматриваемом случае требования (3.2) и (3.3) эквивалентны и каждое из них равносильно существованию аффинно-независимой системы $\{x_i \in \partial\mathcal{E} \cap \partial\mathcal{M}\}_{i=0}^{n}$. Через ℓ_i обозначим нормаль к $\partial\mathcal{E}$ в точке x_i. Справедливо утверждать, что для любого другого эллипсоида $\mathcal{E}_0$, являющегося внутренней (внешней) аппроксимацией множества $\mathcal{M}$ и доминирующего $\mathcal{E}$, поверхность $\partial\mathcal{E}_0$ проходила бы через те же точки x_i с теми же нормалями ℓ_i, $i = 0, \ldots, n$. Поэтому существование хотя бы одной такой аппроксимации противоречило бы теореме 1. □

4 Внешнее эллипсоидальное оценивание объединения концентрических эллипсоидов

Рассмотрим задачу внешнего эллипсоидального оценивания объединения эллипсоидов $\mathcal{E}(0, Q_1) \cup \mathcal{E}(0, Q_2)$. Прежде всего отметим, что в вырожденном случае, когда $\ker(Q_1 - Q_2) \neq \{0\}$, справедливо потребовать, чтобы любая эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}(0, Q^+)$ удовлетворяла соотношению

$$\rho(\ell|\mathcal{E}(0, Q^+)) = \rho(\ell|\mathcal{E}(0, Q_1)) = \rho(\ell|\mathcal{E}(0, Q_2)), \quad \forall \ell \in \ker(Q_1 - Q_2)$$

А поскольку это условие однозначно определяет действие отображения Q^+ на $\ker(Q_1 - Q_2)$, рассматриваемую задачу можно сузить на подпространство $\ker^{\perp}(Q_1 - Q_2)$, где свойство вырожденности уже отсутствует. Поэтому далее, не ограничивая общности, будем считать, что $\det(Q_1 - Q_2) \neq 0$.

Следующая теорема полностью решает поставленную задачу для диагональных матриц Q_1 и Q_2, что нисколько не ограничивает общности, так как в общем случае матрицы двух эллипсоидов всегда можно одновременно диагонализировать посредством некоторого линейного преобразования пространства.

Теорема 2 *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *заданы два эллипсоида* $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(0, Q_1)$ *и* $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(0, Q_2)$, *где* $Q_1 = \mathrm{diag}\{\mu_i\}_{i=1}^n, Q_2 = \mathrm{diag}\{\nu_i\}_{i=1}^n$, *и пусть известно, что* $\mu_i > \nu_i$ *для* $i = 1, \ldots, m$ *и* $\mu_i < \nu_i$ *для* $i = m+1, \ldots, n$. *Определим эллипсоид* $\mathcal{E}^+[B] = \mathcal{E}\left(0,\ Q + RB^{-1}R\right)$, *где*

$$Q = \mathrm{diag}\{\min(\mu_i, \nu_i)\}_{i=1}^n, \quad R = \mathrm{diag}\{|\mu_i - \nu_i|^{1/2}\}_{i=1}^n$$

Параметризация:

$$B \in \mathcal{B} = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; B = \begin{pmatrix} E_m & T \\ T' & E_{n-m} \end{pmatrix},\ T \in \mathbb{R}^{m\times n-m},\ TT' \leq E_m \right\}$$

Справедливы следующие утверждения

1. $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}^+[B]$
2. $\mathcal{E}^+[B]$ *– минимальная по включению аппроксимация*
3. $\mathrm{co}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \bigcap \{\mathcal{E}^+[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$

Доказательство: Возьмем произвольную матрицу $T \in I\!R^{m \times n-m}$, такую что $TT' \leq E_m$, и зафиксируем $B \in \mathcal{B}$ с внедиагональной подматрицей T. Сначала убедимся, что $Q + RB^{-1}R > 0$. Для этого достаточно показать, что $B > 0$. Для произвольного вектора $\ell = (l_1, \ldots, l_n) \neq 0$ проверим выполнение неравенства

$$\langle \ell, B\ell \rangle > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \ell_1, \ell_1 \rangle + \langle \ell_2, \ell_2 \rangle + 2\langle \ell_1, T\ell_2 \rangle > 0, \tag{4.1}$$

где $\ell_1 = (l_1, \ldots l_m)$, $\ell_2 = (l_{m+1}, \ldots l_n)$. Для этого перепишем неравенство (4.1) в виде, в котором оно станет очевидным:

$$\langle \ell_2 + T'\ell_1, \ell_2 + T'\ell_1 \rangle + \langle \ell_1, (E_m - TT')\ell_1 \rangle > 0$$

Введем обозначения:

$$Q_i^* = R^{-1}(Q_i - Q)R^{-1} \quad \Rightarrow \quad Q_1^* = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся тем, что отношение включения $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}^+[B]$ для концентрических эллипсоидов эквивалентно неравенству $Q_i \leq Q + RB^{-1}R$ для их матриц. Учитывая, что $Q_i - Q \geq 0$, последнее соотношение переписывается в виде $R^{-1}(Q_i - Q)R^{-1} = Q_i^* \leq B^{-1}$. Отсюда заключаем, что любое из трех утверждений теоремы относительно $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}^+[B]$ справедливо тогда и только тогда, когда то же самое утверждение имеет место для эллипсоидов $\mathcal{E}(0, Q_1^*), \mathcal{E}(0, Q_2^*)$ и $\mathcal{E}(0, B^{-1})$. Поэтому далее именно для этих множеств будут проверяться все требуемые свойства.

Прежде всего убедимся, что $Q_1^* \leq B^{-1}$. Это неравенство вытекает из следующего достаточно очевидного соотношения

$$\mathcal{E}\left(0, Q_1^*\right) = \mathcal{E}\left(0, B^{-1}\right) \cap \left\{x \in I\!R^n \;\middle|\; x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0\right\}$$

Аналогично показывается, что $Q_2^* \leq B^{-1}$.

Рассмотрим второе утверждение теоремы. Непосредственной проверкой можно убедиться, что любой вектор $e_i = (x_1, \ldots, x_n)$, такой что $x_i = 1$ и $x_j = 0$ для всех $j \neq i$, удовлетворяет включениям

$$e_i \in \begin{cases} \partial\mathcal{E}(0, Q_1^*) \cap \partial\mathcal{E}(0, B^{-1}), & \text{для } i = 1, \ldots, m \\ \partial\mathcal{E}(0, Q_2^*) \cap \partial\mathcal{E}(0, B^{-1}), & \text{для } i = m+1, \ldots, n \end{cases}$$

что в силу следствия 1 гарантирует недоминируемость аппроксимации $\mathcal{E}(0, B^{-1})$ для множества $\mathcal{E}(0, Q_1^*) \cup \mathcal{E}(0, Q_2^*)$.

Для доказательства третьего утверждения теоремы, достаточно проверить, что для почти каждого $\ell = (l_1, \dots, l_n)$ найдется матрица $B \in \mathcal{B}$, такая что

$$\rho(\ell|\mathcal{E}(0, Q_1^*) \cup \mathcal{E}(0, Q_2^*)) = \rho(\ell|\mathcal{E}(0, B^{-1})) \tag{4.2}$$

Возьмем произвольный вектор ℓ, такой что

$$\rho^2(\ell|\mathcal{E}(0, Q_1^*)) = \langle \ell, Q_1^* \ell \rangle = \|\ell_1\|^2 > \|\ell_2\|^2 = \langle \ell, Q_2^* \ell \rangle = \rho^2(\ell|\mathcal{E}(0, Q_2^*))$$

Здесь $\ell_1 = (l_1, \dots, l_m)$, $\ell_2 = (l_{m+1}, \dots, l_n)$. Построим такую матрицу $B \in \mathcal{B}$, для которой $\langle \ell, B^{-1}\ell \rangle = \langle \ell, Q_1^* \ell \rangle$. Рассмотрим функцию $F(\ell) = \langle \ell, B^{-1}\ell \rangle - \langle \ell, Q_1^* \ell \rangle$. В силу ее выпуклости и неотрицательности, условие $F(\ell) = 0$ эквивалентно требованию $\nabla F(\ell) = 0$, из которого получаем

$$BQ_1^*\ell = \ell \quad \Leftrightarrow \quad T'\ell_1 = \ell_2, \quad TT' \le E_m$$

Перепишем последнее равенство в терминах столбцов $p_1, \dots, p_{n-m}$ матрицы T :

$$\langle p_i, \ell_1 \rangle = l_{m+i}, \quad i = 1, \dots, n-m, \quad p_1 p_1' + \dots + p_{n-m} p_{n-m}' \le E_m$$

Построим вектора p_i по индукции. Базис индукции

$$p_1 \in P_1 = \{ p \in \mathbb{R}^m \mid p \in \mathcal{E}(0, E_m), \quad \langle p, \ell_1 \rangle = l_{m+1} \}$$

где $P_1 \ne \emptyset$ в силу того, что $\rho^2(\ell_1|\mathcal{E}(0, E_m)) = \|\ell_1\|^2 > \|\ell_2\|^2 \ge l_{m+1}^2$. Предположив, что $p_1, \dots, p_{k-1}$ уже построены, выберем p_k :

$$p_k \in P_k = \{ p \in \mathbb{R}^m \mid p \in \mathcal{E}\big(0, E_m - \sum_{i=1}^{k-1} p_i p_i'\big), \quad \langle p, \ell_1 \rangle = l_{m+k} \}.$$

Необходимое условие $P_k \ne \emptyset$ обосновывается следующим образом

$$\rho^2\Big(\ell_1 \Big| \mathcal{E}\big(0, E_m - \sum_{i=1}^{k-1} p_i p_i'\big)\Big) = \|\ell_1\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} l_{m+i}^2 > \sum_{i=k}^{n-m} l_{m+i}^2 \ge l_{m+k}^2$$

Аналогично для любого ℓ, такого что $\rho(\ell|\mathcal{E}(0, Q_1^*)) < \rho(\ell|\mathcal{E}(0, Q_2^*))$, можно построить $B \in \mathcal{B}$, удовлетворяющую равенству $\langle \ell, B^{-1}\ell \rangle = \langle \ell, Q_2^* \ell \rangle$. Таким образом, теорема полностью доказана. □

Представленный в теореме 2 способ внешнего эллипсоидального оценивания обладает рядом определенных недостатков, затрудняющих его практическое использование. Жесткое требование диагональности матриц Q_1 и Q_2 не позволяет получить удобной явной формулы для эллипсоидальных оценок во общем случае, что характеризует предложенный метод скорее, как алгоритмический, а не явный. В следующей теореме описывается еще один способ построения внешних оценок, эквивалентный описанному в теореме 2, но пригодный для использования в общем случае.

Теорема 3 *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *заданы два концентрических эллипсоида* $\mathcal{E}(0,Q_1)$ *и* $\mathcal{E}(0,Q_2)$. *Предположим, что* Q_2-Q_1 *имеет ровно* m *положительных собственных значений. Определим эллипсоид* $\mathcal{E}^+[W]$ *по правилу:*

$$\mathcal{E}^+[W]=\mathcal{E}(0,Q^+[W])=\mathcal{E}\big(0,Q_1+(Q_2-Q_1)WW'(Q_2-Q_1)\big).$$

Параметризация: $W\in\mathcal{W}=\{W\in\mathbb{R}^{n\times m}\mid W'(Q_2-Q_1)W=E_m\}$.
Справедливы следующие утверждения:

1. $\mathcal{E}(0,Q_1)\cup\mathcal{E}(0,Q_2)\subset\mathcal{E}^+[W]$
2. $\mathcal{E}^+[W]$ *– минимальная по включению аппроксимация*
3. $\mathrm{co}\big(\,\mathcal{E}(0,Q_1)\cup\mathcal{E}(0,Q_2)\,\big)=\bigcap\{\mathcal{E}^+[W]\mid W\in\mathcal{W}\}$

Доказательство: Обозначим через $G\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такую неособую матрицу, что $G'Q_1G=D_1=\mathrm{diag}\{\mu_i\}_{i=1}^n$ и $G'Q_2G=D_2=\mathrm{diag}\{\nu_i\}_{i=1}^n$, причем $\mu_i>\nu_i$ для $i=1,\dots,m$, и $\mu_i<\nu_i$ для $i=m+1,\dots,n$. Далее определим матрицы $R=\mathrm{diag}\{|\mu_i-\nu_i|^{1/2}\}_{i=1}^n$ и $D=\mathrm{diag}\{\min(\mu_i,\nu_i)\}_{i=1}^n$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\{G\mathcal{E}^+[W]\mid W\in\mathcal{W}\}=\{\mathcal{E}(0,D+RB^{-1}R)\mid B\in\mathcal{B}\}.$$

Зафиксируем произвольную $W\in\mathcal{W}$ и построим $B\in\mathcal{B}$ так, чтобы

$$G'\,\big(Q_1+(Q_2-Q_1)WW'(Q_2-Q_1)\big)\,G=D+RB^{-1}R. \tag{4.3}$$

Рассмотрим такое представление: $W=GR^{-1}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}$, $P_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $P_2\in\mathbb{R}^{n-m\times m}$. Нетрудно проверить, что $W\in\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда $P_1'P_1-P_2'P_2=E_m$. Следовательно, матрица P_1 неособая. Представим $P_2=T'P_1$, где $T\in\mathbb{R}^{m\times n-m}$. Тогда имеем равенство

$$P_1'(E_m-TT')P_1=E\quad\Rightarrow\quad P_1P_1'=(E_m-TT')^{-1}.$$

В силу полярного разложения $P_1 = SU$, где $S = S', UU' = E_m$. Отсюда получаем, что $P_1 = (E_m - TT')^{-1/2}U$, $P_2 = T'(E_m - TT')^{-1/2}U$, где T, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условию $TT' \le E_m$. Итого, имеем представление

$$W = GR^{-1}\begin{pmatrix} E_m \\ T' \end{pmatrix}(E_m - TT')^{-1/2}U. \tag{4.4}$$

Используя соотношение (4.4), и применяя равенства

$$G'(Q_2 - Q_1)GR^{-1} = R\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}, \quad G'Q_1G = D + R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix}R,$$

получим, что $G'\left(Q_1 + (Q_2 - Q_1)WW'(Q_2 - Q_1)\right)G = D + R\widehat{B}R$, где

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} (E_m - TT')^{-1} & -(E_m - TT')^{-1}T \\ -T'(E_m - TT')^{-1} & E_{n-m} + T'(E_m - TT')^{-1}T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & T \\ T' & E_{n-m} \end{pmatrix}^{-1},$$

что и требовалось показать. Аналогично для произвольной матрицы $B \in \mathcal{B}$ возможно построить матрицу $W \in \mathcal{W}$ так, чтобы выполнялось равенство (4.3). Достаточно воспользоваться соотношением (4.4), положив $U = E_m$. Таким образом, семейство эллипсоидов $\mathcal{E}^+[W]$ с точностью до линейного преобразования O совпадает с семейством внешних аппроксимаций, описанных в теореме 2. $\square$

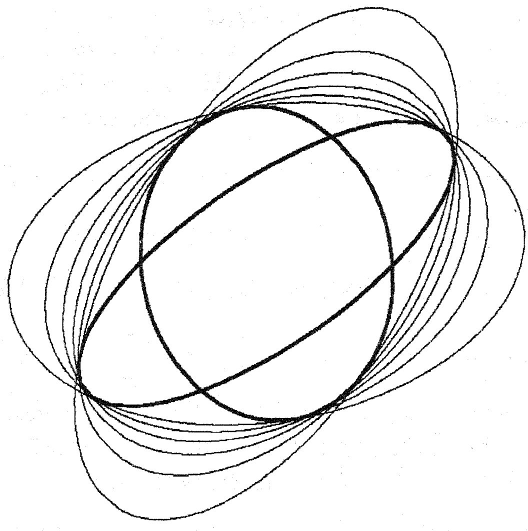

Рис 2.

Следствие 2 *Используя теорему 3, можно получить еще одно представление для семейства оценок множества $\mathcal{E}(0, Q_1) \cup \mathcal{E}(0, Q_2)$ при условии, что $Q_2 - Q_1$ имеет ровно m положительных собственных значений:*

$$\mathcal{E}^+[\widetilde{W}] = \mathcal{E}\left(0, Q_1 + (Q_2 - Q_1)\widetilde{W}\left[\widetilde{W}'(Q_2 - Q_1)\widetilde{W}\right]^{-1}\widetilde{W}'(Q_2 - Q_1)\right),$$

$$\widetilde{W} \in \widetilde{\mathcal{W}} = \left\{\widetilde{W} \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid \widetilde{W}'(Q_2 - Q_1)\widetilde{W} > 0\right\}.$$

Замечание 1 *Важным случаем объединения концентрических эллипсоидов является ситуация, когда матрица $Q_2 - Q_1$ имеет ровно одно положительное собственное значение. Достаточно заметить, что в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, это условие обязательно выполняется либо для $Q_2 - Q_1$, либо для $Q_1 - Q_2$ (подразумевается, что эллипсоиды не сравнимы по включению и $\det(Q_2 - Q_1) \neq 0$). В этом случае семейство аппроксимаций выглядит следующим образом (рис. 2):*

$$\mathcal{E}^+[\ell_0] = \mathcal{E}\left(0, Q_1 + \frac{(Q_2 - Q_1)\ell_0\ell_0'(Q_2 - Q_1)}{\langle \ell_0, (Q_2 - Q_1)\ell_0\rangle}\right). \tag{4.5}$$

$$\ell_0 \in \mathcal{L} = \left\{\ell \in \mathbb{R}^n \mid \langle \ell, (Q_2 - Q_1)\ell\rangle > 0\right\}.$$

Главным достоинством описанного в теореме 3 метода оценивания заключается в том, что он предоставляет явную формулу для аппроксимирующего эллипсоида в общем случае. Это существенно повышает удобство использования предлагаемых оценок, а также значительно упрощает их анализ, например, выделение из всего множества оценок отдельных представителей, обладающих оптимальными в том или ином смысле свойствами. Задача выбора возможных критериев оптимальности и способы выделения оптимальных оценок подробно рассматриваются в работе [1].

5 Приложения

Предложенный в предыдущем разделе метод внешнего эллипсоидального оценивания объединения концентрических эллипсоидов позволяет достаточно просто получать формулы внутренних эллипсоидальных оценок для целого ряда множеств. Ход рассуждений при этом следующий. Рассмотрим выпуклый компакт $\mathcal{M}$ и некоторый вектор $\theta \in \operatorname{int}\mathcal{M}$.

Справедливо утверждать, что для произвольного $\widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(a, Q)$, такого что $(\mathcal{M} - \theta)^\circ \subseteq \widehat{\mathcal{E}}$, выполняется включение

$$\theta + \widehat{\mathcal{E}}^\circ \subseteq \mathcal{M}$$

где эллипсоид $\widehat{\mathcal{E}}^\circ = \mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ)$ есть поляра к $\widehat{\mathcal{E}}$, и вычисляется по правилу

$$a^\circ = -\frac{Q^{-1}a}{1 - \|a\|^2_{Q^{-1}}}, \quad Q^\circ = \frac{Q^{-1}}{1 - \|a\|^2_{Q^{-1}}} + a^\circ a^{\circ\prime}.$$

При этом, если $\widehat{\mathcal{E}}$ – недоминируемая внешняя оценка для $(\mathcal{M} - \theta)^\circ$, то $\theta + \widehat{\mathcal{E}}^\circ$ – недоминируемая внутренняя оценка для $\mathcal{M}$. Кроме того, если для некоторого семейства эллипсоидов $\{\mathcal{E}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ выполняется равенство

$$\bigcap \{\mathcal{E}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} = (\mathcal{M} - \theta)^\circ$$

то аналогичное равенство справедливо и для поляр

$$\overline{\bigcup \{\theta + \mathcal{E}_\alpha^\circ \mid \alpha \in \mathcal{A}\}} = \mathcal{M}$$

Таким образом, если для рассматриваемого $\mathcal{M}$ найдется такой вектор $\theta \in \operatorname{int} \mathcal{M}$, что справедливо представление

$$(\mathcal{M} - \theta)^\circ = \operatorname{co}\big(c + \mathcal{E}(0, Q_1) \cup \mathcal{E}(0, Q_2)\big), \tag{5.1}$$

для получения семейства внутренних эллипсоидальных аппроксимаций $\mathcal{M}$ достаточно воспользоваться одним из методов построения внешних оценок для $\mathcal{E}(0, Q_1) \cup \mathcal{E}(0, Q_2)$, описанных в предыдущем разделе. Рассмотрим некоторые классы множеств, для которых применим вышеописанный метод внутреннего эллипсоидального оценивания.

Пересечение двух концентрических эллипсоидов. Очевидно, что предлагаемый метод позволяет очень просто получить внутренние оценки для множества вида $M = c + \mathcal{E}(0, Q_1) \cap \mathcal{E}(0, Q_2)$. В данном случае задача построения внутренних оценок $\mathcal{M}$ сводится к построению внешних оценок поляры $(\mathcal{M} - c)^\circ = \mathcal{E}(0, Q_1^{-1}) \cup \mathcal{E}(0, Q_2^{-1})$.

Пересечение эллипсоида с двумя полупространствами. Пусть дан эллипсоид $\mathcal{E}(a, Q)$ и два полупространства

$$\mathcal{H}_i = \{x \in I\!\!R^n \mid \langle b_i, x\rangle \le d_i\}, \quad i = 1, 2 \tag{5.2}$$

Будем считать выполненными следующие предположения

$$\mathcal{E}(a, Q)\backslash\mathcal{H}_i \ne \emptyset, \; i = 1, 2; \quad \overline{\mathcal{E}(a, Q)\backslash\mathcal{H}_1} \cap \overline{\mathcal{E}(a, Q)\backslash\mathcal{H}_2} = \emptyset \tag{5.3}$$

Исследуем множество $\mathcal{M} = \mathcal{E}(a,Q) \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ на возможность его симметризации посредством полярного преобразования. Для поляры $(\mathcal{M}-\theta)^\circ$ справедливо представление

$$(\mathcal{M}-\theta)^\circ = \mathrm{co}\left(\mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ), \frac{b_1}{d_1 - \langle b_1, \theta\rangle}, \frac{b_2}{d_2 - \langle b_2, \theta\rangle}\right),$$

где $\mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ) = (\ \mathcal{E}(a,Q) - \theta\ )^\circ$. Очевидно, что $(\mathcal{M}-\theta)^\circ$ будет обладать центральной симметрией только в случае выполнения равенства

$$a^\circ = -\frac{Q^{-1}(a-\theta)}{1 - \|a-\theta\|^2_{Q^{-1}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{d_1 - \langle b_1, \theta\rangle} + \frac{b_2}{d_2 - \langle b_2, \theta\rangle}\right) \tag{5.4}$$

Отсюда получаем выражение для искомого вектора θ, в справедливости которого можно убедиться непосредственной подстановкой в равенство (5.4):

$$\theta = a + \frac{\sqrt{1-\alpha_2^2}\dfrac{Qb_1}{\langle b_1, Qb_1\rangle^{1/2}} + \sqrt{1-\alpha_1^2}\dfrac{Qb_2}{\langle b_2, Qb_2\rangle^{1/2}}}{\alpha_1\sqrt{1-\alpha_2^2} + \alpha_2\sqrt{1-\alpha_1^2}}, \quad \alpha_i = \frac{d_i - \langle b_i, a\rangle}{\langle b_i, Qb_i\rangle^{1/2}}$$

Отметим, что определенная таким образом θ удовлетворяет условию $\theta \in \mathrm{int}\,\mathcal{M}$ в силу предположений (5.3), и поэтому для него справедливо представление

$$\Big(\ \mathcal{E}(a,Q) \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 - \theta\ \Big)^\circ = \mathrm{co}\Big(\ \mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ) \cup \mathcal{E}(a^\circ, b_0 b_0')\ \Big),$$

где

$$b_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{d_1 - \langle b_1, \theta\rangle} - \frac{b_2}{d_2 - \langle b_2, \theta\rangle}\right) \tag{5.5}$$

Используя данное представление, несложно построить семейство внутренних недоминируемых оценок для $\mathcal{M}$ (Рис.3).

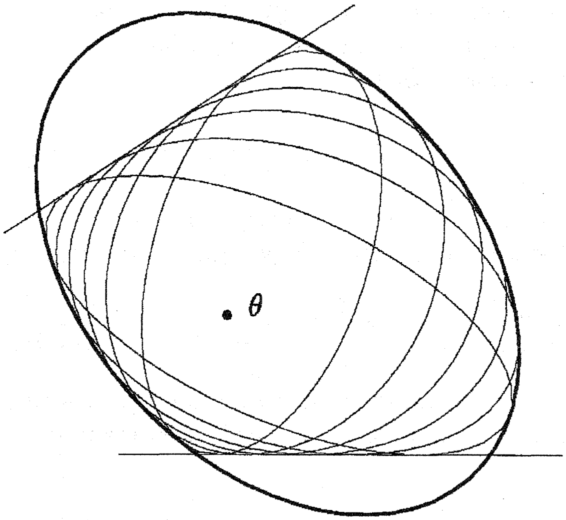

Рис 3.

Пересечение конуса с двумя полупространствами. Пусть дан выпуклый конус $\mathcal{K}$, определяемый соотношением

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in I\!R^n \;\middle|\; \|x-a\|^2_{S^{-1}} \geq 0,\ \langle x-a, h\rangle > 0 \right\},$$

где S – симметричная невырожденная матрица, имеющая ровно одно положительное собственное значение, $h \in I\!R^n$ удовлетворяет условию $\langle h, S^{-1}h\rangle > 0$. Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ определяются равенствами (5.2). Покажем, что в случае, когда $\mathcal{M}$ – ограничено и выполняются условия

$$\mathcal{K}\backslash\mathcal{H}_1 \neq \emptyset, \quad \mathcal{K}\backslash\mathcal{H}_2 \neq \emptyset, \quad \overline{\mathcal{K}\backslash\mathcal{H}_1} \cap \overline{\mathcal{K}\backslash\mathcal{H}_2} = \emptyset,$$

множество $\mathcal{M}$ можно симметризовать посредством полярного преобразования. Для поляры $(\mathcal{M}-\theta)^\circ$ справедливо представление

$$(\mathcal{M}-\theta)^\circ = \mathrm{co}\left((\mathcal{K}-\theta)^\circ, \frac{b_1}{d_1 - \langle b_1, \theta\rangle}, \frac{b_2}{d_2 - \langle b_2, \theta\rangle} \right),$$

В свою очередь поляра $(\mathcal{K}-\theta)^\circ$ имеет вид:

$$(\mathcal{K}-\theta)^\circ = \mathrm{co}\big(0, \mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ)\big), \quad a^\circ = \frac{S^{-1}(a-\theta)}{\|a-\theta\|^2_{S^{-1}}}, \quad Q^\circ = \frac{-S^{-1}}{\|a-\theta\|^2_{S^{-1}}} + a^\circ a^{\circ\prime},$$

Отметим, что эллипсоид $\mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ)$ вырожденный, и удовлетворяет равенству

$$\mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ) = \Big\{ x \in I\!R^n \;\Big|\; \langle x, Sx\rangle \geq 0 \Big\} \cap \Big\{ x \in I\!R^n \;\Big|\; \langle x, a-\theta\rangle = 1 \Big\}$$

Таким образом, чтобы $(\mathcal{M} - \theta)^\circ$ было симметричным относительно a°, достаточно выбрать $\theta \in \operatorname{int}\mathcal{M}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$a^\circ = \frac{S^{-1}(a-\theta)}{\|a-\theta\|^2_{S^{-1}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{d_1 - \langle b_1, \theta\rangle} + \frac{b_2}{d_2 - \langle b_2, \theta\rangle} \right) \tag{5.6}$$

Отсюда получаем следующую формулу для искомого θ :

$$\theta = a + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2 \dfrac{Sb_1}{\langle b_1, Sb_1\rangle^{1/2}} - 2\alpha_2\alpha_1^2 \dfrac{Sb_2}{\langle b_2, Sb_2\rangle^{1/2}}}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}, \quad \alpha_i = \frac{d_i - \langle b_i, a\rangle}{\langle b_i, Sb_i\rangle^{1/2}}.$$

Для определенного таким образом вектора θ будет выполняться равенство

$$\Big(\mathcal{K} \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 - \theta \Big)^\circ = \mathrm{co}\Big(\mathcal{E}(a^\circ, Q^\circ) \cup \mathcal{E}(a^\circ, b_0 b_0') \Big),$$

где вектор b_0 удовлетворяет (5.5). Как и в предыдущем примере, используя данное представление, можно получить формулы внутренних эллипсоидальных аппроксимаций для множества $\mathcal{K} \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ (рис. 4).

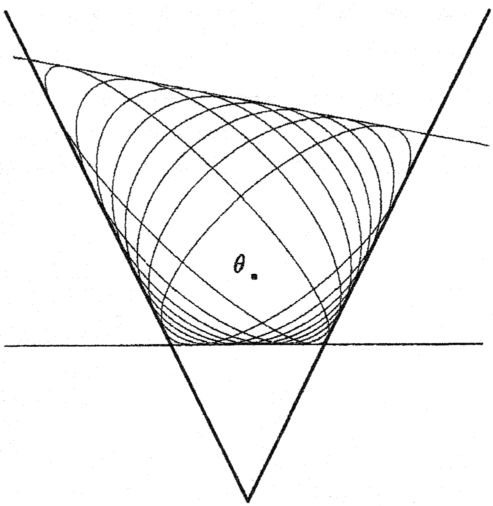

Рис 4.

Помимо множеств, перечисленных в двух последних примерах, представление (5.1) при соответствующем выборе вектора $\theta \in \operatorname{int}\mathcal{M}$ можно получить для множеств вида $\mathcal{M} = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{P}$ может быть эллиптическим цилиндром, эллиптическим параболоидом или эллиптическим гиперболоидом. Справедливо утверждение, что искомый θ существует во всех упомянутых случаях при условии, что $\mathcal{M}$ – ограничено и выполняются требования:

$$\mathcal{P}\backslash\mathcal{H}_1 \neq \emptyset, \quad \mathcal{P}\backslash\mathcal{H}_2 \neq \emptyset, \quad \overline{\mathcal{P}\backslash\mathcal{H}_1} \cap \overline{\mathcal{P}\backslash\mathcal{H}_2} = \emptyset$$

При этом в получающемся представлении (5.1) одна из матриц Q_1 или Q_2 будет иметь вид b_0b_0', где вектор b_0 удовлетворяет (5.5), а значит либо $Q_2 - Q_1$, либо $Q_1 - Q_2$ имеет только одно положительное собственное значение, и следовательно для построения внешних эллипсоидальных оценок $(\mathcal{M} - \theta)^\circ$ можно воспользоваться формулой (4.5).

Литература

[1] Kurzhanski A.B, Valyi I., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 1997.

[2] Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* М.: Наука. 1998.

[3]Важенцев А.Ю. *О внутренних эллипсоидальных аппроксимациях для задач синтеза управления при ограниченных координатах* // Известия академии наук: Теория и системы управления. 2000. Номер 3. С.70-77