Выскубенко А. Б., Разгулин А. В.*

Вариационный метод в одной задаче диагностики неравновесных газовых сред

1. Постановка задачи. Во многих задачах диагностики неравновесных сред, в частности, в газопроточных лазерах, необходимо восстановить начальные параметры газовой смеси на основе измерений, снятых в различных сечениях потока [1]. Течение газовой смеси в измерительном тракте $x \in [0, x^0]$ лазера моделируется уравнениями газодинамики и кинетики процессов, записываемыми в одномерном приближении (см, например, [2]) в виде задачи Коши для вектор-функции $Y = Y(x;u) \in R^n$:

$$\frac{dY}{dx} = F(Y, x),\ Y(0) = u. \tag{1}$$

Требуется определить вектор начальных параметров $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \in R^n$, обеспечивающих минимальное отклонение компонент $y_j(x;u)\big|_{x=x_j^0}$ вектора состояния $Y(x;u) = \left(y_1(x;u), y_2(x;u), \ldots, y_n(x;u)\right)^T$ системы (1) от соответствующих значений компонент y_j^0, $j = 1,2,\ldots,n$ вектора измерений $Y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)^T$. Будем считать, что координаты x_j^0 датчиков измерений компонент вектора состояния могут быть разнесены по потоку: $0 < x_1^0 \le x_2^0 \le \ldots \le x_n^0 \equiv x^0$. При этом обычно предполагается, что начальные условия должны удовлетворять включению

$$u \in U_0,\ U_0 \text{ - компакт в } R^n, \tag{2}$$

отражающему наличие естественных технологических ограничений на параметры газового потока.

Отметим, что методы решения рассматриваемой задачи диагностики с разнесенными измерениями исследованы пока недостаточно. В практических же расчетах широко используется метод стрельбы [3]. Он позволяет провести оптимизацию только по одному из неизвестных начальных параметров, что не дает возможность учесть их взаимозависимость и охватить все имеющиеся экспериментальные данные [4].

В настоящей работе предлагается вариационый подход, основанный на задаче минимизации функционала невязки по всей совокупности начальных параметров $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$:

$$J(u) = \sum_{j=1}^{n} p_j \left| y_j\left(x_j^0; u\right) - y_j^0 \right|^2 \to \inf_{u \in U_0}, \tag{3}$$

где $p_j \in [0,1]$ – веса достоверности измерений. Разработана техника получения градиента функционала $J(u)$, основанная на использовании

* Работа выполнена при финансовой поддержке проекта МНТЦ № 522 и гранта РФФИ 98-01-00206.

специальной сопряженной задачи. На базе полученных оценок для решений прямой и сопряженной задач установлены свойства липшиц-непрерывности градиента по управлению и сходимость итераций метода проекции градиента ко множеству стационарных точек функционала $J(u)$.

2. Разрешимость задачи минимизации.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ - стандартное скалярное произведение и соответствующая евклидова норма в R^n; $\|A\| = \sup\limits_{z\neq 0}\|Az\|/\|z\|$ - ассоциированная с $\|\cdot\|$ норма матрицы A размера $n\times n$; для непрерывных на $[0,x^0]$ вектор-функций $Y(x) = (Y_1(x)\ldots Y_n(x))^T$ используется норма

$\|Y\|_C = \max\limits_{x\in[0,x^0]}\|Y(x)\|$; $\nabla_Y F(Y,x)$ – суть матрица производных

$$\nabla_Y F(Y,x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(Y,x)$$

дифференцируемой по Фреше относительно переменной Y векторной функции $F(Y,x) = (f_1(Y,x), f_2(Y,x),\ldots,f_n(Y,x))^T : R^{n+1}\to R^n$; $\Pi = \overline{G}\times[0,a]\subset R^n\times R^1$, $a>0$,
где G – область в R^n.

Теорема 1. Пусть функция $F(Y,x)$ определена и непрерывна на множестве Π, причем для всех $(Y,x)\in\Pi$ выполнено неравенство

$$\|F(Y,x)\|\le M_0,\ M_0>0. \tag{4}$$

Пусть функция $F(Y,x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(Y_1,x)-F(Y_2,x)\| \le L_0\,\|Y_1-Y_2\| \tag{5}$$

для любых $Y_{1,2}\in\overline{G}$, $x\in[0,a]$. Тогда для любого компактного подмножества $U_0\subset G$ существует $x^0 = x^0(G,U_0,M_0)$ такое, что для всех начальных условий из (2) задача Коши (1) имеет единственное решение $Y(x) = Y(x;u)$ на одном и том же отрезке $[0,x^0]$. Имеет место оценка

$$\|Y(\cdot\,;u)\|_C \le M_0x^0 + \|u\|,\ u\in U_0. \tag{6}$$

Решение липшиц-непрерывно зависит от u:

$$\|Y(\cdot\,;u+h)-Y(\cdot\,;u)\| \le \exp(L_0x^0)\|h\|,\ u,u+h\in U_0. \tag{7}$$

Доказательство. Утверждение о существовании и единственности решения следует из теорем Пикара и Пеано (см., например, [5], с. 19, 22); при этом $x^0 = \min(a, b/M_0)$, где $b = \operatorname{dist}(U_0,\partial G) \equiv \inf\limits_{Y_1\in U_0, Y_2\in\partial G}\|Y_1-Y_2\|$, ∂G - граница G.

Установим оценку (6). Из (1) и (4) следует неравенство $\|dY/dx\|\le M_0$, $x\in(0,x^0]$. Поскольку скалярная задача Коши $dy/dx = M$, $y(0)=\|u\|$ имеет решение $y(x) = \|u\| + M(x-x_0)$, то по лемме о дифференциальных неравенствах ([5], с. 41) $\|Y(x)\|\le y(x)$. Отсюда следует (6).

Для доказательства (7) рассмотрим уравнение для разности $\Delta Y(x) = Y(x;u+h) - Y(x;u)$:

$$\frac{d}{dx}\Delta Y = F(Y+\Delta Y, x) - F(Y, x), \quad \Delta Y(0) = h. \tag{8}$$

Из (5) получаем неравенство $\| dY/dx \| \le L_0 \| \Delta Y \|$. Соответствующая скалярная задача $dy/dx = L_0 y$, $y(0) = \| h \|$ имеет решение $y(x) = \| h \| \exp(L_0 x)$. Из леммы о дифференциальных неравенствах ([5], с. 41) следует оценка $\| \Delta Y(x) \| \le y(x)$, а, значит, и (7). Теорема доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что в задаче минимизации (1)-(3) величина x^0 и допустимое множество U_0 удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для любого $u \in U_0$ корректно определено значение функционала $J(u)$, причем $J(u)$ липшиц-непрерывен на U_0 в силу неравенств

$$|J(u_1) - J(u_2)| \le \sum_{j=1}^{n} |\Delta y_j(x_j^0)| \left(| y_j(x_j^0; u_1) | + | y_j(x_j^0; u_2) | + 2 | y_j^0 | \right) \le$$

$$\le n \| \Delta Y \|_C \left(\| Y(\cdot\,; u_1) \|_C + \| Y(\cdot\,; u_2) \|_C + 2 \| Y^0 \| \right) \le$$

$$\le n \left(2M_0 x^0 + \| u_1 \| + \| u_2 \| + 2 \| Y^0 \| \right) \exp\left(L_0 x^0 \right) \cdot \| u_1 - u_2 \|,$$

основанных на оценках $|p_j| \le 1$, $|y_j(x_j^0)| \le \| Y \|_C$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда из теоремы Вейерштрасса ([6], с. 74) следует

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого $Y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0 \right)^T \in R^n$ множество $U_* = \left\{ u : u \in U_0,\ J(u) = \inf_{u \in U_0} J(u) \right\}$ непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность сходится к U_*.

3. Сопряженная задача.

Рассмотрим линейную задачу Коши для нахождения вектор-функции $\psi = \psi(x;u) = \left(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x) \right)^T$; $x \in \left[0, x^0\right]$:

$$\frac{d\psi}{dx} + D(Y,x)\psi = D(Y, x)\mathrm{X}(x)\psi^0, \tag{9}$$

$$\psi^0 = \left(\psi_1^0, \psi_2^0, \ldots, \psi_n^0 \right), \ \psi_j^0 = 2p_j \left(Y_j(x_j^0) - y_j^0 \right), \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

Здесь $Y(x) = Y(x;u) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \right)^T$ – решение задачи (1) для фиксированного u из (2), $D(Y,x) = \left(\nabla_Y F(Y,x) \right)^* \Big|_{Y = Y(x;u)}$ - сопряженная матрица,

$$\mathrm{X}(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_n(x) \end{pmatrix}, \quad \chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_j^0, x^0), \\ 0, & x \notin (x_j^0, x^0). \end{cases}$$

Таким образом, для определения коэффициентов системы и конечного (при $x = x^0$) условия в (9) необходимо сначала решить задачу (1) и определить $Y(x; u)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, и, дополнительно, функция $F(Y,x)$ дифференцируема по Фреше относительно Y, причем матрица производных $\nabla_Y F(Y,x)$ непрерывна на Π и удовлетворяет оценке

$$\left\| \nabla_Y F(Y,x) \right\| \le M_1,\ (Y,x) \in \Pi. \tag{11}$$

Тогда для любых $u \in U_0$ и $Y^0 \in R^n$ существует единственное решение $\psi = \psi(x;u)$ задачи (9)-(10) на отрезке $\left[0, x^0\right]$. Справедлива оценка

$$\left\| \psi(\cdot\,;u) \right\|_C \le C_1 (1 + \|u\| + \|Y^0\|). \tag{12}$$

Если, кроме того, матрица производных удовлетворяет условию Липшица на Π:

$$\left\| \nabla_Y F(Y_1, x) - \nabla_Y F(Y_2, x) \right\| \le L_1 \left\| Y_1 - Y_2 \right\|, \tag{13}$$

тогда решение $\psi = \psi(x;u)$ тоже липшиц-непрерывно зависит от u:

$$\left\| \psi(\cdot\,;u+h) - \psi(\cdot\,;u) \right\|_C \le C_2 (1 + \|u\| + \|Y^0\|) \|h\|,\ u, u+h \in U_0, \tag{14}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от u и h.

Доказательство. Заменой переменной $x = x^0 - t$ задача (9) приводится к стандартной неоднородной системе

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) \tag{15}$$

относительно новой функции $z(t) = \psi(x^0 - t)$, $z(0) = \psi^0$, где матрица системы $A(t) = \nabla_Y F\left(Y(x^0 - t), x^0 - t\right)$ и неоднородность $f(t) = -A(t)\mathrm{X}(x^0 - t)\psi^0$ непрерывно зависят от t. Согласно [5], с. 62 решение (15) существует и единственно на всем отрезке $\left[0, x^0\right]$, причем имеет место оценка

$$\| z \|_C \le \left(\| z(0) \| + x^0 \| f \|_C \right) \exp\left(x^0 \| A \|_C \right), \tag{16}$$

которая является следствием леммы 4.1 из [5], с. 72.

Поскольку $\left| \chi_j(x) \right| \le 1,\ j = 1, \ldots, n,$ то $\left\| \mathrm{X}(x) \right\| = \sup\limits_{|z|=1} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \chi_j(x) z_j^2 \right)^{1/2} \le 1$. Отсюда и из (11) получим $\| A \|_C \le M_1$, $\| f \|_C \le \| \nabla_Y F \|_C \| \mathrm{X} \|_C \| \psi^0 \| \le M_1 \| \psi^0 \|$. Тогда из (16) следует неравенство

$$\| \psi \|_C \le \| \psi^0 \| \left(1 + x^0 M_1 \right) \exp\left(x^0 M_1 \right). \tag{17}$$

Для оценки $\| \psi^0 \|$ воспользуемся (6) и тем, что $\left| p_j \right| \le 1,\ j = 1, \ldots, n.$ Имеем

$$\begin{aligned} \| \psi^0 \| &\le 2 \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \left| Y_j(x_j^0) \right|^2 \right)^{1/2} + \| Y_0 \| \right) \le 2\left(\sqrt{n}\, \| Y \|_C + \| Y^0 \| \right) \le \\ &\le C_3 \left(1 + \| u \| + \| Y^0 \| \right), \end{aligned} \tag{18}$$

где $C_3 = 2 \max\left\{ \sqrt{n} M_0 x^0, \sqrt{n}, 1 \right\}$. Подставляя (18) в (17) приходим к (12), где, например, $C_1 = C_3 \left(1 + x^0 M_1 \right) \exp\left(x^0 M_1 \right)$.

Рассмотрим разность $\Delta\psi(x) = \psi(x;u+h) - \psi(x;u)$, которая в силу (9)-(10) удовлетворяет системе

$$\frac{d\Delta\psi}{dx} + D_1 \Delta\psi = \Delta D(-\psi + \mathrm{X}\psi^0) + D_1 \mathrm{X} \Delta\psi^0, \quad \Delta\psi(x^0) = \Delta\psi^0, \tag{19}$$

$$\Delta\psi^0 = \left(\Delta\psi_1^0, \Delta\psi_2^0, \ldots, \Delta\psi_n^0 \right)^T, \quad \Delta\psi_j^0 = 2 p_j \left(\Delta Y_j(x_j^0) \right), \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

где $D_1 = \nabla_Y F(Y+\Delta Y,\, x)$, $\Delta D = D_1 - \nabla_Y F(Y,\, x)$. После замены переменной $x = x^0 - t$ система (19) принимает вид (5), где $z(t) = \Delta\psi(x^0 - t)$, $z(0) = \Delta\psi^0$, $A = D_1$, $f = \Delta D(\psi - \mathrm{X}\psi^0) - D_1 \mathrm{X}\Delta\psi^0$. Поскольку $\|X\|_C \le 1$, и в силу (13) справедливо неравенство $\|\Delta D\|_C \le L_1\|\Delta Y\|$, тогда с помощью (17) имеем:

$$\|f\|_C \le L_1\|\Delta Y\|\left(\|\psi\|_C + \|\psi^0\|\right) + M_1\|\Delta\psi^0\| \le C_4\|\Delta Y\|\|\Delta\psi^0\| + M_1\|\Delta\psi^0\|,$$

$$C_4 = L_1\left(1 + \left(1 + x^0 M_1\right)\exp\left(x^0 M_1\right)\right).$$

Подставляя эту оценку в (16) и используя неравенство $\|A\| = \|D_1\| \le M_1$, получаем

$$\|\Delta\psi\|_C \le \left(\left(1 + M_1 x^0\right)\|\Delta\psi^0\| + x^0 C_4\|\psi^0\|\|\Delta Y\|\right)\exp\left(M_1 x^0\right).$$

Учитывая оценку $\|\Delta\psi^0\| \le 2\sqrt{n}\|\Delta Y\|_C \le 2\sqrt{n}\exp\left(L_0 x^0\right)\|h\|$, которая выводится из (20) аналогично (18), получаем (14) :

$$\|\Delta\psi\|_C \le \left(1 + \|u\| + \|Y^0\|\right)\cdot\left(2\sqrt{n}\left(1 + M_1 x^0\right) + x^0 C_3 C_4\right)\exp\left(M_1 x^0 + L_0 x^0\right)\|h\|,$$

где в качестве константы можно взять, например,

$$C_2 = \left(2\sqrt{n}\left(1 + M_1 x^0\right) + x^0 C_3 C_4\right)\exp\left(M_1 x^0 + L_0 x^0\right).$$

Теорема доказана.

4. Градиент функционала.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и условия (13). Тогда для любого $Y^0 \in R^n$ функционал $J(u)$ дифференцируем в любой внутренней точке множества U_0. Имеет место выражение для приращения функционала $J(u+h) - J(u) = \langle J'(u),\, h\rangle + R(u,\, h)$ где $|R(u;h)| \le C_5\left(1 + \|u\| + \|Y^0\|\right)\|h\|^2$,

а градиент $J'(u) = \psi(x;u)\big|_{x=0}$ определяется через решение ψ сопряженной задачи (9)-(10).

Градиент $J'(u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(u+h) - J'(u)\| \le C_2\left(1 + \|u\| + \|Y^0\|\right)\|h\|,$$

где C_2 – константа из оценки (14).

Доказательство. Возьмем произвольные u и $u+h$ из внутренности U_0. Тогда с помощью (10) приращение функционала можно представить в виде $\Delta J = J(u+h) - J(u) = \Delta_1 + R_0$, где

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n}\psi_j^0\,\Delta y_j(x_j^0), \tag{21}$$

$$R_0 = \sum_{j=1}^{n} p_j\left|\Delta y_j(x_j^0)\right|. \tag{22}$$

Добавляя и вычитая сумму $\sum_{j=1}^{n}\psi_j^0\,\Delta y_j(x^0)$ в (21) имеем:

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n}\psi_j^0\left(\Delta y_j(x_j^0) - \Delta y_j(x^0)\right) + \left\langle\psi^0,\, \Delta Y(x^0)\right\rangle = \Delta_2 + \Delta_3. \tag{23}$$

Слагаемое Δ_3 преобразуем с помощью (8) следующим образом:

$$\Delta_3 = \langle \psi(0), \Delta Y(0) \rangle + \int_0^{x^0} \frac{d}{dx} \langle \psi(x), \Delta Y(x) \rangle dx =$$

$$= \langle \psi(0), h \rangle + \int_0^{x^0} \left\langle \frac{d\psi(x)}{dx} + \left(\nabla_Y F\right)^* \psi, \Delta Y(x) \right\rangle dx + R_1,$$

$$R_1 = \int_0^{x^0} \langle \psi(x), r(x) \rangle dx, \; r(x) = F(Y + \Delta Y, x) - F(Y, x) - \nabla_Y F(Y, x) \Delta Y. \tag{24}$$

Рассмотрим слагаемое Δ_2. Поскольку $\frac{d\Delta Y}{dx} = \nabla_Y F \cdot \Delta Y + r$, то

$$\Delta_2 = -\sum_{j=1}^n \psi_j^0 \int_{x_j^0}^{x^0} \frac{d\Delta y_j(x)}{dx} dx = -\sum_{j=1}^n \psi_j^0 \int_{x_j^0}^{x^0} \left(\nabla_Y F(Y, x) \Delta Y(x)\right) dx + R_2 =$$

$$= -\sum_{j=1}^n \int_0^{x^0} \psi_j^0 \chi_j(x) \left(\nabla_Y F(Y, x) \Delta Y(x)\right)_j dx + R_2 =$$

$$= -\int_0^{x^0} \left\langle \mathrm{X}(x) \psi^0, \nabla_Y F(Y, x) \Delta Y(x) \right\rangle dx + R_2 =$$

$$= -\int_0^{x^0} \left\langle \left(\nabla_Y F(Y, x)^*\right) \mathrm{X}(x) \psi^0, \Delta Y(x) \right\rangle dx + R_2,$$

$$R_2 = -\sum_{j=1}^n \psi_j^0 \int_{x_j^0}^{x^0} r_j(x) dx.$$

Подставляя выражения для Δ_2 и Δ_3 в (23) и пользуясь тем, что ψ является решением уравнения (10), приходим к формуле приращения

$$\Delta J = \langle \psi(0; u), h \rangle + R, \quad R = R_0 + R_1 + R_2. \tag{25}$$

Оценим каждое слагаемое, входящее в остаточный член R. Для оценки R_0 в (22) применим неравенство $\left|\Delta y_j(x_j^0)\right| \le \|\Delta Y\|_C$ и (7):

$$R_0 \le \sum_{j=1}^n \left|\Delta y_j(x_j^0)\right|^2 \le n \|\Delta Y\|_C^2 \le n \exp\left(2L_0 x^0\right) \|h\|^2. \tag{26}$$

С помощью (13) и следствия из формулы конечных приращений Лагранжа для вектор-функций (см. [7], с. 583) оценим входящий в выражения для R_1 и R_2 член $r(x)$ из (24):

$$\|r(x)\| = \left\|F(Y + \Delta Y, x) - F(x) - \nabla_Y F(Y, x) \Delta Y\right\| \le$$

$$\le \sup_{\xi \in (Y,\, Y+\Delta Y)} \left\|\nabla_Y F(\xi, x) - \nabla_Y F(Y, x)\right\| \cdot \|\Delta Y\| \le L_1 \|\Delta Y(x)\|^2.$$

Отсюда и из (7) получаем

$$\|r\|_C \le L_1 \exp\left(2L_0 x^0\right) \|h\|^2. \tag{27}$$

На основе (27), (12) и неравенства Коши-Буняковского нетрудно провести оценку R_1:

$$|R_1| \le x^0 \|\psi\|_C \|r\|_C \le x^0 C_1 L_1 \exp\left(2L_0 x^0\right) \left(1 + \|u\| + \left\|Y^0\right\| \|h\|^2\right).$$

Аналогично с помощью (27) и (18) мажорируется R_2:

$$|R_2| \le \|\psi^0\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{x_j^0}^{x^0} |r_j(x)| dx \right)^2 \right)^{1/2} \le x^0 \|\psi^0\| \|r\|_C \le$$

$$\le x^0 C_3 L_1 \exp\left(2L_0 x^0\right)\left(1+\|u\|+\|Y^0\|\,\|h\|^2\right).$$

Подставляя (26) и оценки для R_1 и R_2 в (25) получаем неравенство

$$|R| \le C_5\left(1+\|u\|+\|Y^0\|\,\|h\|^2\right),$$

где в качестве C_5 можно взять, например, значение

$$C_5 = \max\left\{n,\ x^0 C_1 L_1,\ x^0 C_3 L_1\right\} \cdot \exp\left(2L_0 x^0\right).$$

Фигурирующее в утверждении теоремы условие Липшица следует из оценки (14). Теорема доказана.

5. Метод проекции градиента.

Имея формулу для градиента функционала нетрудно выписать правило построения последовательности $\{u^{(k)}\}$ по методу проекции градиента [6] Гл.5, §2:

$$u^{(k+1)} = P_{U_0}\left(u^{(k)} - \alpha_k J'(u^{(k)})\right),\ k = 0, 1, \dots, \qquad (28)$$

где P_{U_0} – оператор проектирования на U_0. Заметим, что на каждой итерации метода (28) вычисление градиента функционала требует решения двух задач Коши, а именно, сначала решается задача (1) от $x = 0$ до $x = x^0$ и определяются коэффициенты матрицы и правая часть сопряженной системы, зависящие от $Y\left(x;\, u^{(k)}\right)$. Затем решается сопряженная система от $x = x^0$ до $x = 0$ и находится $J'(u^{(k)}) = \psi(x; u^{(k)})\big|_{x=0}$.

Шаг в (28) можно выбирать различными способами (см. [6] Гл.5, §2, п.1). Приведем один способ выбора постоянного шага, при котором гарантируется сходимость последовательности $\left\{u^{(k)}\right\}$. Возьмем в качестве α_k произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha_k \le \frac{2}{L + 2\varepsilon}, \qquad (29)$$

где $L = C_2\left(1 + \sup_{U_0}\|u\| + \|Y_0\|\right)$ – мажоранта константы Липшица для градиента $J'(u)$ из теоремы 4, $\varepsilon, \varepsilon_0$ - положительные числа, являющиеся параметрами метода. Из теоремы 1 в [6] с. 279 следует

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и U_0 – выпукло. Тогда при любом начальном приближении имеет место сходимость итерационного процесса (28)-(29)

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u^{(k)}, S_*) = 0,$$

где $S_* = \left\{u \in U_0 : \left\langle J'(u),\, v - u \right\rangle \ge 0,\ \forall\, v \in U_0\right\}$ – множество стационарных точек функционала $J(u)$ на U_0, $\rho(u, S_*) = \inf_{v\in S_*}\|u - v\|$.

Авторы благодарны Выскубенко Б.А. за постановку задачи и полезные замечания.

Литература.

1. Лосев С.А., Макаров В.Н. Многофакторная оптимизация газодинамического лазера на углекислом газе. Оптимизация удельной мощности генерации // Квантовая электроника, 1976, т. 3, № 5, с. 960-968.

2. Выскубенко Б.А., Дерюгин Ю.Н., Кириллов Г.А., и др. Сравнение результатов двумерных расчетов смесевых ГДЛ с данными эксперимента // ВАНТ сер. "Методики и программы численного решения задач математической физики", 1983, Вып. 3, № 14, с. 18-21.

3. Выскубенко Б.А., Дерюгин Ю.Н., Ильин С.П., и др. Сравнение результатов одномерного расчета гомогенного газодинамического лазера с данными эксперимента. // ВАНТ сер. "Методики и программы численного решения задач математической физики", 1984, Вып. 1, № 15, с. 55-58.

4. Adamenkov A.A., Vyskubenko B.A., and Gerasimenko N.N. Oxygen-Iodine Laser Capacity at the Elevated Pressure // Proceedings SPIE, 1997, vol. 3092, pp. 581-584.

5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970, 720 с.

6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988, 552 с.

7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Том 1. – М.: Изд-во МГУ, 1985, 662 с.