

*С.В. Зеркаль*  
**АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ  
МЕТОДА ЧАСТИЦ НА МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ  
МЕЛКОЙ ВОДЫ**

**Введение**

Уравнения теории мелкой воды широко используются при моделировании сейш, приливов, цунами, лавин, оползней и других явлений природы. Давно замечено, что система уравнений теории мелкой воды по форме совпадает с системой уравнений газовой динамики (изоэнтропическое течение идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma=2$ ) [1, 2]. Например, задача о прорыве плотины теории мелкой воды аналогична классической задаче о распаде произвольного разрыва в газовой динамике, а задача о распространении бора и гидравлического прыжка аналогична задаче о движении поршня в трубе с газом. В то же время, задачи о структуре стационарных гидравлических прыжков и боров, распространяющихся с постоянной скоростью, являются классическими в гидравлике открытых русел. Поэтому представляет интерес применение варианта метода частиц, предложенного в работах [4, 5], к решению начально-краевых задач для этой системы уравнений и систематическое изучение свойств метода. Предлагаемая работа является непосредственным продолжением работы [6].

В настоящей работе приведены результаты численного анализа указанного варианта метода частиц для решения задачи Коши для квазилинейной системы уравнений теории мелкой воды с разрывными начальными условиями. Целью работы является апостериорная оценка погрешности численного решения задачи Коши. Решения получены на системе тестов в пространственно-временном прямоугольнике достаточно больших размеров. Для указанных целей создана компьютерная программа, позволяющая наблюдать на экране монитора эволюцию начального профиля, а также дает значения погрешности численного решения на фиксированном промежутке времени. В работе представлены рисунки с точными и численными решениями для всех заданных тестов и приведены таблицы погрешностей. Погрешность вычислена как для всей пространственно-временной области, так и локально в конечный момент времени. Погрешность решения для выбранного численного метода зависит от начального условия, шага по времени, числа частиц на носителе финитного начального условия. Значение погрешности является базой для апостериорного анализа сходимости метода.

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений, описывающей течение жидкости в канале [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 & 0 \leq x < \infty, \quad t \in (0, T) \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} = -\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

с кусочно-постоянными начальными условиями (табл. 1)

	$h_1 > h_2 > 0$	«бор» – форма 1
	$0 < h_1 < h_2$	«гидравлический прыжок» – форма 2
	$h_1 > h_2 > 0$ $u_1 = u_2 = 0$	«плотина-2», «плотина-3» – форма 3
	$h_1 > 0, h_2 = 0$ $u_1 = u_2 = 0$	«плотина-1» – форма 4

Таблица 1. Различные формы начальных профилей

$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x \in [x_1, x_2] \\ u_2, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & x \in [0, x_1) \cup (x_3, +\infty) \end{cases} \\ h(x,0) = \begin{cases} h_1, & x \in [x_1, x_2] \\ h_2, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & x \in [0, x_1) \cup (x_3, +\infty) \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

Характер и поведение решение задачи Коши для системы уравнений (1) подробно исследовано в монографии Стокера [1]. Его вид приведен в таблице 2.

Это решение использовано в дальнейшем для апостериорного контроля точности метода. Отличие численного решения, полученного с помощью метода частиц, от точного решения оценивается с помощью следующей нормы на  $R=(0, +\infty)$  при  $t=T$ :

$$\|f\|_{L_1(R)} = \int_0^{+\infty} |f| dx = \int_{\text{Supp } f} |f| dx$$

и на  $\Omega=(0, +\infty) \times [0, T]$ :

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_0^T \int_0^{+\infty} |f| dx dt = \int_0^T \int_{\text{Supp } f} |f| dx dt.$$

Из текста видно, по какому множеству ( $\Omega$  или  $R$ ) берется норма.

### Описание численного метода

Используемый в данной работе вариант метода частиц подробно описан в таких работах как [3-6]. Кратко можно отметить следующее. В ходе моделирования методом частиц неизвестная функция представляется в виде конечной суммы  $\delta$ -функций Дирака и находится обобщенное решение рассматриваемой задачи. Переходя к аппроксимации  $\delta$ -функций классическими функциями-«шапочками»  $w(x)$ , обобщенное решение заменяется классическим и искомая функция представляется в виде набора частиц, координаты которых становятся неизвестными. В одномерном случае частицы имеют форму прямоугольников. Важным моментом является тот факт, что частицы-прямоугольники соприкасаются друг с другом. Это означает, что они не перекрывают друг друга и не образуют пустот между собой. Центры прямоугольников являются координатами частиц. Левая часть системы уравнений (1), представляющая собой дифференциальный оператор переноса, заменяется уравнением движения частиц.

<p>Бор - форма 1</p>	$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = a \left(1 - \frac{h_0}{h_1}\right), & x_1 \leq x \leq x_2 + at \\ u_2 = 0, & x_2 + at \leq x \leq x_3 \end{cases}$ $h(x,t) = \begin{cases} h_1, & x_1 \leq x \leq x_2 + at \\ h_2, & x_2 + at \leq x \leq x_3 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">где <math>a = \sqrt{g \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)}</math></p>
<p>Гидравлический прыжок - форма 2</p>	$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = a, & x_1 \leq x \leq x_2 + at \\ u_2 = a \frac{h_2}{h_1}, & x_2 + at \leq x \leq x_3 \end{cases}$ $h(x,t) = \begin{cases} h_1, & x_1 \leq x \leq x_2 + at \\ h_2, & x_2 + at \leq x \leq x_3 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">где <math>a = \sqrt{g \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)}</math></p>
<p>Плотина - форма 3</p>	$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = 0, & x_1 \leq x \leq x_2 - c_1 t \\ u_3 = \frac{2}{3} \left(c_1 + \frac{x - x_2}{t}\right), & x_2 - c_1 t \leq x \leq x_2 + (u_4 - c_4)t \\ u_4 = a - \frac{c_2^2}{4a} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{a^2}{c_2^2}}\right), & x_2 + (u_4 - c_4)t \leq x \leq x_2 + at \\ u_2 = 0, & x_2 + at \leq x \leq x_3 \end{cases}$ $h(x,t) = \begin{cases} h_1, & x_1 \leq x \leq x_2 - c_1 t \\ h_3 = \frac{1}{9g} \left(2c_1 - \frac{x - x_2}{t}\right)^2, & x_2 - c_1 t \leq x \leq x_2 + (u_4 - c_4)t \\ h_4 = \frac{4a^2}{g \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{a^2}{c_2^2}}\right)}, & x_2 + (u_4 - c_4)t \leq x \leq x_2 + at \\ h_2, & x_2 + at \leq x \leq x_3 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">где <math>c_1 = \sqrt{gh_1}</math>, <math>c_2 = \sqrt{gh_2}</math>, <math>c_4 = \sqrt{gh_4}</math>, <math>a = \frac{c_2^2}{4a} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{a^2}{c_2^2}}\right) - \frac{4a}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 8 \frac{a^2}{c_2^2}}}} + 2c_1</math></p>
<p>Плотина - форма 4</p>	$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = 0, & x_1 \leq x \leq x_2 - c_1 t \\ u_2 = \frac{2}{3} \left(c_1 + \frac{x - x_2}{t}\right), & x_2 - c_1 t \leq x \leq x_2 + 2c_1 t \end{cases}$ $h(x,t) = \begin{cases} h_1, & x_1 \leq x \leq x_2 - c_1 t \\ h_2 = \frac{1}{9g} \left(2c_1 - \frac{x - x_2}{t}\right)^2, & x_2 - c_1 t \leq x \leq x_2 + 2c_1 t \end{cases}$ <p style="text-align: center;">где <math>c_1 = \sqrt{gh_1}</math></p>

Таблица 2. Точное решение (1)-(2) для всех начальных условий [1].

Правые части системы уравнений заменяются эквивалентным взаимодействием частиц. На каждом временном шаге строится новая аппроксимация искомой функции. Происходит перестройка частиц, так как в результате движения частицы перестают соприкасаться друг с другом: происходит их перекрывание или образуются пустоты между ними. Следует отметить важное свойство методов частиц – их консервативность, которая следует из способа построения.

В силу того, что методом частиц строится обобщенное решение исходной задачи, можно рассчитывать только на слабую сходимость вычислительного процесса. Поэтому в дальнейшем в качестве меры погрешности приближенного решения будет рассматриваться разность норм точного и приближенного решения.

### Организация вычислительного эксперимента

Для проведения вычислительного эксперимента с рассматриваемым методом создана программа для персонального компьютера. Программа позволяет наблюдать на экране монитора эволюцию начального профиля, полученного с помощью приведенного метода. Одновременно с численным решением получается точное решение задачи. На экран также выводится разность точного и приближенного решений на промежуточные и финальные моменты времени. Визуализация численного решения и его сравнение с точным дает детальную информацию об отклонении точного решения задачи от численного, а также четкое представление о качественных свойствах вычислительного алгоритма для данной системы уравнений.

На основе численных расчетов построены таблицы погрешности при различных типах начальных условий в различные моменты времени и различном числе частиц. Эти таблицы содержат количественную информацию о свойствах метода в широком диапазоне изменения параметров задачи.

Результаты расчетов задачи Коши для всех четырех форм начального профиля (см. п. 1) получены с помощью метода частиц при следующих значениях параметров:

а) Так как задача о распространении бора и задача о гидравлическом прыжке (форма 1 и 2, соответственно) очень похожи. Поэтому начальные данные для них взяты практически одинаковые (табл. 3): длина расчетной области  $x_3 - x_1 = 100$ , скачок уровня равен 1 (бор –  $h_1 = 2$ ,  $h_2 = 1$ , ГП –  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 2$ ), скорость жидкости с  $h = 2$  равен 2.7,  $T = 17.0$ .

Бор	$x_1=0,$	$x_2=3,$	$x_3=100,$	$h_1=2,$	$h_2=1,$	$u_1=2,7,$	$u_2=0,$	$T=17.0$
ГП	$x_1=3,$	$x_2=100,$	$x_3=103,$	$h_1=1,$	$h_2=2,$	$u_1=5,4,$	$u_2=2,7,$	$T=17.0$

Таблица 3. Начальные данные для задач о распространении бора и гидравлического прыжка (форма 1 и 2)

б) В задаче о разрушении плотины (форма 3 и 4) используются следующие значения параметров  $x_1=0, x_2=20, x_3=50, h_1=1, u_1=u_2=0, T=6.0$ . В этой задаче рассматриваются три начальных профиля в зависимости от уровня жидкости после плотины:  $h_2=0$  (перед плотиной вода отсутствует, форма 3),  $h_2=0.1$  и  $h_2=0.5$  (форма 4). Это связано с тем, что поведение и характер решения в каждом из указанных случаев различен. Данный вопрос подробно обсуждается в [1].

В задаче с формой начального профиля 3  $t_0=0.3$ , в то время как во всех остальных задачах  $t_0=0$ . Временной шаг  $\tau$  принимал одно из перечисленных значений: 0.8; 0.4; 0.2; 0.1; 0.005. Погрешность определялась как разность норм точного и приближенного решений:

$$\|u\| - \|y\| = \left| \sum_{i=1}^N \left( \int_{D_i} u(x, t) dx - \int_{D_i} w(x_i(t)) dx \right) \right| \leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{D_i} u(x, t) dx - \int_{D_i} w(x_i(t)) dx \right|,$$

где  $w(x_i(t))$  – функции-«шапочки»,  $x_i(t)$  – координаты частиц,  $D_i$  – носитель  $i$ -ой частицы.

Приведенная выше оценка дает погрешность численного решения локально, то есть соответствует фиксированному моменту времени  $t=T$ . Кроме нее, применялся аналог указанной погрешности интегрально по всему промежутку  $0 \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned} \|u\| - \|y\| &= \left| \tau \sum_{j=0}^K \sum_{i=1}^N \left( \int_{D_i^j} u(x, t) dx - \int_{D_i^j} w(x_i(t)) dx \right) \right| \leq \\ &\leq \tau \sum_{j=0}^K \sum_{i=1}^N \left| \int_{D_i^j} u(x, t) dx - \int_{D_i^j} w(x_i(t)) dx \right|, \end{aligned}$$

где  $\tau K=T$ ,  $D_i^j$  – носитель  $i$ -ой частицы в момент времени  $j$ .

Так как в одном и том же месте текста интегральная и локальная (по  $t$ ) нормы не встречаются, то далее для них используются одинаковые обозначения.

## **Зависимость точности численного решения от начального распределения, шага по времени и числа частиц**

Зависимость абсолютной погрешности численного решения от вида начального условия, шага по времени и числа частиц представлены следующим образом.

Четыре начальных профиля собраны в две группы: формы 1 и 2 (задача о распространении бора и гидравлического прыжка) и формы 3 и 4 (задача о прорыве плотины). Для каждой из групп представлены четыре таблицы погрешности: две таблицы интегральной по времени погрешности ( $\forall t \in [t_0, T]$ ) и две таблицы локальной погрешности (при  $t=T$ ). Первая из двух указанных выше таблиц интегральной и локальной погрешности содержит разность норм между точным и численным решением задачи в зависимости от шага по времени  $\tau$  при фиксированном числе частиц  $N$ , вторая таблица, наоборот, содержит разность норм в зависимости от  $N$  при фиксированном  $\tau=0.01$ . Каждая из представленных таблиц включает в себя погрешность для двух искомых функций  $h(x, t)$  и  $u(x, t)$ .

Для всех четырех форм начального условия представлены два графика. На графиках изображены пространственные профили точного решения задачи  $\{h_{exact}(x, t), u_{exact}(x, t)\}$  и численного решения  $\{h_{numer}(x, t), u_{numer}(x, t)\}$ , полученные с помощью рассматриваемого метода для данной формы начального условия на момент времени  $t=t_0$  и  $t=T$ . Точками на графиках изображены значения скоростей частиц  $u_{numer}(x, t)$ , прямоугольниками – частицы, отвечающие за уровень жидкости  $h_{numer}(x, t)$ . Вертикальной штриховой линией отмечено положение фронта прыжка воды в задачах о распространении бора и гидравлического прыжка. Сплошные линии на графиках – решение, полученное в [1].

На основе анализа графических форм и таблиц сформулированы выводы о качественных и количественных свойствах метода частиц.

**Задача о распространении бора и задача о гидравлическом прыжке.** Анализ графиков для задачи о распространении бора и задачи о гидравлическом прыжке приводит к следующим выводам. Скачок уровня последовательно передается от частицы к частице, расположенным на фронте скачка, то есть ударная волна «размазывается» на один интервал пространственной сетки. И это справедливо во все время расчета независимо от значения  $T$ . Метод частиц хорошо передает форму фронта. Погрешность  $\epsilon$  убывает с уменьшением шага по времени  $\tau$ , и при увеличении количества частиц  $N$  (табл. 4, 5).

**Задача о разрушении плотины.** Рис. 4 демонстрирует, что решение задачи о прорыве плотины (форма 4) не содержит прыжка уровня жидкости [1]. При этом на фронте движения жидкости практически отсутствует масса жидкости (ее уровень стремительно падает до нуля) в то время как скорость непрерывно и монотонно возрастает (достигает своего макси-

мального значения). Именно в передаче этого момента наблюдаются затруднения: скорость движения первой частицы значительно завышена по сравнению с точным решением и этот разрыв в значении растет со временем. А высота первой частицы стремительно уменьшается до нуля при постоянной площади частицы (свойство полной консервативности метода). Следовательно, увеличивается ширина рассматриваемой частицы, и это ведет к ухудшению аппроксимации решения. Это хорошо видно в таблицах погрешности (колонка П-1) для функции  $u_{numer}(x, t)$ : разность норм постоянно растет при увеличении  $N$  и фиксированном  $t$ . Норма разности для функции  $h_{numer}(x, t)$ : — убывает в любом случае.

Решение задачи о прорыве плотины (форма 3) можно рассматривать как комбинацию решений задачи о движущемся боре (форма 1) и прорыве плотины (форма 4). Это связано с тем, что перед плотиной находится слой жидкости. После прорыва плотины хлынувшая сверху вода действует аналогично поршню, вдвигающемуся с ускорением в воду, ударная волна возникает сразу за точкой  $x=x_2$  [1]. При этом не возникает тех трудностей, что при решении задачи о разрушении плотины в случае формы начального условия 4. Метод частиц хорошо передает поведение решения. Погрешность  $\epsilon$  убывает с уменьшением шага по времени  $\tau$ , и при увеличении количества частиц  $N$ , что отражено в таблицах (табл. 6, 7).

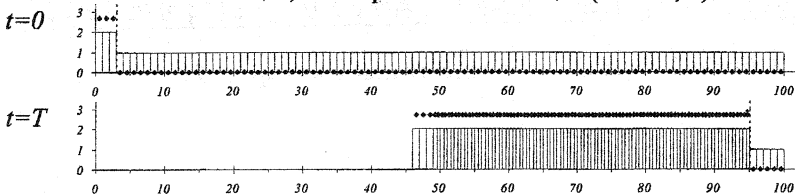


Рисунок 1. Задача о распространении бора (форма 1)

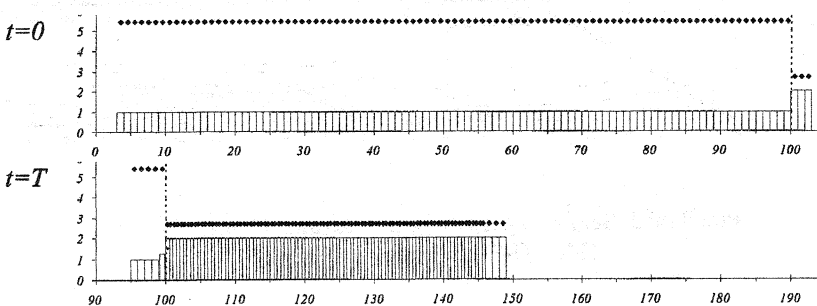


Рисунок 2. Гидравлический прыжок (форма 2)



$\varepsilon(\tau): N=100; \forall t \in [0, T]$

$\tau$	$h(x,t)$		$u(x,t)$	
	Бор	ГП	Бор	ГП
0.08	2.0	2.38	6.62	6.38
0.04	1.51	1.69	5.69	5.6
0.02	1.376	1.36	4.4	4.21
0.01	1.379	1.47	3.49	3.77

$\varepsilon(N): \tau=0.01; \forall t \in [0, T]$

$N$	$h(x,t)$		$u(x,t)$	
	Бор	ГП	Бор	ГП
100	1.38	1.47	3.49	3.77
200	0.69	0.8	2.15	2.39
400	0.37	0.51	1.42	1.62
800	0.24	0.38	0.84	1.04

Таблица 4. Таблицы погрешности (интегрально по  $t$ )

$\varepsilon(\tau): N=100; t=T$

$\tau$	$h(x,t)$		$u(x,t)$	
	Бор	ГП	Бор	ГП
0.08	0.22	0.22	0.2	0.197
0.04	0.11	0.11	0.17	0.167
0.02	0.078	0.091	0.42	0.163
0.01	0.08	0.097	0.29	0.296

$\varepsilon(N): \tau=0.01; t=T$

$N$	$H(x,t)$		$u(x,t)$	
	Бор	ГП	Бор	ГП
100	0.08	0.097	0.29	0.296
200	0.05	0.067	0.2	0.202
400	0.011	0.033	0.03	0.045
800	0.011	0.017	0.03	0.045

Таблица 5. Таблицы погрешности (локально при  $t=T$ )

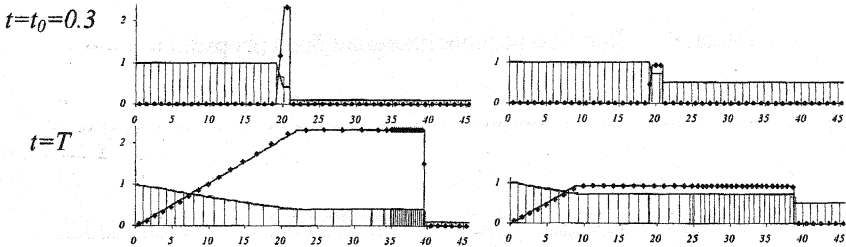


Рисунок 3. Задача о разрушении плотины (форма 3).  
П-2 и П-3, соответственно.

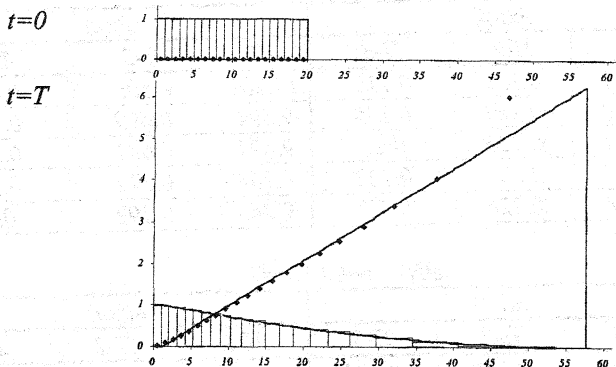


Рисунок 4. Задача о разрушении плотины (форма 4), П-1.

$\varepsilon(\tau): N=20; \forall t \in [0, T]$

$\tau$	$h(x,t)$			$u(x,t)$		
	П-1	П-2	П-3	П-1	П-2	П-3
0.08	3.061	1.189	0.733	30.404	4.229	3.297
0.04	2.78	1.177	0.627	24.473	4.46	3.159
0.02	2.778	1.162	0.596	24.811	4.374	2.961
0.01	2.708	1.168	0.571	23.617	4.367	2.854
0.005	2.708	1.161	0.562	23.729	4.334	2.805

$\varepsilon(N): \tau=0.01; \forall t \in [0, T]$

$N$	$h(x,t)$			$u(x,t)$		
	П-1	П-2	П-3	П-1	П-2	П-3
20	2.708	1.168	0.571	23.617	4.367	2.854
40	4.659	0.798	0.262	38.016	2.913	1.245
80	0.916	0.232	0.151	118.249	0.981	0.645
140	0.632	0.133	0.091	376.769	0.561	0.39

Таблица 6. Таблицы погрешности (интегрально по  $t$ )

$\varepsilon(\tau): N=20; t=T$

$\tau$	$h(x,t)$			$u(x,t)$		
	П-1	П-2	П-3	П-1	П-2	П-3
0.08	0.671	0.223	0.112	13.281	0.595	0.441
0.04	0.609	0.223	0.139	9.594	0.699	0.383
0.02	0.611	0.225	0.13	9.871	0.631	0.368
0.01	0.595	0.228	0.123	9.164	0.312	0.355
0.005	0.596	0.228	0.121	9.245	0.592	0.35

$\varepsilon(N): \tau=0.01; t=T$

$N$	$h(x,t)$			$u(x,t)$		
	П-1	П-2	П-3	П-1	П-2	П-3
20	0.595	0.228	0.123	9.164	0.612	0.355
40	0.329	0.143	0.046	23.864	0.597	0.238
80	0.169	0.044	0.021	66.635	0.181	0.055
140	0.137	0.029	0.02	183.234	0.097	0.101

Таблица 7. Таблицы погрешности (локально при  $t=T$ )

### Результаты апостериорного анализа

Анализ таблиц погрешности показывает, что погрешность  $\varepsilon$  уменьшается как при уменьшении шага по времени  $\tau$  при фиксированном числе частиц  $N$ , так и при увеличении числа частиц  $N$  при фиксированном  $\tau$ . Этот факт наблюдается для всех рассматриваемых задач, за исключением, пожалуй, задачи о прорыве плотины (форма 4) для функции скорости  $u(x, t)$ . При этом погрешность для функции скорости  $u(x, t)$  везде выше, чем аналогичная погрешность для функции уровня жидкости  $h(x, t)$ .

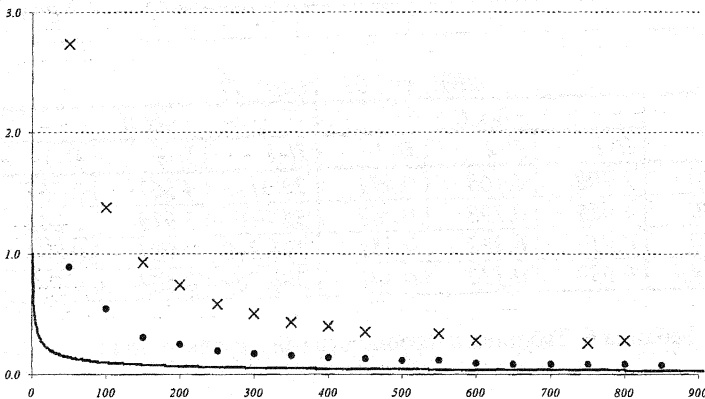


Рисунок 5. График зависимости  $\varepsilon(N)$ .

Нужно сказать, что погрешность метода частиц складывается из двух величин: погрешности схемы Эйлера решения дифференциального уравнения движения частиц –  $O(\tau)$  и погрешности, связанной с дискретизацией метода частиц. Характер же погрешности для метода частиц имеет порядок  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  [3-5], что и подтверждается в результате апостериорной оценки погрешности по  $N$  (рис. 5). На указанном рисунке нанесены значения  $\epsilon(N)$  для задачи о распространении бора (форма 1) – крестики, и задачи о прорыве плотины (форма 3) – точки. Сплошная линия – это график функции  $y = \frac{1}{\sqrt{N}}$ . Как видно, графики погрешностей качественно повторяют график функции  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ .

Автор сердечно благодарна Е.В.Захарову и С.В.Богомолу, под руководством которых выполнена эта работа.

## Литература

1. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1959. – 617 с.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
3. Арсеньев А.А. Лекции о кинетических уравнениях. – М.: Наука, 1992. – 214 с.
4. Богомолу С.В., Замаева А.А., Карабелли Х., Кузнецов К.В. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса//Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. – № 9. – С. 1602-1607
5. Богомолу С.В., Кузнецов К.В. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики//Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – № 7. – С. 93-100
6. Богомолу С.В., Захаров Е.В., Зеркаль С.В. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц//Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14 – № 3. – С. 103-116