

Н.Б. Викторова¹, А.В. Кулагин², Ю.И. Ожигов^{2,3}

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТА «КВАНТОВОЕ БУТЫЛОЧНОЕ ГОРЛЫШКО» ДЛЯ ТЕРМИЧЕСКОЙ РЕЛАКСАЦИИ АТОМА В РЕЗОНАТОРЕ *

Введение

Преобразование единичных фотонов в наносистемах играет огромную роль в их динамике. Квантовое описание процесса взаимодействия отдельных фотонов с заряженными частицами способно пролить свет на некоторые контринтуитивные особенности динамики не только наноэлектронных устройств (квантовые гейты, микроаккумуляторы, микролазеры), но и живых существ (см., например, [1, 2]).

Примером такой особенности является DAT – dephasing assisted transport, первоначально открытый биологами (см. [3]) и исследованный в работах [4,5].

Второй пример квантового эффекта в биологии — квантовый механизм ориентации птиц и насекомых по магнитному полю Земли (см. работы [6-9]).

В данной статье обсуждается эффект также квантовой природы: бутылочное горлышко. Связь этого эффекта с DAT была подробно исследована в статье [10], [11]. В данной работе мы приведем численные расчеты на основе модели Джейнса-Каммингса (см. [12]), иллюстрирующие эффект квантового бутылочного горлышка в простейшей ситуации — с одним атомом в полости. Мы дадим описание механизма этого эффекта; он сходен с известным эффектом Зенона.

Эффект бутылочного горлышка полностью контринтуитивен; для классической динамики подобный эффект невозможен.

¹ Российский государственный гуманитарный университет, ИИНТБ, ФИСБ, кафедра фундаментальной и прикладной математики.

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики

³ Физико-технологический институт РАН, лаборатория физики квантовых компьютеров

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00695 А.

Описание модели Джейнса-Каммингса

Модель Джейнса-Каммингса описывает взаимодействие двухуровневого атома с одномодовым полем внутри оптической полости.

Энергия данной системы выражается с помощью оператора полной энергии $H = H_{ph} + H_{at} + H_{int}$, где $H_{ph} = \hbar\omega a^+ a^-$ – энергия фотона, $H_{at} = \hbar\omega\delta^+ \delta^-$ – энергия атома, $H_{int} = g(a^+ \delta^- + \delta^+ a^-)$ – энергия взаимодействия атома и фотона, ω – частота атома (фотона), g – интенсивность взаимодействия поля с веществом, δ^+ , δ^- – операторы рождения и уничтожения возбуждения атома, a^+ , a^- – операторы рождения и уничтожения фотона, которые действуют на состояние с n фотонами следующим образом:

$a^- |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, $a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$, если $n \neq 0$; $a^- |0\rangle = 0$ при $n = 0$, где n – фотонная часть базисного состояния, $\delta^+ |0\rangle = |1\rangle$, $\delta^+ |1\rangle = |0\rangle$, $\delta^- |0\rangle = 0$, $\delta^- |1\rangle = |0\rangle$, где $|0\rangle$, $|1\rangle$ – атомная часть базисного состояния.

В нашем случае $n = 0.1$. Тогда $a^+ |1\rangle = 0$. Интенсивность утечки фотона из полости обозначена через γ_1 . Интенсивность тепловой дефазировки – через γ_2 .

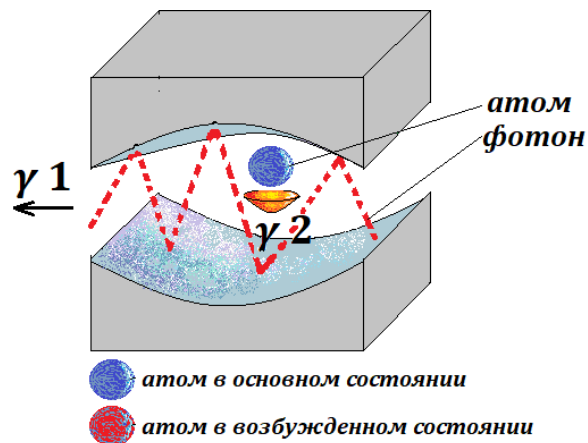


Рис. 1. Модель Джейнса-Каммингса с одним атомом и фотоном при наличии дефазировки.

Базисные состояния мы рассматриваем в лексикографическом порядке. Они имеют вид двухкубитных состояний вида $|ph, at\rangle$, где за состояние фотона отвечает левый кубит, а за состояние атома – правый кубит. Данная система имеет 3 базисных состояния: $|0, 0\rangle$ – фотона нет в полости резонатора, атом в основном состоянии; $|0, 1\rangle$ – фотона нет в полости резонатора, атом в возбужденном состоянии, т.е. поглотил фотон; $|1, 0\rangle$ – фотон находится в полости резонатора, атом в основном состоянии. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ атом находится с

вероятностью 1 в состоянии возбуждения, т.е. вся система находится в базисном состоянии $|0, 1\rangle$.

Основное квантовое уравнение динамики

Динамика системы описывается уравнением Линдблада для матрицы плотности ρ , которое имеет следующий вид

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + iL(\rho), \text{ где}$$

$$L(\rho) = \gamma_1 \left(A_1 \rho A_1^\dagger - \frac{1}{2} \{ \rho, A_1^\dagger A_1 \} \right) + \gamma_2 \left(A_2 \rho A_2^\dagger - \frac{1}{2} \{ \rho, A_2^\dagger A_2 \} \right).$$

$$\text{Матрица плотности } \rho = \begin{pmatrix} a(t) & e(t) & f(t) \\ \bar{e}(t) & b(t) & d(t) \\ \bar{f}(t) & \bar{d}(t) & c(t) \end{pmatrix}, \quad \rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\dot{\rho}(t)$ – производная матрицы плотности, $[H, \rho] = H\rho - \rho H$, A_1, A_2 – операторы уравнения Линдблада. Будем считать, что $A_1 = a^-$, $A_2 = \delta^+ \delta^-$. A_1^\dagger, A_2^\dagger – соответственно сопряженные им операторы, $\{A, B\} = AB + BA$. Матрица плотности является эрмитовой, т.е. $a(t), b(t), c(t) \in R$, где $a(t)$ – динамика населённости стока, $b(t)$ – динамика вероятности возбуждения атома, $c(t)$ – динамика населенности резонатора. Исходя из правила Борна $tr(\rho(t)) = a(t) + b(t) + c(t) = 1$. Пусть $d = d_1 + id_2$. Пусть $f(t) = e(t) = 0$.

Вычисляя матрицы всех операторов, находим, что

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega & g \\ 0 & g & \hbar\omega \end{pmatrix}.$$

Подставляя все операторы в уравнение Линдблада, имеем систему дифференциальных уравнений с начальными условиями $\dot{a} = \frac{\gamma_1}{\hbar} c$, $\dot{b} = \frac{-2g}{\hbar} d_2$, $\dot{c} = \frac{2g}{\hbar} d_2 - \frac{\gamma_1}{\hbar} c$, $\dot{d}_1 = -\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2\hbar} d_1$, $\dot{d}_2 = \frac{g}{\hbar} (b - c) - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2\hbar} d_2$, $a(0) = 0$, $b(0) = 1$, $c(0) = 0$, $d_1(0) = 0$, $d_2(0) = 0$.

Ясно, что $d_1(t) = 0$. Переходим к системе из трех уравнений $\dot{b} = \frac{-2g}{\hbar} d_2$, $\dot{c} = \frac{2g}{\hbar} d_2 - \frac{\gamma_1}{\hbar} c$, $\dot{d}_2 = \frac{g}{\hbar} (b - c) - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2\hbar} d_2$. Переменную $a(t)$ выразим впоследствии через правило Борна $tr(\rho(t)) = a(t) + b(t) + c(t) = 1$.

Находим решение данной задачи с помощью системы Wolfram Mathematica 11.2. Для удобства возьмем $\hbar = g = 1$.

Численное моделирование

В статье [10] приведен результат численного моделирования эффекта квантового бутылочного горлышка, иллюстрирующего его связь с эффектом DAT (см. рисунок 2); там исследован лишь небольшой диапазон значений интенсивности стока, доказывающий лишь существование эффекта, но не его масштаб. Таким образом, открытым остался вопрос о масштабе данного эффекта: будет ли он работать при больших интенсивностях стока.

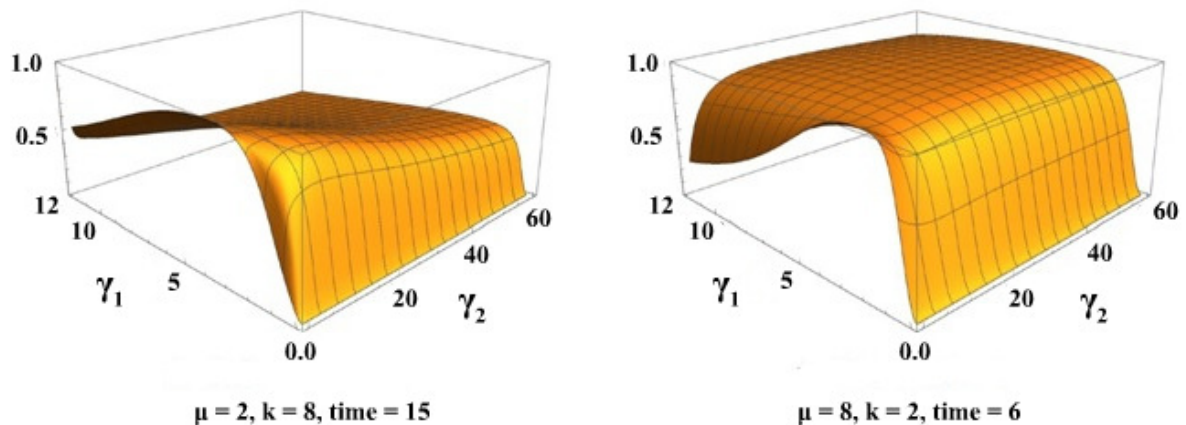
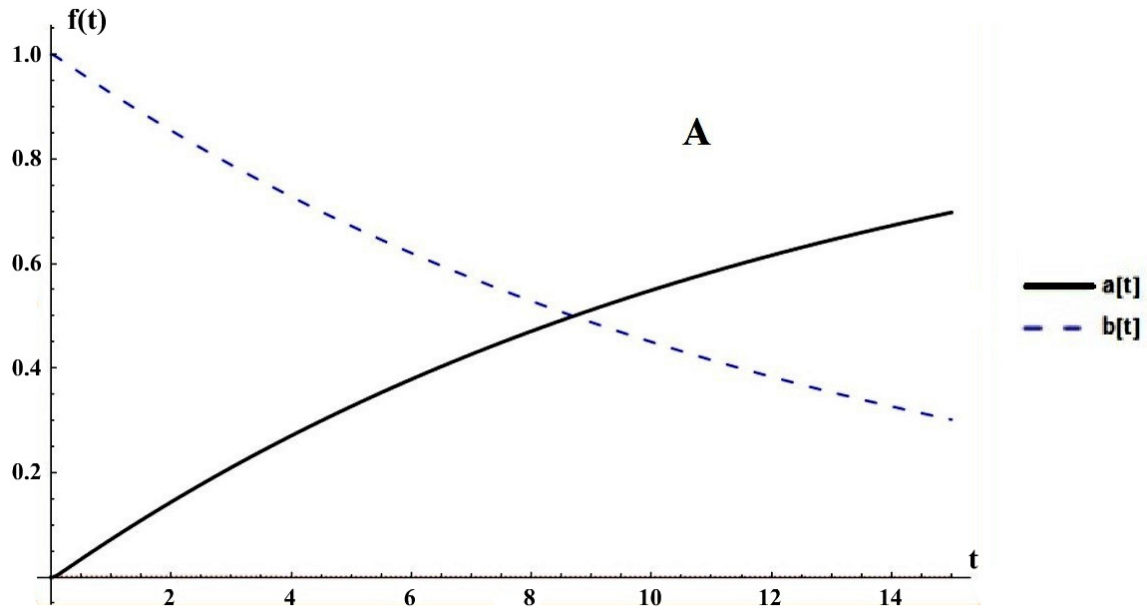


Рис. 2. Связь эффекта бутылочного горлышка с DAT: интенсивность стока ограничена значением 12. Параметр $\mu = g / \hbar w$, k – параметр перескока фотона между полостями в работе [10].

Результаты проведенного нами расчета, сделанного в пакете Wolfram Mathematica 11.2 показали, что эффект квантового бутылочного горлышка справедлив на всем интервале значений γ_1 интенсивности стока $[0, \infty]$. Результаты нашего расчета приведены на рисунках 3.1-3.3.

На оси абсцисс отложено время, на оси ординат — населенность стока $a(t)$. Графики А, В и С соответствуют значениям интенсивности стока $\gamma_1 = 50, 150, 500$. На графике А отображены управляющие команды языка Wolfram Mathematica 11.2, с помощью которых получен график; пунктиром обозначена энергия полости, сплошной линией — населенность стока.

```
Plot[{a[t, 50, 0], b[t, 50, 0], c[t, 50, 0]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Normal, Green}, {Dashing[Large], Blue}, {Dashing[Tiny], Red}}, PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}
```



```
Plot[{a[t, 100, 0], b[t, 100, 0], c[t, 100, 0]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Normal, Green}, {Dashing[Large], Blue}, {Dashing[Tiny], Red}}, PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}
```

Рис. 3.1. Скорость наполнения стока в зависимости от времени. $\gamma_1 = 50$

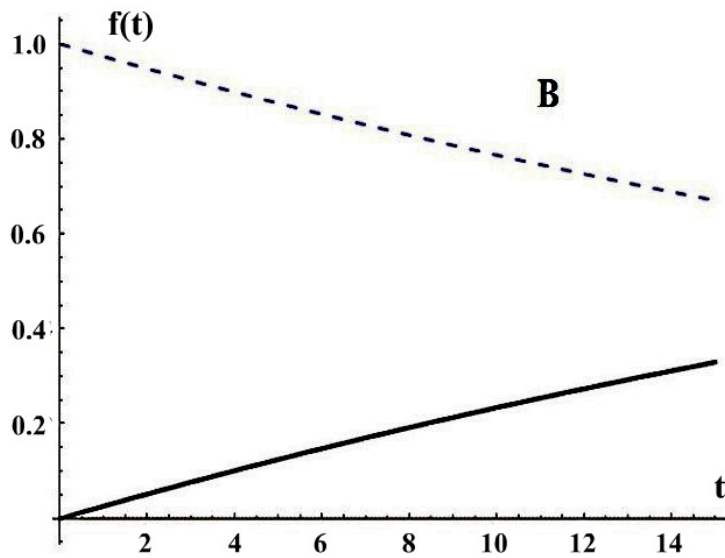


Рис. 3.2 $\gamma_1 = 150$

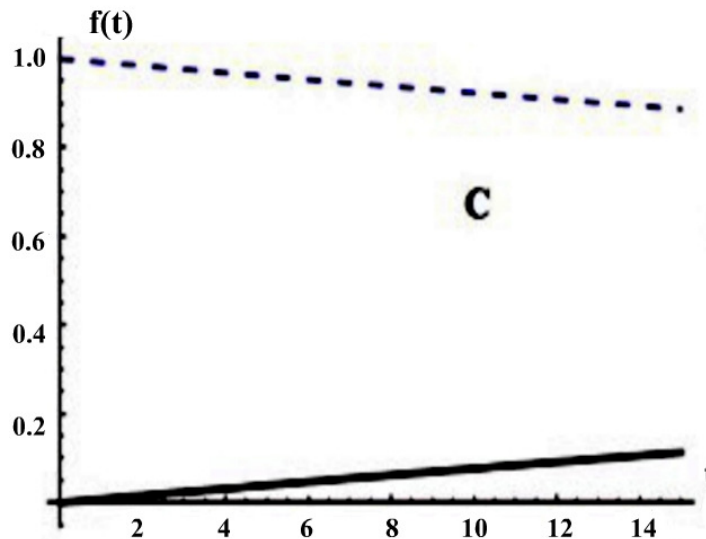


Рис. 3.3 $\gamma_1 = 500$

Квазиклассическое описание эффекта квантового бутылочного горлышка

Дадим объяснение механизма квантового бутылочного горлышка, исходя из динамики населенности стока, которая получается, как часть решения квантового основного уравнения. Мы можем считать, что это решение есть результат периодических частичных измерений с периодом dt полевой компоненты матрицы плотности системы "атом-поле" таким образом, что интенсивность вылета фотона из полости обратно пропорциональна dt . Если бы мы заменили эту динамику на унитарную, при которой вместо стока была бы установлена вторая полость, мы получили бы гармонические осцилляции фотона между двумя полостями, и населенность второй полости имела бы также выраженный экстремум в нулевой момент времени, то есть производная населенности стока в начальный момент времени была бы нулевой (рис. 4).

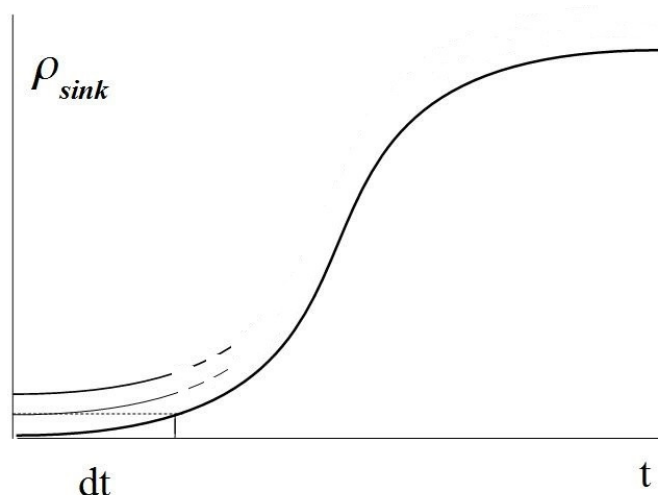


Рис. 4. Механизм квантового бутылочного горлышка.
Населенность стока в зависимости от времени.

Пусть dt малая величина. Измерение поля в момент dt при одновременном удалении фотона из полости (один шаг в численном решении квантового основного уравнения) приводит к тому, что а) сток наполняется на величину второго порядка малости по dt и б) результирующая матрица плотности оказывается после нормировки той же самой, что была в самом начале, когда фотона вообще не было. То есть на следующем шаге динамика населенности стока снова будет такой же, как и была: с нулевой производной, но уже в момент dt . Нарастание населенности стока будет, таким образом, происходить так, как показано на рисунке: малыми порциями второго порядка по dt . При этом суммарная величина этих порций будет тем меньше, чем меньше dt , то есть чем сильнее сток. Заметим, что бутылочное горлышко - чисто квантовый эффект. Если бы динамика матрицы плотности была бы классической, в начальный момент производная не была бы нулевой, и мы имели бы естественную монотонную зависимость скорости наполнения стока от его интенсивности.

Обсуждение и выводы

Мы рассмотрели простейший случай эффекта квантового бутылочного горлышка в условиях единичного атома, подверженного термической дефазировке. Приведенный нами механизм эффекта квантового бутылочного горлышка указывает на его принципиально квантовый характер, так как в случае классической динамики этот эффект не может иметь места. Важность данного эффекта связана с его контринтуитивной природой. Физически это также может быть связано и с тем, что само квантовое основное уравнение Линдблада, которое мы использовали в нашей модели, не предполагает сохранение энергии в

полости, которая может возрастая при больших интенсивностях стока (как в холодильнике). Однако, в отличие от классического холодильника, интенсивность квантового стока ведет к совершенно обратному эффекту: фотоны начинают все более слабо покидать полость. Такого рода неожиданное и нежелательное поведение надо обязательно учитывать при проектировании сложных нано-устройств, основанных на квантовых эффектах.

Литература

1. *M. A. Martin-Delgado*. On Quantum Effects in a Theory of Biological Evolution.//Scientific Reports, volume 2, Article number: 302 (2012), doi:10.1038/srep00302.
2. *Ogryzko V., Ozhigov Y.* Biologically inspired path to quantum computer. //Proceedings of SPIE, 2014, vol. 9440, pp. 9440C1-9440C10.
3. *Fenna R. E.; Matthews B. W.* Chlorophyll arrangement in a bacteriochlorophyll protein from *Chlorobium limicola*. //Nature 258 (5536): 573–7. Bibcode: 1975 Natur.258.573F. doi:10.1038/258573a0
4. *Plenio, M., et al.* Dephasing assisted transport: Quantum networks and biomolecules.// New J. Phys. 10, 113019 (2008).
5. *S.Huelga, M.Plenio* Vibration, Quanta and Biology.// Contemp. Phys. 54, 181 - 207 (2013)
6. *Rodgers, C. T.; Hore, P. J.* Chemical magnetoreception in birds: the radical pair mechanism. //Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2009, 106 (2): 353–60
7. *R.J. Gegeer, A. Casselman; S. Waddell; S. M.Reppert.* Cryptochrome mediates light-dependent magnetosensitivity in *Drosophila*. // August 2008. Nature. 454 (7207): 1014–8
8. *Wajnberg, E., Acosta-Avalos, D., Alves, O.C., de Oliveira, J.F., Srygley, R.B. and Esquivel, D.* Magnetoreception in eusocial insects: an update.//Journal of the Royal Society Interface. , 2010, 7 (Suppl 2): S207–S225.
9. *Hiscock H.G., Worster S., Kattinig D.R., Steers C., Jin Y., Manolopoulos D.E., Mouritsen H., Hore P.J.* The quantum needle of the avian magnetic compass.//Proc Natl Acad Sci U S A. 2016 Apr 26; 113(17):4634-9. doi: 10.1073/pnas.1600341113. Epub 2016 Apr 4.
10. *Ожигов Ю.И., Скворода Н.А.* Проводимость атомных возбуждений в системе оптических полостей. //Математическое моделирование, том 29, № 12, стр. 123-134
11. *A.V. Kulagin, V.Y. Ladunov, Y.I. Ozhigov, N.A.Skovoroda, and N.B.Victorova.* Homogeneous atomic ensembles and single-mode field: review of simulation results.//Proc. of SPIE, 2019, Vol. 11022 pp. 110222C1 - 110222C12
12. *Andrea Tomadin, Rosario Fazio.* Many-body phenomena in QED-cavity arrays.//J. Opt. Soc. Am. B 27, A130 (2010).