Ян Цзяньсюнь

МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК БЕГУЩИХ ВОЛН ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

Введение

В последние годы ведутся активные исследования явлений внутреннего строения Земли и получен ряд важных результатов [1-8], в том числе в [9-12] для изучения структуры скорости поперечных волн в основном применяются формулы дисперсии поверхностных волн. Решение упругого волнового уравнения является одним из самых важных научных направлений в сейсмологии (например, исследование характеристик сейсмических фаз, вычисление пути сейсмических волн, расчет синтетических сейсмограмм и т.д.). Различные волны имеют свои характеристики. Определение этих характеристик играет большую роль для решения волнового уравнения и вычисления дисперсии волн.

Для исследования прямой задачи сейсмических волн большинство работ фокусируются на вычислении дисперсии плоской волны. Классический метод для кусочно-постоянной плоскослоистой среды является метод матрицы перехода ‘Thomson Haskell’ [2]. Фактически в процессе численного расчета возникает проблема потери высокочастотной точности. Для преодоления этой проблемы был разработан ряд новых методов [3-10]. Чжэн Сяофэй (Chen X.F.) предлагает новый метод обобщенного коэффициента отражения-передачи (МОК-О/П) (The generalized reflection-transmission coefficient method) для вычисления дисперсии плоской волны [11].

Метод тензора импеданса часто используется для магнитотеллурического зондирования. Дмитриев В.И. [1] применяет этот метод в сейсмологии для решения спектральных характеристик в изотропной слоистой среде. В настоящей работе рассматривается новый метод тензора импеданса для расчета характеристик бегущих волн из сейсмических данных.

Метод расчета характеристик бегущих волн

Пусть дана слоистая среда с границей $z = z_n, n \in [0, n]$, где $z_0 = 0$ уровень земной поверхности. Внутри каждого слоя $z \in [z_{n-1}, z_n]$, $n \in [1, N]$. Сейсмические параметры λ_n, μ_n, ρ_n положим постоянными. В этой слоистой среде распространяется бегущая волна вдоль оси *OX*. Вектор смещения в бегущей волне задается в виде:

$$\vec{U}(x, y, z) = \bar{u}(z) e^{i\gamma x + i\omega t} \quad (1)$$

где ω – чистота сейсмического поля, а γ – постоянная (характеристика) распространения бегущей волны, $\bar{u}(z)$ представляет амплитуду бегущей волны. Внутри слоя $\bar{u}(z)$ удовлетворяет уравнению Ламе с постоянными коэффициентами:

$$(\lambda_n + 2\mu_n)\text{grad div}\vec{U} - \mu_n \text{rot rot}\vec{U} + \omega^2 \rho_n \vec{U} = 0,\ z \in [z_{n-1}, z_n] \quad (2)$$

На границе раздела слоев выполняются условия непрерывности смещения $\bar{U}(z)$ и напряженности σ_{ij}, $i, j \in [x, y, z]$, где:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} div\bar{U}(z) + \mu\left(\frac{\partial\bar{U}(z)}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}(z)}{\partial x_i}\right),\ x_i = x, y, z,\ i \in [1,3] \quad (3)$$

Подставив выражение для бегущей волны (1) в уравнение Ламе и напряженности, получим:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)i\gamma\ i\gamma u_x(z) + u_z'(z)\ - \mu\ -u_x'' + i\gamma u_z'\ + \omega^2 \rho u_x = 0 \\ -\mu\ u_y'' - \gamma^2 u_{\text{y}}\ + \omega^2 \rho u_y = 0 \\ (\lambda + 2\mu)\ i\gamma u_x'(z) + u_z''(z)\ - \mu\ i\gamma\ u_x' - i\gamma u_z\ + \omega^2 \rho u_z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_{xz} = \mu\ i\gamma u_z(z) + u_x'(z) \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda + 2\mu\ u_z'(z) + \lambda i\gamma u_x(z) \quad (6)$$

Т.к. поляризация бегущей волны не зависит оси *OY*, то $u_y(z) = 0$. В результате получаем систему двух уравнений для смещений u_x, u_z. Упростив систему (1.4), получим:

$$\begin{cases} u_x'' + a_x^2 u_x + b_1 u_z' = 0 \\ u_z'' + a_z^2 u_z + b_2 u_x' = 0 \end{cases} \quad (7)$$

где

$$a_x^2 = \frac{\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)\gamma^2}{\mu},\ b_1 = \frac{(\lambda + \mu)i\gamma}{\mu},\ a_z^2 = \frac{\rho\omega^2 - \mu\gamma^2}{\lambda + 2\mu},\ b_2 = \frac{(\lambda + \mu)i\gamma}{\lambda + 2\mu} \quad (8)$$

При $z \to \infty, u_x, u_z \to 0$, надо, чтобы $\text{Im}\,a_x \neq 0$ и $\text{Im}\,a_z \neq 0$, т.е.:

$$a_x = i\sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)\gamma^2 - \rho\omega^2}{\mu}},\ a_z = i\sqrt{\frac{\mu\gamma^2 - \rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}} \quad (9)$$

Для решения системы (7) [1] задавал систему дифференциального уравнения в векторной форме:

$$\frac{d\bar{V}}{dz} = \hat{A}\bar{V} \quad (10)$$

где $\bar{V} = \ v_1 = u_x, v_2 = u_z, v_3 = u_x', v_4 = u_z'\ ,$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_x^2 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & -a_z^2 & -b_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Пусть дифференциальное (10) уравнение имеет общее решение $\bar{V} = \bar{Y}e^{\eta z}$. При достаточном и необходимом условии имеем вид:

$$\det(\hat{A} - \eta E) = \det\begin{pmatrix} -\eta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & 1 \\ -a_x^2 & 0 & -\eta & -b_1 \\ 0 & -a_z^2 & -b_2 & -\eta \end{pmatrix} = 0 \qquad (12)$$

Найдем следующие корни:

$$\eta_1 = \sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2\rho}{\mu}},\ \eta_3 = -\sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2\rho}{\mu}},$$
$$\eta_2 = \sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2\rho}{\lambda + 2\mu}},\ \eta_4 = -\sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2\rho}{\lambda + 2\mu}}. \qquad (13)$$

Полученные четыре корня η являются собственными значениями матрицы $\hat{A}$. Поэтому для матрицы $\hat{A}$ можно найти 4 собственных векторов в виде:

$$a_1 = \left[-i\eta_1, -\gamma, -i\eta_1^2, -\gamma\eta_1\right]^T$$
$$a_2 = \left[-i\eta_1, \gamma, i\eta_1^2, -\gamma\eta_1\right]^T$$
$$a_3 = \left[\gamma, -i\eta_2, \gamma\eta_2, -i\eta_2^2\right]^T$$
$$a_3 = \left[\gamma, i\eta_2, -\gamma\eta_2, -i\eta_2^2\right]^T$$

Тогда (10) имеем решение:

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3, a_4)diag(e^{\eta_1 z}, e^{-\eta_1 z}, e^{\eta_2 z}, e^{-\eta_2 z})\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Таким образом, поле смещения $\vec{U}$ на двух компонентах x, z можно представить в виде:

$$\begin{cases} u_x = -i\eta_1 e^{\eta_1 z}C_1 - i\eta_1 e^{-\eta_1 z}C_2 + \gamma e^{\eta_2 z}C_3 + \gamma e^{-\eta_2 z}C_4 \\ u_z = -\gamma e^{\eta_1 z}C_1 + \gamma e^{-\eta_1 z}C_2 - i\eta_2 e^{\eta_2 z}C_3 + i\eta_2 e^{-\eta_2 z}C_4 \end{cases} \qquad (15)$$

Подставив (13) в условие непрерывности напряженности (3), получим:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = -P_1 e^{\eta_1 z}C_1 + P_1 e^{-\eta_1 z}C_2 + P_2 e^{\eta_2 z}C_3 - P_2 e^{-\eta_2 z}C_4 \\ \sigma_{zz} = -P_3 e^{\eta_1 z}C_1 - P_3 e^{-\eta_1 z}C_2 - P_4 e^{\eta_2 z}C_3 - P_4 e^{-\eta_2 z}C_4 \end{cases} \qquad (16)$$

где $P_1 = i\mu\ \ \gamma^2 + \eta_1^2\ \ , P_2 = 2\mu\eta_2\gamma, P_3 = 2\mu\eta_1\gamma, P_4 = i\ \ \ \lambda + 2\mu\ \ \eta_2^2 - \lambda\gamma^2\ \ .$

Для слоистых сред имеются следующие граничные условия:

1. Непрерывность смещения и напряженность, т.е.:

$$u_x(z_j)\Big|_{z=z_j+0} = u_x(z_j)\Big|_{z=z_j-0} \tag{17}$$

$$u_z(z_j)\Big|_{z=z_j+0} = u_z(z_j)\Big|_{z=z_j-0} \tag{18}$$

$$\sigma_{xz}(z_j)\Big|_{z=z_j-0} = \sigma_{xz}(z_j)\Big|_{z=z_j+0} \tag{19}$$

$$\sigma_{zz}(z_j)\Big|_{z=z_j-0} = \sigma_{zz}(z_j)\Big|_{z=z_j+0} \tag{20}$$

2. На земной поверхности тензор напряжения равен нулю, выражения (5), (6) имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xz}\big|_{z=0} = 0 \\ \sigma_{zz}\big|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

3. При $z \to \infty$, $u_x(z) = 0$, $u_z(z) = 0$. (22)

Нам необходимо определить $u_x(z=0) = u_x^0, u_z(z=0) = u_z^0$. В каждом слое решение системы двух уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами зависит от 4-х неизвестных констант, а в полупространстве $z > z_N$ от двух констант, т.е. необходимо определить $4N-2$ неизвестные константы. На каждой границе z_j, $j \in [1, N]$ имеем четыре условия сопряжения, а на земной поверхности $z_0 = 0$ два граничных условия. Всего $4N-2$ уравнения. Определив константы из этих уравнений при условии равенства нулю определителя системы, мы можем определить амплитуду бегущей волны в любой точке слоистой среды. Равенство нулю определителя системы дает нам уравнение для определения постоянной распространения бегущей волны γ для данной слоистой среды и заданной частоты поля ω. Описанный подход крайне сложен. Для упрощения расчета следует соответственно использовать тензор импеданса бегущей волны в слоистой среде.

Определение тензора импеданса

Тензор импеданса сейсмической бегущей волны вводится как величина связывающая напряженности σ_{xz}, σ_{zz} со смещениями u_x, u_z в виде линейных соотношений:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = Z_{xx}u_x + Z_{xz}u_z \\ \sigma_{zz} = Z_{zx}u_x + Z_{zz}u_z \end{cases} \tag{23}$$

где

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} Z_{xx} & Z_{xz} \\ Z_{zx} & Z_{zz} \end{vmatrix} \tag{24}$$

$\hat{Z}$ – тензор импеданса второго ранга. Отметим, что тензор импеданса непрерывен на разрывах λ, μ и ρ, так как непрерывны напряжения и смещения.

Если мы определяем тензор импеданса при $z=0$, т.е. $\hat{Z}(z=0)=\hat{Z}^0$, то, согласно граничным условиям (1.9) и (1.10) при $z=0$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(z=0)=Z^0_{xx}u_x(z=0)+Z^0_{xz}u_z(z=0)=0 \\ \sigma_{zz}(z=0)=Z^0_{zx}u_x(z=0)+Z^0_{zz}u_z(z=0)=0 \end{aligned} \tag{25}$$

Для существования бегущей волны, т.е. существования $u_x(0)$ и $u_z(0)$ отличных от нуля, должно выполняться условие:

$$\det\hat{Z}^0=Z^0_{xx}Z^0_{zz}-Z^0_{xz}Z^0_{zx}=0 \tag{26}$$

Это дисперсионное уравнение для определение постоянной распространения бегущей волны γ в зависимости от частоты ω и параметров слоистой среды.

Если корни уравнения существуют, то из (1.14) мы можем для данного γ определить отношение амплитуд смещений в бегущей волне:

$$\frac{u_x(z=0)}{u_x(z=0)}=-\frac{Z^0_{xz}}{Z^0_{xx}}=-\frac{Z^0_{zz}}{Z^0_{zx}} \tag{27}$$

Таким образом, все сводится к определению тензора импеданса при $z=0$. Найдем систему уравнений для тензора импеданса. Для этого из (1.12) найдем производные по z от смещения u_x, u_z.

$$\begin{cases} \dfrac{du_x}{dz}=\dfrac{1}{\mu}Z_{xx}(z)u_x(z)+\left(\dfrac{1}{\mu}Z_{xz}(z)-i\gamma\right)u_z(z) \\ \dfrac{du_z}{dz}=\dfrac{1}{\lambda+2\mu}\ \ Z_{zx}(z)-i\gamma\lambda\ \ u_x(z)+\dfrac{1}{\lambda+2\mu}Z_{zz}(z)u_z(z) \end{cases} \tag{28}$$

Тогда внутри слоя, где λ, μ -постоянные, определим вторые производные смещений.

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_x}{dz^2}=\frac{1}{\mu}\ \ Z_{xx}{}'(z)u_x(z)+Z_{xx}(z)u_x{}'(z)+ \\ +Z_{xz}{}'(z)u_z(z)+Z_{xz}(z)u_z{}'(z)\ \ -i\gamma u_z{}'(z) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_z}{dz^2}=\frac{1}{\lambda+2\mu}\ \ Z_{zz}{}'(z)u_z(z)+Z_{zz}(z)u_z{}'(z)+ \\ +Z_{zx}{}'(z)u_x(z)+Z_{zx}(z)u_x{}'(z)-i\gamma\lambda u_x{}'(z) \end{aligned} \tag{30}$$

Подставив в полученное выражение $u_x{}'(z)$ и $u_z{}'(z)$ из (1.17), получим, окончательно

$$\frac{d^2u_x}{dz^2}=\left(\frac{1}{\mu}Z'_{xx}+\frac{1}{\mu^2}Z_{xx}^2+\frac{Z_{xz}Z_{zx}-i\gamma\lambda Z_{xz}}{\mu\ \ \lambda+2\mu}-\frac{\gamma^2\lambda+i\gamma Z_{zx}}{\lambda+2\mu}\right)u_x+$$
$$+\left(\frac{Z_{xz}Z_{xx}-i\mu\gamma Z_{xx}}{\mu^2}+\frac{1}{\mu}Z'_{xz}+\frac{Z_{xz}Z_{zz}}{\mu(\lambda+2\mu)}-\frac{i\gamma Z_{zz}}{\lambda+2\mu}\right)u_z \tag{31}$$

$$\frac{d^2u_z}{dz^2}=\left(\frac{Z'_{zx}}{\lambda+2\mu}+\frac{Z_{zz}Z_{zx}-i\gamma\lambda Z_{zz}}{\lambda+2\mu\ \ ^2}+\frac{Z_{zx}Z_{xx}}{\mu\ \ \lambda+2\mu}-\frac{i\gamma\lambda Z_{xx}}{\mu\ \ \lambda+2\mu}\right)u_x+$$
$$+\left(\frac{Z'_{zz}}{\lambda+2\mu}+\frac{Z_{zz}^2}{\lambda+2\mu\ \ ^2}+\frac{Z_{zx}Z_{xz}-i\mu\gamma Z_{zx}}{\mu\ \ \lambda+2\mu}-\frac{\lambda\mu\gamma^2+i\gamma\lambda Z_{xz}}{\mu\ \ \lambda+2\mu}\right)u_z \tag{32}$$

Подставив первые и вторые производные (1.17) -(1.21) в уравнении Ламе (1.4), найдем:

$$Z'_{xx}-\ \ i\lambda\mu\gamma\ \ Z_{xz}-Z_{zx}\ \ -\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{xx}^2-\mu Z_{xz}Z_{zx}+$$
$$+4\mu^2\gamma^2\ \ \lambda+\mu\ \ -\omega^2\rho\mu\ \ \lambda+2\mu\qquad u_x+\ \ Z'_{xz}-\quad \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{xx} \tag{33}$$
$$-i\mu\lambda\gamma Z_{zz}-\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{xx}Z_{xz}-\mu Z_{xz}Z_{zz}\quad u_z=0$$

$$Z'_{zx}+\quad \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{xx}-i\gamma\mu\lambda Z_{zz}+\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{zx}Z_{xx}+\mu Z_{zx}Z_{zz}$$
$$-\ \ \lambda+2\mu\ \ \mu^2\gamma^2+\ \ \lambda+2\mu\ \ \rho\mu\omega^2\quad u_x+\ \ Z_{zz}+\quad \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{xz}- \tag{34}$$
$$-\ \ \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{zx}+\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{xz}Z_{zx}+\mu Z_{zz}^2+\ \ \lambda+2\mu\ \ \mu^2\gamma^2\quad u_z=0$$

Так как равенство нулю должно выполняться при любых u_x, u_z, то выражения в скобках при u_x и u_z должны быть равны нулю. В результате получаем систему дифференциальных уравнений для компонента тензора импеданса:

$$\begin{cases}\dfrac{dZ_{xx}}{dz}=i\lambda\mu\gamma\ \ Z_{xz}-Z_{zx}\ \ -\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{xx}^2-\mu Z_{xz}Z_{zx}+\\ \qquad +4\mu^2\gamma^2\ \ \lambda+\mu\ \ -\omega^2\rho\mu\ \ \lambda+2\mu\\ \dfrac{dZ_{xz}}{dz}=-\quad \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{xx}-i\mu\lambda\gamma Z_{zz}-\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{xx}Z_{xz}-\mu Z_{xz}Z_{zz}\\ \dfrac{dZ_{zx}}{dz}=-\quad \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{xx}-i\gamma\mu\lambda Z_{zz}+\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{zx}Z_{xx}+\mu Z_{zx}Z_{zz}\\ \dfrac{dZ_{zz}}{dz}=-\quad \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{xz}-\ \ \lambda+2\mu\ \ i\mu\gamma Z_{zx}+\\ \qquad +\ \ \lambda+2\mu\ \ Z_{xz}Z_{zx}+\mu Z_{zz}^2+\omega^2\rho\mu\ \ \lambda+2\mu\end{cases} \tag{35}$$

Система решается при заданных λ_n , μ_n , ρ_n в каждом слое, частота ω при различных значениях γ . В результате вычисляем $\hat{Z}\ \ z=0\ \ =\hat{Z}^0(\gamma)$ как функцию от γ. Для решения системы необходимо задать начальное значение тензора импеданса при $z=z_N=H$ (поверхность полупространства). Зная $Z\ \ z=H\ \ =\hat{Z}^H$ легко численно решать задачу Коши для $\hat{Z}\ \ z$.

Экспериментальные результаты и расчет начального значения $\hat{Z}_H$

Рассмотрено нижнее полупространство для слоистой среды $z\in[z_N,\infty)$. Здесь не существуют отраженные волны, следовательно, смещение u_x, u_z имеет вид:

$$\begin{cases} u_x^{(N)} = -i\eta_1^{(N)} e^{-\eta_1^{(N)} z_N} C_1 + \gamma e^{-\eta_2^{(N)} z_N} C_2 \\ u_z^{(N)} = \ \gamma e^{-\eta_1^{(N)} z_N} C_1 + i\eta_2^{(N)} e^{-\eta_2^{(N)} z_N} C_2 \end{cases} \tag{36}$$

Продифференцировав систему (36) по z имеем:

$$\begin{cases} u_x'^{(N)} = i\eta_1^{2(N)} e^{-\eta_1^{(N)} z_N} C_1 - \eta_2^{(N)} \gamma e^{-\eta_2^{(N)} z_N} C_2 \\ u_z'^{(N)} = \ -\eta_1^{(N)} \gamma e^{-\eta_1^{(N)} z_N} C_1 - i\eta_2^{2(N)} e^{-\eta_2^{(N)} z_N} C_2 \end{cases} \tag{37}$$

Решая систему (36) для C_1, C_2 получим:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{i\eta_2 u_x - u_z\gamma}{\eta_1\eta_2 - \gamma^2} e^{\eta_1 z} \\ C_2 = -\dfrac{i\eta_1 u_z + u_x\gamma}{\eta_1\eta_2 - \gamma^2} e^{\eta_2 z} \end{cases} \tag{38}$$

Подставив полученные C_1, C_2 в (37) и совместно с (28) получим:

$$\begin{cases} Z_{xx} - W_1 \ \ u_x + \ \ Z_{xz} - W_2 \ \ u_z = 0 \\ Z_{zx} - W_3 \ \ u_x + \ \ Z_{zz} - W_4 \ \ u_z = 0 \end{cases} \tag{39}$$

Так как выражения в скобках должны быть равны нулю, тогда получим:

$$\begin{cases} Z_{xx} = W_1 \\ Z_{xz} = W_2 \\ Z_{zx} = W_3 \\ Z_{zz} = W_4 \end{cases} \tag{40}$$

где

$$W_1 = -\frac{\mu\eta_2 \ \ \eta_1^2 - \gamma^2}{\eta_1\eta_2 - \gamma^2}, \ W_2 = -\frac{i\mu\gamma \ \ \eta_1^2 - 2\eta_1\eta_2 + \gamma^2}{\eta_1\eta_2 - \gamma^2},$$

$$W_3 = \left(\lambda + 2\mu\right)\frac{i\gamma\left(\eta_1\eta_2 - \eta_2^2\right)}{\eta_1\eta_2 - \gamma^2} + i\gamma\lambda,\ W_4 = \left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\eta_1\left(\eta_2^2 - \gamma^2\right)}{\eta_1\eta_2 - \gamma^2}.$$

Согласно непрерывности тензора импеданса на границе $z_N = z_H = H$ имеем:

$$\hat{Z}_H = \begin{vmatrix} Z_{xx}^{(H)} & Z_{xz}^{(H)} \\ Z_{zx}^{(H)} & Z_{zz}^{(H)} \end{vmatrix} \tag{41}$$

Каждый элемент является тензором второго ранга, который можно представить в виде: $Z_{xx}^{(H)} = W_1\left(\lambda_H, \mu_H, \rho_H, \gamma\right)$, $Z_{xz}^{(H)} = W_2\left(\lambda_H, \mu_H, \rho_H, \gamma\right)$, $Z_{zx}^{(H)} = W_3\left(\lambda_H, \mu_H, \rho_H, \gamma\right)$, $Z_{zz}^{(H)} = W_4\left(\lambda_H, \mu_H, \rho_H, \gamma\right)$. Таким образом, мы получили начальные значения системы дифференциальных уравнений (35), связанные с постоянными $\lambda_H, \mu_H, \rho_H, \gamma$.

$$\begin{cases} Z_{xx}^{(H)} = -\dfrac{\mu^{(H)}\eta_2^{(H)}\left(\eta_1^{2(H)} - \gamma^2\right)}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} \\ Z_{xz}^{(H)} = -\dfrac{i\mu^{(H)}\gamma\left(\eta_1^{2(H)} - 2\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} + \gamma^2\right)}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} \\ Z_{zx}^{(H)} = \left(\lambda^{(H)} + 2\mu^{(H)}\right)\dfrac{i\gamma\left(\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \eta_2^{2(H)}\right)}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} + i\gamma\lambda^{(H)} \\ Z_{zz}^{(H)} = \left(\lambda^{(H)} + 2\mu^{(H)}\right)\dfrac{\eta_1^{(H)}\left(\eta_2^{2(H)} - \gamma^2\right)}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} \end{cases} \tag{42}$$

С помощью метода Рунге −Кутты четвёртого порядка можно получить решение системы (35) $\hat{Z}_0$, и согласно дисперсионному уравнению (26) можем получить характеристики бегущей волны связанной с различными частотами $\gamma(\omega)$, т.е.:

$$f\left(\gamma\right) = \det\hat{Z}^0 = Z_{xx}^0 Z_{zz}^0 - Z_{xz}^0 Z_{zx}^0 \tag{43}$$

Из-за того, что трудно найти аналитическое решение для $\gamma(\omega)$, мы задаем соответствующий интервал $\gamma \in \left(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_N\right)$ и вычисляем $f(\gamma)$ по маленькому шагу $\Delta\gamma$=0.002 (характеристика $\gamma(\omega)$ имеет физическое значение в виде $\gamma\left(\omega\right) = \omega/c$, где c−фазовая скорость. Из выражения видно, что $\gamma(\omega)$ является маленьким числом, мы не можем хорошо определить его интервал. Поэтому из условия $c < Vs < Vp$ легко задаем интервал $c \in [\xi\min(Vs_j), \xi\max(Vs_j)]$, $j = 1, \ldots, N$, $0.8 < \xi < 1$, где j−число слоя).

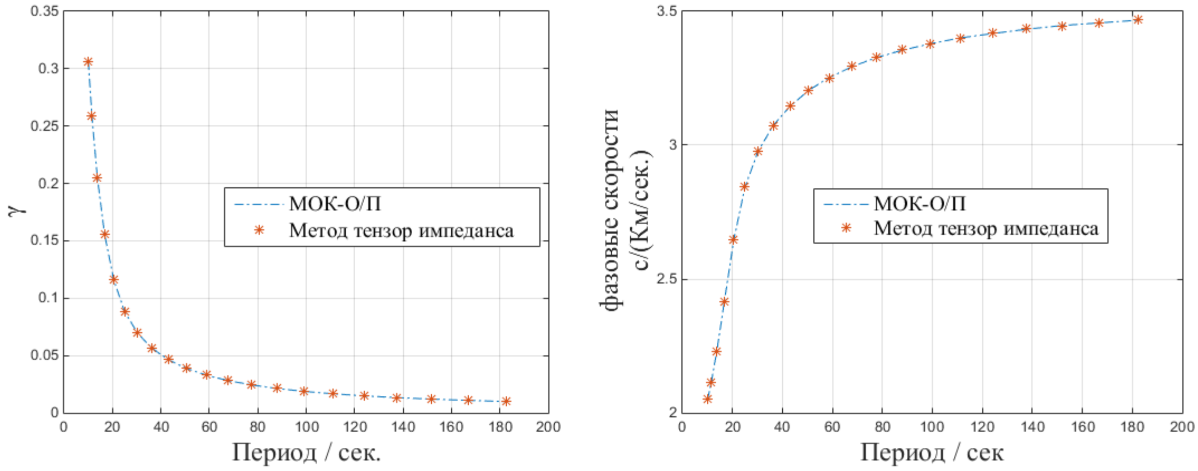
Теперь задаем простую экспериментальную модель для слоистой среды (таблица.1). Зная постоянные ρ, Vp, Vs легко численно вычислить коэффициенты Ламе λ, μ для каждого слоя. Подставив все постоянные в

(35), (42), (43), получим все характеристики γ и фазовые скорости c зависящие от соответствующего периода (рис. 1, рис. 2). Для обработки сейсмических данных принято изучать бегущую волну фундаментального порядка с частотой менее 1 Герца. Поэтому в численных экспериментах для нахождения дисперсионной кривой бегущей волны фундаментальной моды берем интервал частоты 10-200 секунд.

Таблица 1. Коэффициенты среды в модели 1

слои	Глубины(Км)	ρ/(g.cm³)	Vp/(Км/сек.)	Vs / (Км/сек.)
1	10	2.4	3.5	2.1
2	20	2.5	4	2.7
3	∞	3	6	4

Vp− скорость продольной волны, Vs− скорость поперечной волны.



(а) (б)

Рисунок 1. а). Сравнение характеристики бегущих волн с методами тензора импеданса и МОК-О/П. б). Сравнение фазовых скоростей с методами тензора импеданса и МОК-О/П.

Для проверки устойчивости метода вычислена дисперсионная кривая по двум классическим моделям (таб. 2). В модели II существует низкоскоростной слой. Модель III является моделью увеличения волновой скорости. После получения $\gamma\ \omega$, $c\ \omega$ групповые скорости U_γ были получены по формуле:

$$U_\gamma = c\ \omega \left(1 + \frac{T}{c\ \omega}\frac{dc\ \omega}{dT}\right)^{-1} \quad (44)$$

где Т−период бегущей волны. Можно заметить, что с помощью метода тензора импеданса полученные результаты хорошо совпадают с методом МОК-О/П, погрешности сравнимы 1% (рис. 2).

Таким образом, метод тензора импеданса позволяет изучать дисперсию бегущей волны, однозначно выделяя бегущей волны фундаментальной моды, это доказывает эффективность описанного метода.

Таблица 2. Коэффициенты среды в модели II и III

Слои	Глубины(Км)		ρ/(g.cm^3)		Vp/(Км/сек.)		Vs / (Км/сек.)	
	M2	M3	M2	M3	M2	M3	M2	M3
1	19	20	2.74	2.8	6.14	6.0	3.55	3.5
2	69	30	3.69	2.9	9.15	6.3	5.04	3.65
3	94	55	3.39	4.0	7.93	6.5	4.37	3.8
4	194	75	4.01	3.2	9.88	7.6	5.45	4.5
5	∞	∞	4.63	2.4	11.35	9.3	6.32	5.6

**M2, M3 представляют соответственно модель* II *и модель* III

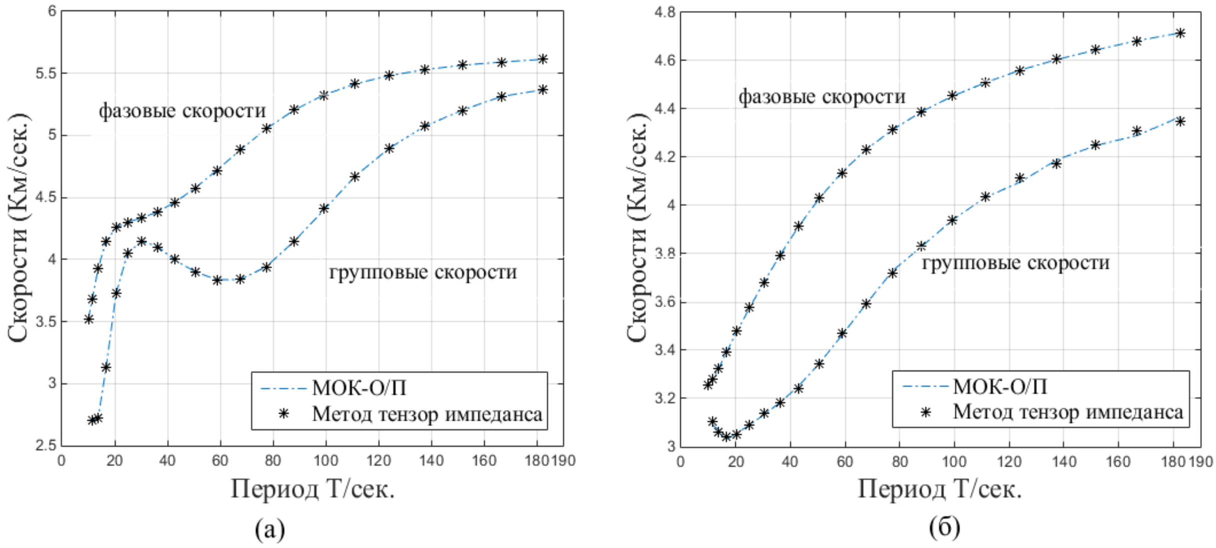


Рисунок 2. а). Сравнение результатов расчета по модели II. б). Сравнение результатов расчета по модели III.

Литература

1. *В.И. Дмитриев, Г.В. Аккуратов*, Математическое моделирование сейсмического частотного зондирования. –М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1985, с.39-66.
2. *Haskell, N. A.*, 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media, Bull. Seism. Soc. Am., 43, 17-34.
3. *Knopoff, L.*, 1964. A matrix method for elastic wave problems, Bull. seisrn. Soc. Am., 54, 431-438.
4. *Knopoff, L.*, Schwab, F. & Kausel, E., 1973. Interpretation of Lx, Geophys. J. R. astr. Soc., 33, 983-993.
5. *F. Gilbert and G. Backus*, ‘‘Propagator matrices in elastic wave and vibration problems,’’ Geophysics 31, 326–332, 1966.
6. *Abo-Zena, A.*, Dispersion function computations for unlimited frequency values’’ Geophysical. J. R. Astron. Soc., 1979.

7. *W. Menke*, ‘‘Comment on ‘Dispersion function computations for unlimited frequency values’ by A. Abo-Zena,’’ Geophysical. J. R. Astron. Soc. 59, 315–323, 1979.

8. *Aki, K., Richards P. G.,* 1980. Quantitative Seismology: Theory and Methods, W. H. Freeman, San Francisco, 1980.

9. *Zhang Shi-Gong, Wu Xian-Mei, Zhang Bi-Xing, An Zhi-Wu*, Propagation properties of one-dimensional nonlinear acoustic waves, Acts Physica Sinica, 65, 2016.

10. *Bixing Zhang, M. Yu, C. Q. Lan, and Wei Xiong*, Elastic wave and excitation mechanism of surface waves in multilayered media, The Journal of the Acoustical Society of America 100, 3527, 1996.

11. *Chen X. F.,* A systematic and efficient method of computing normal modes for multi layered half-space. Geophysical J. Int., 115: 391~409, 1993.

12. *He Y F, Chen W T, Chen X F.* Normal mode computation by the generalized reflection-transmission coefficient method in planar layered half-space .Chinese J. Gophys. (in Chinese), 49(4):1074~1081,2006.

13. *Donghong Pei, John N. Louie, and Satish K. Pullammanappallil.* Improvements on Computation of Phase Velocities of Rayleigh Waves Based on the Generalized R/T Coefficient Method. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 98, No. 1, pp. 280–287, February 2008.

14. *Pan J. T., Wu Q. J., Li H. Y.,* Group velocities computation of surface waves based on the fast generalized R/T coefficient method. Progress in geophys (in Chinese). 24(6): 2030-2035, 2009.

15. *Zhang Fan-chang and Yin Xing-yao*, Elastic wave equation inversion of seismic data in layered half-space. OGP, 40(5):523-529, 2005.

16. *Ma X.Q.,* Simultaneous inversion of prestack seismic data for rock properties using simulated annealing, Geophysics, 67(6): 1877~1885, 2002.

17. *Simmons J.L. and Baekus M. M.,* AVO modeling and the locally converted shear wave. Geophysics, 59, (3):1237~1248, 1994.