Е.В. Захаров, С.И. Орлик

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ*

1. Введение

Задача сопряжения для уравнений Лапласа и Пуассона является классической моделью при изучении распределения постоянного электрического тока в кусочно-однородных проводящих средах. В частности при изучении электрических явлений в организме человека задача сопряжения является моделью неоднородности биологических тканей и возникает как внутренняя задача Дирихле или Неймана (например в электрокардиографии или электроэнцефалографии) для уравнения Лапласа или Пуассона.

Задача Дирихле для кусочно-однородной среды была поставлена и решена методом граничных интегральных уравнений в работе [1]. Разработанный и программно реализованный в [1] метод граничных интегральных уравнений позволил поставить и решить ряд обратных задач электрокардиографии в средах с кусочно-однородной структурой [2], [3]. Отметим, что аналогичные задачи возникают и при моделировании электрических явлений головного мозга человека (см., например, [4], [5]).

В данной работе рассмотрена внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона в области, заполненной кусочно-однородной проводящей средой. Отметим, что уравнение Пуассона содержит, в частности, информацию об источнике электрического поля, что весьма актуально для электрокардиографии и электроэнцефалографии.

Поставленная краевая задача для уравнения Пуассона сведена к системе граничных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, построена сопряженная система, получены условия разрешимости поставленной краевой задачи.

2. Постановка задачи. Теорема единственности.

Рассмотрим область $D = D_0 \cup \overline{D_1} \cup \ldots \cup \overline{D_N}$ в R^3 (см. Рис. 1). D_0 – многосвязная область в R^3, D_i – односвязные области, $i = 1, \ldots, N$. Предположим, что все границы Γ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, являются поверхностями Ляпунова, никакие две границы не имеют общих точек. Поставим следующую задачу в $\overline{D} = D \cup \Gamma_0$.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 14-01-00244.

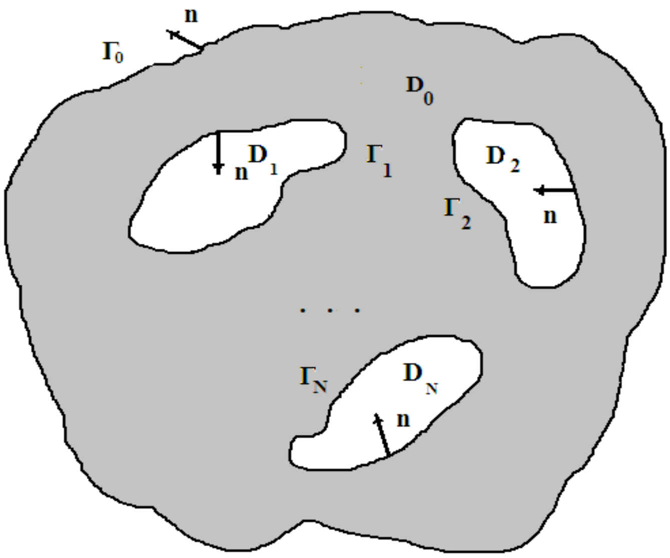

Рис.1

Требуется найти функцию $z \in C(\overline{D})$ такую, что $z(x) = z_i(x),\ x \in D_i,\ i = 0,1,\ldots,N$, где $z_i \in C^2(D_i) \cap C^1(\overline{D_i})$ и

$$\operatorname{div}(k_i \operatorname{grad} z_i(x)) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \Delta z_i(x) = 0,\ x \in D_i,\ i = 0,2,\ldots,N; \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(k_1 \operatorname{grad} z_1(x)) = -F(x), \quad \text{т.е.} \quad \Delta z_1(x) = -\frac{F(x)}{k_1},\ x \in D_1; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial z_0(x)}{\partial n_x}\right|_{x \in \Gamma_0} = g_0(x), \quad g \in C(\Gamma_0); \tag{3}$$

$$z_0(x) = z_i(x), \quad x \in \Gamma_i,\ i = 1,\ldots,N; \tag{4}$$

$$k_o \cdot \left.\frac{\partial z_0(x)}{\partial n_x}\right|_{x \in \Gamma_i} = k_i \cdot \left.\frac{\partial z_i(x)}{\partial n_x}\right|_{x \in \Gamma_i}, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{5}$$

В условиях сопряжения (5) параметры $k_i,\ i = 0,1,\ldots,N,$ постоянны, положительны и конечны. Нормали выбраны на всех границах Γ_i внешними по отношению к области D_0.

Функцию F в уравнении (2) можно считать заданной всюду в $\overline{D}$, но $F(x) = 0$ при $x \in \overline{D} \setminus \overline{D}_1$. Предполагаем, что функция F удовлетворяет требованию $F \in C^1(\overline{D}_1)$ или более слабым требованиям, при которых выполняются обычные свойства объемного потенциала с плотностью F, носитель которой принадлежит $\overline{D}_1$.

Утверждение 1. *Если функции* $z(x)$ *и* $\tilde{z}(x)$ *удовлетворяют условиям (1)-(5) в* $\overline{D}$, *то* $z(x)-\tilde{z}(x)\equiv const$ *в* $\overline{D}$.

Доказательство единственности решения с точностью до произвольной постоянной дословно повторяет рассуждения в статье [1], основанные на применении первой формулы Грина.

Введем объемный потенциал $U(x)=\dfrac{1}{4\pi k_1}\cdot\int\limits_{D_1}\dfrac{F(y)}{|x-y|}dy$, $x\in\overline{D}$ (здесь $|x-y|$ означает расстояние между точками x и y). Функция $U(x)$ известна, она определена и непрерывна всюду в $\overline{D}$, имеет всюду в $\overline{D}$ непрерывные первые производные, удовлетворяет уравнениям

$\Delta U(x)=-\dfrac{F(x)}{k_1}$ в области D_1 и $\Delta U(x)=0$ в $\overline{D}\setminus\overline{D}_1$.

Выполним замену искомой функции в задаче (1) - (5): положим $z(x)=u(x)+U(x)$. Тогда для функции $u(x)$ получаем следующую задачу. Требуется найти функцию $u\in C(\overline{D})$ такую, что $u(x)=u_i(x),\ x\in D_i, i=0,1,\dots,N,$ где $u_i\in C^2(D_i)\cap C^1(\overline{D}_i)$ и

$$\Delta u_i(x)=0,\quad x\in D_i,\ i=0,1,\dots,N; \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}\right|_{x\in\Gamma_0}=g_0(x)-\left.\frac{\partial U(x)}{\partial n_x}\right|_{x\in\Gamma_0}; \tag{7}$$

$$u_0(x)=u_i(x),\quad x\in\Gamma_i,\ i=1,\dots,N; \tag{8}$$

$$k_0\cdot\left.\frac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}\right|_{x\in\Gamma_i}=k_i\cdot\left.\frac{\partial u_i(x)}{\partial n_x}\right|_{x\in\Gamma_i}-(k_0-k_i)\cdot\left.\frac{\partial U(x)}{\partial n_x}\right|_{x\in\Gamma_i}, \quad i=1,\dots,N. \tag{9}$$

Условие сопряжения (8) выполнено в силу непрерывности функции $U(x)$, а условие сопряжения (9) — в силу непрерывности её первых производных. При $x\in\Gamma_0$ введем обозначение: $\tilde{g}(x)=g_0(x)-\left.\dfrac{\partial U(x)}{\partial n_x}\right|_{x\in\Gamma_0}$ — известная функция.

3. Построение системы граничных интегральных уравнений Фредгольма 2- го рода.

Решение $u(x)$ задачи (6)-(9) будем искать в виде суммы потенциалов простых слоев на поверхностях Γ_i, $i=0,1,\ldots,N$. Этим будет гарантировано выполнение условия $u\in C(\overline{D})$ и, в частности, будут выполнены условия (8). Такая функция $u(x)$ автоматически удовлетворяет уравнениям (6).

В замкнутой области $\overline{D}$ будем искать решение в виде

$$u(x)=\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\chi_0(y)}{|x-y|}\mathrm{d}s_y+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_0-k_i}{k_0+k_i}\cdot\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\chi_i(y)}{|x-y|}\mathrm{d}s_y. \tag{10}$$

Условия (7) и (9) дают систему интегральных уравнений относительно искомых плотностей χ_i, $i=0,1,\ldots,N$.

Условие (7) означает, что $\lim\limits_{\substack{\tilde{x}\to x\in\Gamma_0\\ \tilde{x}\in D_0}}\dfrac{\partial u_0(\tilde{x})}{\partial n_x}=\tilde{g}(x)$.

Потенциал $w_0(x)=\int\limits_{\Gamma_0}\dfrac{\chi_0(y)}{|x-y|}\mathrm{d}s_y$ удовлетворяет условию одностороннего скачка его производной по нормали на Γ_0, а нормальные производные потенциалов $w_i(x)=\int\limits_{\Gamma_i}\dfrac{\chi_i(y)}{|x-y|}\mathrm{d}s_y$, $i=1,\ldots,N$, непрерывны на Γ_0. Поэтому

$$\lim_{\substack{\tilde{x}\to x\in\Gamma_0\\ \tilde{x}\in D_0}}\frac{\partial w_0(\tilde{x})}{\partial n_x}=\tilde{g}(x)-\sum_{i=1}^{N}\frac{k_0-k_i}{k_0+k_i}\cdot\frac{\partial w_i(x)}{\partial n_x},\ x\in\Gamma_0;\ \text{т.е.}$$

$$2\pi\chi_0(x)+\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\cos(y-x,n_x)}{|x-y|^2}\cdot\chi_0(y)\,\mathrm{d}s_y=$$

$$=\tilde{g}(x)-\sum_{i=1}^{N}\frac{k_0-k_i}{k_0+k_i}\cdot\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\cos(y-x,n_x)}{|x-y|^2}\cdot\chi_i(y)\,\mathrm{d}s_y,\ x\in\Gamma_0,$$

здесь $(y-x,\,n_x)$ означает угол между векторами $y-x$ и n_x.

Условие (7) принимает вид:

$$\chi_0(x)+\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\cos(y-x,n_x)}{2\pi\cdot|x-y|^2}\cdot\chi_0(y)\,\mathrm{d}s_y+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_0-k_i}{k_0+k_i}\cdot\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\cos(y-x,n_x)}{2\pi\cdot|x-y|^2}\cdot\chi_i(y)\,\mathrm{d}s_y=\frac{\tilde g(x)}{2\pi},\ x\in\Gamma_0 \qquad (11)$$

Условие (9) означает, что при $i=1,\ldots,N$ выполнены равенства

$$k_0\cdot\lim_{\substack{\tilde x\to x\in\Gamma_i\\ \tilde x\in D_0}}\frac{\partial u_0(\tilde x)}{\partial n_x}=k_i\cdot\lim_{\substack{\tilde x\to x\in\Gamma_i\\ \tilde x\in D_i}}\frac{\partial u_i(\tilde x)}{\partial n_x}-(k_0-k_i)\cdot\frac{\partial U(x)}{\partial n_x},\ x\in\Gamma_i.$$

При каждом $i=1,\ldots,N$ потенциал $w_i(x)$ удовлетворяет условиям односторонних скачков его производной по нормали на поверхности Γ_i, а нормальные производные потенциалов $w_j(x),\ j\neq i$, непрерывны на Γ_i. Поэтому

$$k_0\cdot\left\{\frac{k_0-k_i}{k_0+k_i}\cdot\left[2\pi\chi_i(x)+\left(\frac{\partial w_i(x)}{\partial n_x}\right)_0\right]+\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_x}+\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\frac{\partial w_j(x)}{\partial n_x}\right\}=$$

$$=k_i\cdot\left\{\frac{k_0-k_i}{k_0+k_i}\cdot\left[\left(\frac{\partial w_i(x)}{\partial n_x}\right)_0-2\pi\chi_i(x)\right]+\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_x}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\frac{\partial w_j(x)}{\partial n_x}\right\}-$$

$$-(k_0-k_i)\cdot\frac{\partial U(x)}{\partial n_x},\ \ x\in\Gamma_i,\ \ i=1,\ldots,N;$$

здесь $\left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)_0$ означает прямое значение нормальной производной. Условие (9) принимает вид:

$$\chi_i(x)+\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\cos(y-x,n_x)}{2\pi\cdot|x-y|^2}\cdot\chi_0(y)\,\mathrm{d}s_y+ \tag{12}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\cos(y-x,n_x)}{2\pi\cdot|x-y|^2}\cdot\chi_j(y)\,\mathrm{d}s_y=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial U(x)}{\partial n_x},\ x\in\Gamma_i,\ i=1,\ldots,N.$$

Введем обозначения интегральных операторов и их ядер в системе интегральных уравнений (11), (12):

$$\left(A_{ij}\chi_j\right)(x)=\int\limits_{\Gamma_j}K_{ij}(x,y)\cdot\chi_j(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

где $K_{ij}(x,y)=\dfrac{\cos(y-x,n_x)}{2\pi\cdot|x-y|^2},\ x\in\Gamma_\mathrm{i},\ \ y\in\Gamma_\mathrm{j},\ i,j=0,1,\ldots,N.$

Напомним, что все нормали n_x выбраны внешними по отношению к области D_0. Оператор A_{ij} можно рассматривать как действующий из $\tilde{L}_2\left(\Gamma_\mathrm{j}\right)$ в $\tilde{L}_2\left(\Gamma_i\right)$ (здесь волна означает, что все функции данного пространства непрерывны). При $i\neq j$ ядро K_{ij} непрерывно на $\Gamma_i\times\Gamma_j$; ядра K_{ii} имеют слабую особенность. В каждом уравнении системы (11), (12) содержится по одному интегральному оператору со слабой особенностью. Эта система фредгольмова и может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases}\chi_0(x)+\left(A_{00}\chi_0\right)(x)+\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\left(A_{0j}\chi_j\right)(x)=\dfrac{\tilde{g}(x)}{2\pi},\ x\in\Gamma_0;\\[2ex] \chi_i(x)+\left(A_{i0}\chi_0\right)(x)+\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\left(A_{ij}\chi_j\right)(x)=-\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{\partial U(x)}{\partial n_x},\ x\in\Gamma_i;\end{cases} \tag{13}$$

$$i=1,\ldots,N.$$

Введем обозначение для декартова произведения пространств $\tilde{L}_2\left(\Gamma_i\right)$: $\quad \tilde{L}_2^{N+1}=\tilde{L}_2\left(\Gamma_0\right)\times\tilde{L}_2\left(\Gamma_1\right)\times\ldots\times\tilde{L}_2\left(\Gamma_N\right).$

Пусть χ — набор искомых плотностей: $\chi=\left(\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_N\right)\in\tilde{L}_2^{N+1}$, и точно так же γ — набор правых частей в уравнениях (13): $\gamma\in\tilde{L}_2^{N+1}$. Тогда система уравнений (13) запишется в виде:

$$\left(E-\mu\cdot A\right)\chi=\gamma,\quad \mu=-1, \tag{14}$$

где оператор $A: \tilde{L}_2^{N+1} \to \tilde{L}_2^{N+1}$ (задание оператора A ясно из системы (13)), а E — тождественный (единичный) оператор в $\tilde{L}_2^{N+1}$.

4. Сопряженная система интегральных уравнений. Условие разрешимости исходной задачи.

В пространстве $\tilde{L}_2^{N+1}$ над полем действительных чисел введем скалярное произведение его элементов χ и ν:

$$(\chi, \nu)_{\tilde{L}_2^{N+1}} = \sum_{i=0}^{N} (\chi_i, \nu_i)_{\tilde{L}_2(\Gamma_i)}, \quad \text{где } (\chi_i, \nu_i)_{\tilde{L}_2(\Gamma_i)} = \int_{\Gamma_i} \chi_i(x) \cdot \nu_i(x)\, ds_x.$$

Определим сопряженный оператор A^*:

$$(A\chi, \nu)_{\tilde{L}_2^{N+1}} = \left(\chi, A^* \nu\right)_{\tilde{L}_2^{N+1}}$$

для любых элементов χ и ν из $\tilde{L}_2^{N+1}$. Для нахождения оператора A^* надо ввести операторы A_{ij}^*, сопряженные к операторам A_{ij}:

$$\left(A_{ij} \chi_j, \nu_i\right)_{\tilde{L}_2\left(\Gamma_i\right)} = \left(\chi_j, A_{ij}^* \nu_i\right)_{\tilde{L}_2\left(\Gamma_j\right)}$$

для любой функции $\chi_j \in \tilde{L}_2\left(\Gamma_j\right)$ и любой функции $\nu_i \in \tilde{L}_2\left(\Gamma_i\right)$; $A_{ij}^*: \tilde{L}_2\left(\Gamma_i\right) \to \tilde{L}_2\left(\Gamma_j\right)$. Очевидно, что

$$\left(A_{ij}^* \nu_i\right)(x) = \int_{\Gamma_i} K_{ij}^*(x, y) \cdot \nu_i(y)\, ds_y, \qquad \text{где} \qquad K_{ij}^*(x, y) = K_{ij}(y, x),$$

$x \in \Gamma_j$, $y \in \Gamma_i$.

Функцию ν_i можно рассматривать как плотность двойного слоя на поверхности Γ_i. Тогда $\left(A_{ij}^* \nu_i\right)(x)$ есть разделенное на 2π (см. определение ядер K_{ij}) значение в точке $x \in \Gamma_j$ потенциала двойного слоя с плотностью ν_i на несущей поверхности Γ_i. При $j = i$ выражение

$\left(A^{*}_{ii}\nu_i\right)(x)$ является <u>прямым</u> значением (разделенным на 2π) в точке $x\in\Gamma_i$ потенциала двойного слоя с плотностью ν_i на <u>той же</u> поверхности Γ_i.

Найдем оператор $A^{*}:\tilde{L}_2^{N+1}\to\tilde{L}_2^{N+1}$.

$$\left(A_{00}\chi_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot A_{0j}\chi_j,\nu_0\right)_{\tilde{L}_2\left(\Gamma_0\right)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(A_{i0}\chi_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot A_{ij}\chi_j,\nu_i\right)_{\tilde{L}_2\left(\Gamma_i\right)}=$$

$$=\left(\chi_0,\sum_{i=0}^{N}A^{*}_{i0}\nu_i\right)_{\tilde{L}_2\left(\Gamma_0\right)}+\sum_{j=1}^{N}\left(\chi_j,\frac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\sum_{i=0}^{N}A^{*}_{ij}\nu_i\right)_{\tilde{L}_2\left(\Gamma_j\right)}.$$

Сопряженная однородная система интегральных уравнений $\left(E-\mu\cdot A^{*}\right)\nu=0,\ \mu=-1,$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\nu_0+\sum\limits_{i=0}^{N}A^{*}_{i0}\nu_i=0, & x\in\Gamma_0;\\ \nu_j+\dfrac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}A^{*}_{ij}\nu_i=0,\ x\in\Gamma_j; & j=1,\ \ldots,\ N.\end{cases}\tag{15}$$

Запишем её в развернутой форме:

$$\begin{cases}\nu_0(x)+\sum\limits_{i=0}^{N}\int\limits_{\Gamma_i}\dfrac{\cos\left(x-y,n_y\right)}{2\pi\cdot\left|x-y\right|^2}\cdot\nu_i(y)\,\mathrm{d}s_y=0, & x\in\Gamma_0;\\ \nu_j(x)+\dfrac{k_0-k_j}{k_0+k_j}\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}\int\limits_{\Gamma_i}\dfrac{\cos\left(x-y,n_y\right)}{2\pi\cdot\left|x-y\right|^2}\cdot\nu_i(y)\,\mathrm{d}s_y=0,\ x\in\Gamma_j;\end{cases}\tag{16}$$

$$j=1,\ \ldots,\ N.$$

Утверждение 2. *Число* $\mu = -1$ *является характеристическим для операторов* A *и* A^*. *Постоянные на каждой поверхности* Γ_i *плотности* ν_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, *удовлетворяют системе уравнений (16). При этом* $\nu_j = \left(1 - \dfrac{k_j}{k_0}\right) \cdot \nu_0$, *где* ν_0 *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Пусть все функции $\nu_i(x)$ постоянны, $i = 0, 1, \ldots, N$. По теореме Гаусса имеем:

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\cos(x - y, n_y)}{2\pi \cdot |x - y|^2} \cdot \nu_0 \, \mathrm{d}s_y = \begin{cases} \dfrac{-4\pi\nu_0}{2\pi} = -2\nu_0, \ x \in \Gamma_i, \ i = 1, \ldots, N; \\ \dfrac{-2\pi\nu_0}{2\pi} = -\nu_0, \ x \in \Gamma_0; \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\cos(x - y, n_y)}{2\pi \cdot |x - y|^2} \cdot \nu_i \, \mathrm{d}s_y = \begin{cases} 0, \quad x \in \Gamma_j, \ j \neq i, \ j = 0, 1, \ldots, N; \\ \dfrac{2\pi\nu_i}{2\pi} = \nu_i, \ x \in \Gamma_i. \end{cases}$$

Подставим эти значения интегралов в систему (16):

$$\begin{cases} \nu_0 - \nu_0 + \sum\limits_{i=0}^{N} 0 = 0, \qquad x \in \Gamma_0; - \text{тавтология}; \\ \nu_j - 2\nu_0 \cdot \dfrac{k_0 - k_j}{k_0 + k_j} + \dfrac{k_0 - k_j}{k_0 + k_j} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \nu_i, & \text{если } i = j. \end{pmatrix} = 0, \ x \in \Gamma_j; \quad j = 1, \ \ldots, \ N. \end{cases}$$

При $j = 1, \ \ldots, \ N$ получили уравнение

$$\nu_j - 2\nu_0 \cdot \frac{k_0 - k_j}{k_0 + k_j} + \frac{k_0 - k_j}{k_0 + k_j} \cdot \nu_j = 0, \text{отсюда } \nu_j = \left(1 - \frac{k_j}{k_0}\right) \cdot \nu_0.$$

Доказательство того, что характеристическое число $\mu = -1$ простое, проводится подобно случаю внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (в однородной среде в области D).

Получим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (6)-(9): $\gamma \perp \nu$ в $\tilde{L}_2^{N+1}$, где γ — правая часть в (14), а $\nu = \nu_0 \cdot \left(1, 1 - \dfrac{k_1}{k_0}, \ldots, 1 - \dfrac{k_N}{k_0}\right)$, $\nu_0 = \text{const}$. Это условие означает (см. (14), (13))

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{g}\left(x\right) ds_x - \sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{k_i}{k_0}\right)\cdot \int_{\Gamma_i} \frac{\partial U\left(x\right)}{\partial n_x} ds_x = 0. \tag{17}$$

Вспоминая обозначение $\tilde{g}\left(x\right)$ и учитывая, что $\Delta U\left(x\right)=0$ в областях $D_i, i=2,\ldots,N,$ получаем

$$\int_{\Gamma_0} g_0\left(x\right) ds_x - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial U\left(x\right)}{\partial n_x} ds_x - \left(1-\frac{k_1}{k_0}\right)\cdot \int_{\Gamma_0} \frac{\partial U\left(x\right)}{\partial n_x} ds_x = 0, \tag{18}$$

т.е. условие разрешимости задачи (6)-(9) не зависит от наличия областей $D_i, i=2,\ldots, N$, со средами, которые характеризуются параметрами k_i.

Применяя теорему Гаусса, имеем:

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial U\left(x\right)}{\partial n_x} ds_x = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{4\pi k_1}\cdot \int_{D_1} \frac{F\left(y\right)}{\left|x-y\right|} dy\right) ds_x =$$

$$= \frac{1}{4\pi k_1}\int_{D_1} F(y)\cdot\left(\int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{\left|x-y\right|}\right) ds_x\right) dy = -\frac{4\pi}{4\pi k_1}\int_{D_1} F(y)\,dy =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\cdot \int_{D_1} F(y)\,dy;$$

и точно так же $\int_{\Gamma_1} \frac{\partial U(x)}{\partial n_x} ds_x = \frac{1}{k_1}\cdot \int_{D_1} F(y)\,dy$. Отсюда и из (18) получаем физически очевидное и известное для внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона в области $\overline{D}$ (в случае однородной среды) необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (1)-(5):

$$\int_{\Gamma_0} g_0\left(x\right) ds_x + \frac{1}{k_0}\cdot \int_{D_1} F(x)\, dx = 0. \tag{19}$$

Наконец, если $\left.\frac{\partial z_0(x)}{\partial n_x}\right|_{x\in \Gamma_0} \equiv 0,$ то задача (1) - (5) разрешима в том, и только в том случае, если $\int_{D_1} F(y)\,dx = 0.$

В случае, когда области D_1 и D_0 — шары в R^3 с общим центром O (см. Рис.2), решение можно выписать в явном виде. В сферической системе координат с центром O:

$$D_1=\{r<R_1\}, D_0=\{r<R_0\}, D_1\subset D_0;$$
$$\Gamma_1=\{r=R_1\},\ \Gamma_0=\{r=R_0\}.$$

Рассмотрим центрально-симметричную задачу с условиями сопряжения

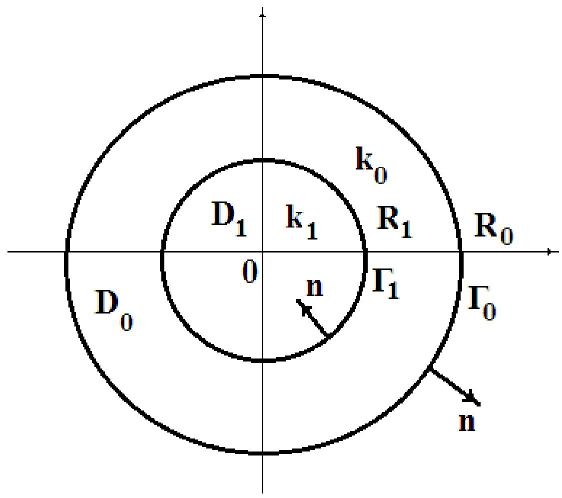

Рис.2

на сфере Γ_1, т.е. будем считать, что $F=F(r)$ и $g_0=const$; тогда $z_1=z_1(r), z_0=z_0(r)$.

Записывая задачу (1) - (5) для функций z_0 и z_1 с условием сопряжения на сфере Γ_1 и вводя функции $Z_0(r)=r\cdot z_0(r)$ и $Z_1(r)=r\cdot z_1(r)$, получаем для Z_0 и Z_1 обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка и вытекающие из исходной задачи краевые условия при $r=0$, $r=R_1$ и $r=R_0$. Решение этой задачи можно выписать в явном виде, причём условием её разрешимости является равенство

$$\frac{1}{k_0}\cdot\int_0^{R_1} F(r)\cdot r^2\,dr=-g_0 R_0^2. \tag{20}$$

Легко проверить, что в случае центрально-симметричной задачи для функций z_0 и z_1 условие (19) как раз и означает выполнение равенства (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е.В., Калинин А.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009, Т. 49, № 7, С. 1197-1206.

2. Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В. Численное решение обратной задачи электрокардиографии для среды с кусочно-постоянными коэффициентами электропроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010, № 7, С. 1233-1239.

3. Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В. Метод определения проекции точечного очага аритмии на поверхность сердца на основе решения обратной задачи электрокардиографии // Математическое моделирование, 2012, том 24, С. 22-30.

4. Захаров Е.В., Коптелов Ю.М. О решении одной задачи математической обработки электроэнцефалографических данных, ДАН СССР, 1987, 292, №3, С.576-581.

5. Гнездицкий В.В. Обратная задача ЭЭГ и клиническая электроэнцефалография (картирование и локализация источников электрической активности мозга) М. МЕДПРЕСС, информ, 2004.