С.С. Жулин

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ С КОРРЕКЦИЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Введение

Метод продолжения решения по параметру является очень мощным численным инструментом решения нелинейных алгебраических и функциональных уравнений. Основным его достоинством перед классическими методами является присущая ему при определенных предположениях глобальная сходимость. Однако, он не так широко известен, как классические методы, во многом из-за того, что достаточно скудно освещен в русскоязычной литературе.

Идея применения продолжения по параметру для исследования решений нелинейных уравнений восходят к работам У. Леверье (1886) и А. Пуанкаре (1892). По-видимому, впервые для численного решения уравнений метод продолжения был применен бельгийским математиком М. Лэем (Lahaye, 1934) для случая одного уравнения. Для движения вдоль кривой решений он использовал дискретное продолжение посредством метода Ньютона. Позже Лаэй [1] рассмотрел также и системы уравнений. В более эффективном дифференциальном виде метод сформулировал Д.Ф. Давиденко [2, 3] (1953) и применил его к широкому классу задач, таких, как обращение матриц, вычисление определителей, вычисление собственных значений матриц, решение интегральных уравнений. По-видимому, эту же идею дифференцирования по параметру применяли несколько ранее для решения частных задач В.А. Фок (1946) и В.С. Кирия (1951), а немного позже Н.А. Шидловская [4] (1958). Впоследствии, метод продолжения по параметру был применен для решения краевых и простейших вариационных задач В.Е. Шаманским [5] (1966), Робертсом и Шипмэном [6] (1967).

Крупный вклад в развитие метода внесли Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилин и Е.Б. Кузнецов, их работы [7, 8, 9] являются одними из наиболее основательных отечественных трудов по методу продолжения. С 80-х годов метод продолжения в приложении к задачам оптимального управления развивается С.Н. Аввакумовым и Ю.Н. Киселевым [10, 11, 13, 14].

В последней четверти XXв. существенный вклад в развитие и популяризацию метода внесли зарубежные математики Олгоуэр и Георг. Благодаря их великолепной обзорной работе [15], рассматриваемая тема получила сильный толчок к развитию. Из последних работ можно отметить монографию [16], где метод продолжения комбинирован с методом Ньютона или градиентным методом в бесконечномерных пространствах.

Основной темой настоящей работы является разработка надежного, вычислительно эффективного метода продолжения и его применение к широкому классу задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина [18].

2. Теория гомотопии

Рассмотрим задачу решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\Phi(p) = 0, \text{ где } p \in \mathbb{R}^n, \ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Функцией гомотопии называется любая гладкая функция

$$H(p, \mu), \ H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

удовлетворяющая условиям $H(p, 0) = g(p)$, $H(p, 1) = \Phi(p)$. Эта функция служит непрерывному деформированию функции g в исходную функцию Φ. Функция $g(p)$ конструируется таким способом, чтобы ее корни были известны или легко находились. Тогда, перемещаясь от корня $H(p, 0) = 0$ вдоль кривой

$$H(p, \mu) = 0, \tag{3}$$

проходя значения параметра от $\mu = 0$ до $\mu = 1$, мы придем к корню исходной системы. Такой подход называется методом гомотопии или продолжения решения по параметру.

Наиболее простыми и часто используемыми гомотопиями являются:

(а) гомотопия неподвижной точки (Fixed Point Homotopy)

$$H(p, \mu) = \mu\Phi(p) + (1 - \mu)(p - p_0); \tag{4}$$

(б) гомтопия Ньютона (Newton Homotopy)

$$H(p, \mu) = \Phi(p) - (1 - \mu)\Phi(p_0). \tag{5}$$

В обоих случаях уравнение $H(p, 0) = 0$ имеет корень p_0.

Предположение 1 *Отображение* $H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *гладкое.*

Справедливость этого предположения для функций (4) и (5) напрямую зависит от гладкости функции $\Phi(p)$.

Предположение 2 *Якобиан функции* H *в точке* $(p_0, 0)$ *имеет максимальный ранг, т.е.* $\mathrm{rank}(H'(p_0, 0)) = N$.

Из сделанных предположений следует возможность выбрать индекс i, $1 \leq i \leq N{+}1$ так, что минор Якобиана $H'(p_0, 0)$, полученный удалением i-го столбца является невырожденным. По Теореме о неявной функции множество решений $H^{-1}(0)$ может быть локально параметризовано i-ой координатой в качестве параметра. Отсюда следует

Лемма 1 *В предположениях (1) и (2) существует гладкая кривая* $(p(\alpha), \mu(\alpha))$ *на некотором открытом интервале, содержащем ноль.*

Это означает, что существует возможность продвинуться вдоль кривой (p, μ) по параметру α, если предположить невырожденность якобиана и в следующей точке, процесс движения вдоль кривой можно продолжить (м.б. с использованием другого параметра). В таком "шаг за шагом" продвижении и заключается идея численного применения метода продолжения.

Здесь остается свобода в выборе параметризации кривой. Во избежание смены параметра, целесообразно в качестве него взять длину дуги $s = ||(p, \mu)||$ (в [9] это подразумевается под наилучшей параметризацией).

Простейший вариант естественной параметризации по μ возможен, если выполнено

Предположение 3

$$\det \frac{\partial H}{\partial p} \neq 0.$$

Для гомотопии Ньютона это эквивалентно

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial p} \neq 0. \qquad (6)$$

В случае использования в качестве параметра длины дуги s справедливо следующее известное утверждение.

Лемма 2 *Пусть ноль – регулярное значение функции* H. *Тогда существует гладкая кривая* $(p(s), \mu(s)) : H(p(s), \mu(s)) = 0$, $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство этого утверждения в расширенном варианте можно найти в [15, стр. 11].

Если предположения регулярности не выполняются, дискретизированное уравнение $H = 0$ может иметь точки бифуркации.

Существует несколько подходов отслеживания кривой (p, μ), перечислим основные:

1) метод кусочно-линейных аппроксимаций, основанный на триангуляциях (см. [15, 19]);
2) решение системы дифференциальных уравнений с высокой точностью, итерационное уточнение (см. [2, 14, 17]);
3) схема предиктор-корректор (см. [15]);
4) решение системы дифференциальных уравнений с обратной связью (техника стабилизирующего члена) (см. [10]).

Последние три подхода во многом схожи, отличие заключается в том, что в схеме предиктор-корректор интегрирование дифференциальной системы ведется не так точно, а возврат на кривую осуществляется с помощью проектирования. В последнем подходе в дифференциальной системе содержится член в форме обратной связи, который непрерывно по значению невязки уточняет решение системы.

3. Численное отслеживание кривой гомотопии

В предыдущей секции была описана теория гомотопии, далее будет описан достаточно простой, но эффективный основанный на ней численный метод, предлагаемый автором. Итак, исходная задача – нахождение корня нелинейной системы алгебраических уравнений (1).

Предположим, что существует единственный корень данной системы уравнений p_*. Будем использовать гомотопию Ньютона (5).

Предположение 4 *(а) Предположим, что нуль - регулярное значение функции Φ, что гарантирует в соответствии с утверждением 2 существование $\forall \mu \in [0,1]$ решения уравнения $H(p,\mu) = 0$:*

$$p = p(\mu),\ 0 \le \mu \le 1. \tag{7}$$

(б) Предположим, что в некоторой окрестности решения (7) выполнено условие (6), т.е. существует непрерывный отличный от нуля градиент функции Φ

$$\det \frac{d\Phi}{dp} \neq 0.$$

Обозначим $p(0) = p_0$, предполагая это значение известным.

Продифференцируем по μ уравнение $H(p(\mu),\mu) = 0$, что эквивалентно $\Phi(p(\mu)) = (1-\mu)\Phi(p_0)$, получим:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right|_{p=p(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu} = -\Phi(p_0),$$

с учетом условия $p(0) = p_0$ получим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{d\mu} = -\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}\right]^{-1} \Phi(p_0) \\ p(\mu)|_{\mu=0} = p_0,\ 0 \le \mu \le 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Утверждение 1 *При сделанных предположениях задача поиска корня исходной системы уравнений эквивалентна решению задачи Коши (8)* $p_* = p(\mu)|_{\mu=1}$.

Замечания.

1. Правая часть полученной системы ОДУ не зависит от переменной μ.

2. Для вычисления правой части требуется не обращение матрицы, а лишь решение системы линейных уравнений с матрицей Φ_p и столбцом правых частей $-\Phi(p_0)$.

3. Метод можно применять итерационно, используя вычисленные значения, как новые начальные приближения p_0, до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута.

4. При использовании для решения полученной задачи Коши одного шага метода Эйлера, итерационный процесс превращается в классический метод Ньютона.

С какой бы точностью не решалась задача Коши (8) явными методами, будет происходить снос с ограничения $H(p,\mu) = 0$. Для удержания траектории на кривой целесообразно применять корректирование, т.е. после каждого шага интегрирования производить решение уравнения $H(p,\mu_s) = 0$ по p. Для этого можно применять различные методы не требующие нахождения производной, например: метод простой итерации, метод секущих. Однако, так как мы уже используем производную $H_p = \Phi_p$ в нахождении предиктора, целесообразнее применять метод Ньютона, его модификации или квазиньютоновские методы.

В задачах, где оператор Φ сконструирован достаточно сложно (например, как в следующей секции), применение классического метода Ньютона

$$p_{k+1} = p_k - (H_p(p_k, \mu))^{-1} H(p_k, \mu).$$

и соответствующих теорем о сходимости некорректно, т.к., обычно, и оператор H и его якобиан H_p вычисляются с погрешностью. Здесь можно применять неточный метод Ньютона

$$p_{k+1} = p_k - B_k^{-1} H(p_k, \mu), \tag{9}$$

где B_k – некоторая аппроксимация производной $H_p(p_k, \mu)$. При определенных требованиях на качество аппроксимации гарантируется существование окрестности корня, начиная итерации из которой достигается линейная сходимость, а при усиленных также и суперлинейная [21]. Модифицированные методы Ньютона позволяют балансировать между количеством итераций и количеством вычислений производной. Квази-ньютоновские методы расширяют область сходимости, являясь в некотором роде гибридом метода Ньютона и метода скорейшего спуска. Исследование модификаций метода Ньютона не входит в задачу данной работы, тем более, что эта тема очень широко освещена в литературе. Для изучения рекомендуется фундаментальная работа [20], с последними исследованиями и оценками сходимости можно ознакомиться в статьях [21, 22, 23, 24].

4. Метод продолжения с коррекцией

Сформулируем предлагаемый метод продолжения по параметру с коррекцией. Метод состоит из конечного числа шагов, результатом является ломаная, аппроксимирующая кривую гомотопии. Каждый шаг метода состоит из двух полушагов (этапов) – продолжения и коррекции. Алгоритм учитывает неточность вычисления значения функции и ее производных. Соответствующие точности согласуются с размером шага и результирующим качеством аппроксимации.

Для упрощения изложения приведем простейшую версию со следующими характеристиками

- гомотопия Ньютона;
- естественная параметризация;
- предиктор Эйлера;
- коррекция ньютоновского типа;

- постоянный размер шага.

Входные данные

$p_0 \in \mathbb{R}^N$; // Начальное приближение

$h = 1/steps$, где $steps \in \mathbb{N}$; // Размер шага

$\varepsilon_v > 0$, $\varepsilon_j > 0$. // Константы аппроксимации

Алгоритм

Выбрать $b \in \mathbb{R}^N$ так, что для $\delta = \Phi(p_0) + b$ выполнено $\|\delta\| \le \varepsilon_v h$.

$k = 0$;

$\mu_k = 0$;

повтор

$\mu_{k+1} = \mu_k + h$;

Выбрать и $A_k \in \mathbb{R}^{N\times N}$ так, что для $\Delta_k = \Phi'(p_k) - A_k$ выполнено $\|\Delta_k\| \le \varepsilon_j h$ и $\|\Delta_k\| < \|\Phi'(p_k)\|$;

Вычислить f_k из системы линейных уравнений $A_k f_k = b$;

$q_{k+1} = p_k + hf_k$;

Выбрать $r_k \in \mathbb{R}^N$ так, что $\|r_k\| \le \varepsilon_v h^2$;

Вычислить s_{k+1} из СЛУ $A_k s_{k+1} = H(q_{k+1}) - r_k$;

$p_{k+1} = q_{k+1} - s_{k+1}$;

пока $k < steps$.

Сформулируем основную теорему о качестве аппроксимации кривой гомотопии предложенным методом продолжения при неточном вычислении значения функции $\Phi(p)$ и ее якобиана $\Phi'(p)$.

Теорема 1 *Пусть $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ – гладкая функция, имеющая нуль своим регулярным значением. Обозначим $p(\mu)$ – кривую, определяемую уравнением $H(p,\mu) \equiv \Phi(p) - (1-\mu)\Phi(p_0) = 0$. Предположим, что существует компактная окрестность P кривой $p(\mu)$, состоящая только из регулярных точек функции $\Phi(p)$. Тогда существуют константы ε_v, ε_j(описывающие требование алгоритма на качество аппроксимации функции и ее производной) и максимальный размер* *шага h_{max} такие, что для последовательности (p_k, μ_k), построенной алгоритмом продолжения с коррекцией, выполнено условие:*

$$\|H(p_k, \mu_k)\| < 2\varepsilon_v h^2, \text{ при } 0 < h \leq h_{max}, \tag{10}$$

и последовательность p_k не выходит из P.

Доказательство.

Введем следующие константы

$$\alpha = \max \|\Phi'(p)\|, \; p \in P;$$
$$\beta = \max \|\Phi'(p)^{-1}\|, \; p \in P;$$
$$\gamma = \max \|\Phi''(p)\|, \; p \in P.$$

Проведем доказательство теоремы по индукции. Предположим, что неравенство (21) выполнено для некоторой точки $(p_k \in P, \mu_k)$. Следующие точки предиктора и корректора соответственно

$$q_{k+1} = p_k + h \cdot A_k^{-1} b;$$
$$p_{k+1} = q_{k+1} - A_k^{-1}(H(q_{k+1}) - r_k).$$

Докажем, что точка (p_{k+1}, μ_{k+1}) также удовлетворяет неравенству (21).

$$H(q_{k+1}, \mu_{k+1}) = \Phi(q_{k+1}) - (1-\mu_{k+1})\Phi(p_0) = \Phi(p_k + hA_k^{-1}b) - (1-\mu_k - h)\Phi(p_0).$$

Применяя разложение Тейлора в окрестности точки p_k получим

$$\begin{aligned} H(q_{k+1}, \mu_{k+1}) &= (\Phi(p_k) + h\Phi'(p_k)A_k^{-1}b + h^2 M_1[A_k^{-1}b, A_k^{-1}b]) - \\ &-(1-\mu_k)\Phi(p_0) + h\Phi(p_0) = \\ &= H(p_k, \mu_k) + h(\Phi'(p_k)A_k^{-1}b + \Phi(p_0)) + h^2 M_1[A_k^{-1}b, A_k^{-1}b]), \end{aligned} \tag{11}$$

где постоянная

$$M_1 = \int_0^1 (\Phi''(p_k + \xi h A_k^{-1} b)(1-\xi)d\xi.$$

$$\begin{aligned} \Phi'(p_k)A_k^{-1}b + \Phi(p_0) &= (A_k - \Delta_k)A_k^{-1}(-\Phi(p_0) + \delta) + \Phi(p_0) \\ &= \Delta_k A_k^{-1}\Phi(p_0) + \Phi'(p_k)A_k^{-1}\delta. \end{aligned} \tag{12}$$

Применяя лемму 3 получим

$$\|A_k^{-1}\| = \|(\Phi'(p_k) - \Delta_k)^{-1}\| \leq \frac{\|\Phi'(p_k)^{-1}\|}{1 - \|\Phi'(p_k)^{-1}\|\|\Delta_k\|} \leq \frac{\beta}{1 - \beta\varepsilon_j h}. \tag{13}$$

Из (11)-(13) следует

$$\|H(q_{k+1}, \mu_{k+1})\| \leq 2\varepsilon_v h^2 + C_2 h^2. \tag{14}$$

Разложение Тейлора в окрестности точки q_{k+1} дает

$$\begin{aligned} H(p_{k+1},\mu_{k+1}) &= H(q_{k+1},\mu_{k+1}) + \Phi'(q_{k+1})(p_{k+1}-q_{k+1}) \\ &+M_2[p_{k+1}-q_{k+1},p_{k+1}-q_{k+1}] \\ &= H(q_{k+1},\mu_{k+1}) + A_k(p_{k+1}-q_{k+1}) + (\Phi'(q_{k+1})-A_k)(p_{k+1}-q_{k+1}) \\ &+M_2[p_{k+1}-q_{k+1},p_{k+1}-q_{k+1}] \\ &= r_k + (\Phi'(q_{k+1})-A_k)(p_{k+1}-q_{k+1}) \\ &+M_2[p_{k+1}-q_{k+1},p_{k+1}-q_{k+1}] \end{aligned}$$

где

$$M_2 = \int_0^1 (\Phi''(q_k+\xi(p_{k+1}-q_{k+1}))(1-\xi)d\xi.$$

Учитывая оценки

$$\|\Phi'(q_{k+1})-A_k\| \le \|\Phi'(q_{k+1})-\Phi'(p_{k+1})\| + \|\Phi'(p_{k+1})-A_k\| \le (\gamma+\varepsilon_j)h;$$

$$\|(p_{k+1}-q_{k+1})\| \le \|A_k^{-1}\|(\|H(q_{k+1},\mu_{k+1})\| + \|r_k\|) \le \|A_k^{-1}\|(3\varepsilon_v + C_2)h^2;$$

(последнее неравенство следует из (14))

$$M_2[p_{k+1}-q_{k+1},p_{k+1}-q_{k+1}] \le \gamma\|p_{k+1}-q_{k+1}\|^2,$$

получим

$$||H(p_{k+1},\mu_{k+1})|| \le \varepsilon_v h^2 + C_3h^3 + C_4h^4. \qquad (15)$$

За счет выбора h_{max} имеем

$$||H(p_{k+1},\mu_{k+1})|| \le 2\varepsilon_v h^2.$$

Неравенство (21) и утверждение теоремы доказаны.

При доказательстве была использована следующая

Лемма 3 *Пусть A и B – матрицы размерности $N \times N$, матрица A – невырожденная и $\|A^{-1}\|\|B\| < 1$. Тогда матрица $(A-B)$ невырождена и*

$$\|(A-B)^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}.$$

Теорема 1 доказана для простейшего случая предиктора Эйлера. При более жестких требованиях на качество аппроксимации значения функции и ее якобиана легко по аналогии доказать применимость в качестве предиктора схем Рунге-Кутта, получая приближения кривой гомотопии более высоких порядков.

5. Применение метода продолжения по параметру к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений

Будем рассматривать следующую постановку краевой задачи для нелинейной системы ОДУ со смешанными условиями в двух точках:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,t) \\ R(x(a), x(b)) = 0 \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}^n, \; R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Предположим, что существует единственное решение данной краевой задачи $x_*(t)$. Сведем поиск решения в задаче (16) к решению некоторого конечномерного уравнения $\Phi(p) = 0$, к которому впоследствии будет возможно применение метода продолжения по параметру. Для простоты изложения приведем одноточечный формализм сведения, в котором искомый вектор p представляет собой точку на кривой решения краевой задачи. Возможны более общие многоточечные подходы.

Далее все функции, зависящие от t, рассматриваются на отрезке $[a,b]$. Обозначим $x(p,t)$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x,t), \quad x(t_*) = p,$$

где $t_* \in [a,b]$ – произвольный фиксированный момент времени. $x(p,t)$ – семейство кривых параметра $p \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих исходной системе ОДУ, содержащее искомое решение

$$x_*(t) = x(p_*, t). \tag{17}$$

Обозначим матрицу производных функции $x(p,t)$ по p

$$X(p,t) = \frac{\partial x(p,t)}{\partial p} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

предположение существования такой матрицы накладывает ограничения на функцию $F(x,t)$ – необходимо существование непрерывной производной $F'_x(x,t)$.

Применим метод продолжения по параметру для решения системы алгебраических уравнений $\Phi(p) = 0$, где

$$\Phi(p) = R(x(p,a), x(p,b)), \quad \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Получим задачу Коши, называемую *внешней задачей*

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{d\mu} = -\left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}\right]^{-1} \Phi(p_0) \\ p(\mu)|_{\mu=0} = p_0, \; 0 \le \mu \le 1 \end{cases}. \tag{18}$$

Внутренней задачей обычно называется задача Коши для уравнения первой вариации, решаемая каждый раз при необходимости вычисления градиента функции $\Phi(p)$.

Утверждение 2 *Решение краевой задачи (16) эквивалентно решению задачи Коши (18)* $p_* = p(\mu)|_{\mu=1}$.

Лемма 4 *Пусть для функции* $\Phi(p)$ *выполнено предположение 4. Тогда для уравнения* $\Phi(p) = 0$, *эквивалентного краевой задаче 16, выполнены условия теоремы 1, для него возможно применение метода продолжения с коррекцией.*

Доказательство. Условие гладкости функции $\Phi(p)$ выполняется за счет предположения гладкости функции $F(x,t)$. Условие регулярности функции $\Phi(p)$ выполняется за счет предположения 4. Возможность применения метода продолжения с коррекцией основана на возможности вычисления значения функции $\Phi(p)$ и ее производной $\frac{d\Phi}{dp}$ с любой наперед заданной точностью (ограниченной сверху константами $\varepsilon_v h$ и $\varepsilon_j h$ по условию алгоритма). Вычисление производится с помощью решения задачи Коши для уравнения вариации методом интегрирования с оценкой погрешности.

Возможны случаи, когда исходная система очень сложна и непосредственное решение сопряжено с большими вычислительными затратами (например, правая часть имеет очень большую константу Липшица). Предлагается методика постепенного перехода от более простой задачи к более сложной. Для этого может использоваться модифицированная гомотопия Ньютона

$$H(p,\mu) = \tilde{\Phi}(p,\mu) - (1-\mu)\tilde{\Phi}(p_0,0), \quad \tilde{\Phi}(p,1) = \Phi(p). \tag{19}$$

В краевой задаче параметр μ вводится в правую часть системы так, что при $\mu = 1$ имеем исходную систему (или хорошее ее приближение), а при $\mu = 0$ получается простая для решения задача (например, очень гладкая). В следующей главе этот подход будет использоваться для сглаживания области управления. Опишем реализацию предложенной схемы, имеем:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,t,\mu) \\ R(x(a),x(b)) = 0 \end{cases}, \quad \mu \in [0,1]; \quad F(x,t,1) = F(x,t).$$

Обозначим через $x(p,t,\mu)$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x,t,\mu), \quad x(t_*) = p.$$

Продифференцировав по μ уравнение гомотопии $H(p,\mu) = 0$ с функцией (19) получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{d\mu} = -\left[\dfrac{\partial\tilde{\Phi}(p,\mu)}{\partial p}\right]^{-1}\left(\dfrac{\partial\tilde{\Phi}(p,\mu)}{\partial\mu} + \Phi(p_0,0)\right) \\ p(\mu)|_{\mu=0} = p_0,\ 0 \le \mu \le 1 \end{cases}. \quad (20)$$

Утверждение 3 *Решение краевой задачи (16) эквивалентно решению задачи Коши (20)* $p_* = p(\mu)|_{\mu=1}$.

При численном решении описанного типа задач с параметром также целесообразно использование предложенного алгоритма продолжения с коррекцией. Алгоритм модифицируется тем, что значение b нужно вычислять на каждом шаге.

Алгоритм метода продолжения с коррекцией для задач с параметром

$k = 0;$

$\mu_k = 0;$

повтор

$\mu_{k+1} = \mu_k + h;$

Выбрать $b_k \in \mathbb{R}^N$ так, что для $\delta_k = \tilde{\Phi}'_\mu(p_k,\mu_k) + \tilde{\Phi}(p_0,0) + b_k$ выполнено $\|\delta_k\| \le \varepsilon_v h$

Выбрать и $A_k \in \mathbb{R}^{N\times N}$ так, что для $\Delta_k = \tilde{\Phi}'_p(p_k,\mu_k) - A_k$ выполнено $\|\Delta_k\| \le \varepsilon_j h$ и $\|\Delta_k\| < \|\tilde{\Phi}'_p(p_k,\mu_k)\|$;

Вычислить f_k из системы линейных уравнений $A_k f_k = b_k$;

$q_{k+1} = p_k + hf_k;$

Выбрать $r_k \in \mathbb{R}^N$ так, что $\|r_k\| \le \varepsilon_v h^2$;

Вычислить s_{k+1} из СЛУ $A_k s_{k+1} = H(q_{k+1},\mu_{k+1}) - r_k$;

$p_{k+1} = q_{k+1} - s_{k+1};$

пока $k < steps$.

Можно сформулировать аналогичную теорему об аппроксимации методом продолжения с коррекцией кривой гомотопии.

Теорема 2 *Пусть* $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ *– гладкая функция, имеющая при любом фиксированном* μ *нуль своим регулярным значением. Обозначим* $p(\mu)$ *– кривую, определяемую уравнением* $H(p,\mu) \equiv \tilde{\Phi}(p,\mu) - (1-\mu)\tilde{\Phi}(p_0, 0) = 0$. *Предположим, что существует компактная окрестность* P *кривой* $p(\mu)$, *состоящая только из регулярных точек функции* $\tilde{\Phi}(p,\mu)$. *Тогда существуют константы* ε_v, ε_j *и максимальный размер шага* h_{max} *такие, что для последовательности* (p_k, μ_k), *построенной алгоритмом продолжения с коррекцией, выполнено условие:*

$$\|H(p_k, \mu_k)\| < 2\varepsilon_v h^2, \text{ при } 0 < h \le h_{max}, \tag{21}$$

и последовательность p_k *не выходит из* P.

Основные изменения в доказательстве происходят в выкладках получения оценки для значения $H(q_{k+1}, \mu_{k+1})$, аналогичной (14).

6. Многоточечный подход

Описанный выше одноточечный подход к решению краевой задачи имеет существенный недостаток. Как известно, в частности при больших интервалах времени $[a, b]$, задача Коши может быть неустойчивой, а локальная константа Липшица функции Φ в уравнении $\Phi(p) = 0$ может быть очень велика. Из-за указанной проблемы, в работе [25] Н.Н. Моисеев делает вывод о невозможности решения некоторых задач посредством такого подхода (следует заметить, что в указанной работе используется классический метод Ньютона).

При использовании метода продолжения эта проблема стоит не так остро, так как ограничения сверху на величину производной $|\Phi_p|$ в явном виде отсутствуют. Тем не менее, в плохих случаях указанная проблема может привести к сильному уменьшению шага интегрирования во внешней задаче и невозможности решения вследствие машинных погрешностей округления. Для устранения указанного недостатка предлагается следующий т.н. многоточечный подход редукции краевой задачи к нелинейному уравнению. Такой подход известен в зарубежной литературе под названием <<multiple shooting>>, впервые был предложен, насколько известно автору, Осборном (1968).

Отрезок времени $[a, b]$ разбивается на s частей $a = t_1, \dots, t_{s+1} = b$. Вектор переменных составляется из s точек искомой траектории $p = \{p_1 = x(t_1), \dots, p_s = x(t_s)\}$.

Обозначим $x(p_i, t)$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_i) = p_i.$$

В функцию Φ кроме краевых условий добавим еще и условия непрерывности траектории в моменты времени t_i:

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} K(x(p_1, a), x(p_s, b)) \\ x(p_1, t_2) - p_2 \\ \dots \\ x(p_{s-1}, t_s) - p_s \end{pmatrix}, \quad \Phi : \mathbb{R}^{ns} \to \mathbb{R}^{ns}.$$

Внешняя задача записывается полностью аналогично одноточечному подходу (18, 20), при этом здесь в s раз увеличивается размерность решаемой системы линейных уравнений

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right] \cdot \frac{dp}{d\mu} = -\Phi(p_0). \tag{22}$$

Однако, система эта является разреженной, что позволяет применять соответствующие методы имеющие невысокую ресурсоемкость. В блочном виде матрица системы выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & & 0 & B \\ C_1 & -I & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -I & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & -I & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & C_{s-1} & -I \end{bmatrix},$$

где

$$A = \frac{\partial K(x(p_1, a), x(p_s, b))}{\partial p_1}, \quad B = \frac{\partial K(x(p_1, a), x(p_s, b))}{\partial p_s}, \quad C_i = \frac{\partial x(p_i, t_{i+1})}{\partial p_i}.$$

Внутренняя задача представляет собой решение s коротких задач Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ \dot{X} = f'_x(x, t) X \end{cases}, \quad x(t_i) = p_i, \ X(t_i) = I, \quad i = 1, s$$

для вычисления значений $x(p_i, t_{i+1})$, $i = 1, \dots, s$ и соответствующих производных по начальным данным. Трудоемкость внутренней задачи не увеличивается, она решается один раз для каждого нахождения производной $\Phi'(p)$ во внешней задаче.

Суть описанного подхода заключается в том, чтобы отказаться от сохранения непрерывности в моментах t_i. В конечном решении пределы справа и слева в этих точках стянутся и условия непрерывности будут выполнены с заданной точностью.

Несмотря на кажущуюся расточительность этого подхода, оказывается, что затраты на итерацию сопоставимы с соответствующими затратами при одноточечном подходе. При этом многоточечный подход может позволить получить решение даже в том случае, если при использовании одноточечного подхода, искомой кривой гомотопии попросту не существует.

7. Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче

Известно, что проблема поиска экстремали Понтрягина в задаче оптимального управления сводится к решению краевой задачи ([18, 25, 26]), что позволяет применять к ней описанные выше численные методы (предполагается, что условия соответствующих классических теорем выполнены). Далее будет описан рассматриваемый класс задач оптимального управления, процесс построения краевой задачи и особенности применения к ней метода продолжения по параметру.

Выпишем стандартную постановку задачи оптимального управления. Начнем с задачи быстродействия из множества на множество.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u \in U \subset \mathbb{R}^m \\ x(0) \in X_0, \quad x(T) \in X_1 \\ T \to \min \end{cases},$$

управление $u(\cdot)$ принадлежит классу кусочно-непрерывных функций. Начальное X_0 и терминальное X_1 множества – выпуклые компакты(в т.ч. точки), заданные соответствующими опорными функциями $c(X,\xi) = \max\limits_{x\in X}(x,\xi)$ (см. [27]). Область управления U – гладкий выпуклый компакт.

Определение. Под гладким выпуклым компактом будем понимать такой выпуклый компакт, опорная функция которого удовлетворяет следующим условиям:

1. Условие гладкости $\exists c''(\xi), \quad \forall \xi \neq 0$.
2. Условие максимальности ранга гессиана $\operatorname{rank}[c''(\xi)] = \dim(u) - 1$.

Это определение эквивалентно тому, что любое опорное множество состоит из единственной точки, причем для различных направлений они различны. Отсюда следует, что гладкость, в нашем понимании, влечет строгую выпуклость. Негладкие области управления будут рассмотрены далее с помощью процедуры сглаживания.

Для задачи поиска экстремали будем применять необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(x, \psi, u, t) = (f(x, u, t), \psi).$$

Сделаем

Предположение 5 *О существовании и единственности максимизатора функции Гамильтона-Понтрягина*

$$u^*(x, \psi, t) = \arg\max_{u \in U} H(x, \psi, u, t).$$

Очевидно, что для аффинных по управлению задач это предположение выполнено(следствие выпуклости области управления).

Предполагая, что требования принципа максимума выполнены, соответствующая теорема гарантирует существование нетривиальной сопряженной переменной ψ, удовлетворяющей сопряженному уравнению, которое в сочетании с исходной дифференциальной системой дает систему ОДУ краевой задачи для принципа максимума:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_\psi(x, \psi, u^*(x, \psi, t), t) \\ \dot{\psi} = -H_x(x, \psi, u^*(x, \psi, t), t) \end{cases}.$$

Краевые условия получаются из условий трансверсальности:

$$x(0) = c'(X_0, \psi(0)), \quad x(T) = c'(X_1, -\psi(T)),$$

в частном случае точек они выглядят так:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

Для задач с нефиксированным временем, таких как задачи быстродействия, предлагается сделать замену временной переменной $\tau = \frac{t}{T}$ и ввести время T в фазовое пространство постоянной функцией.

$$\begin{cases} \dot{x}_\tau = T \cdot H_\psi(x, \psi, u^*(x, \psi, \tau), \tau) \\ \dot{\psi}_\tau = -T \cdot H_x(x, \psi, u^*(x, \psi, \tau), \tau) \\ \dot{T}_\tau = 0 \\ \tau \in [0, 1] \end{cases}.$$

Для устранения неоднозначности, связанной с инвариантностью к умножению сопряженной переменной на константу, требуется принять условие нормировки сопряженной переменной на одном из концов отрезка. Таким образом, имеем $2n+1$ ДУ и столько же краевых условий.

Для задач с терминальным функционалом

$$J = \Phi(x(T)) \to \min$$

изменяется правое краевое условие:

$$\psi(T) = -\Phi'(x(T)).$$

Для задач с интегральным функционалом

$$J = \int\limits_0^T f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min$$

изменяется функция Гамильтона-Понтрягина:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi_0 f_0(x(t), u(t), t) + (f(x, u, t), \psi),$$

предполагая существенность функционала, можно положить $\psi_0 = -1$. В случае нефиксированного правого конца краевое условие на правом конце $x(T) = x_1$ заменяется на $\psi(T) = 0$.

Для применения метода продолжения по параметру, описанного в предыдущей секции, к поставленным краевым задачам необходимо выполнение некоторых условий. Требуется существование непрерывных производных f_{xx}, $(f_0)_{xx}$, f_{xu}, $(f_0)_{xu}$, а также $(u^*)_x$ и $(u^*)_\psi$.

Для аффинных по управлению задач при условии регулярности управляемой системы, т.е. невырожденности градиента

$$H'_u(x, \psi, t) \neq 0$$

можно найти аналитический вид максимизатора

$$u^*(x, \psi, t) = \left.\frac{\partial c(U, \xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi = H'_u(x,\psi,t)}. \tag{23}$$

Лемма 5 *При известном точно максимизаторе u^* и сделанных предположениях о гладкости функций f, u^* – для краевой задачи принципа максимума возможно применение леммы 4, т.е. к ней можно применить метод продолжения с коррекцией. Для линейных по управлению задач требование гладкости u^* можно заменить требованием гладкости области управления.*

Доказательство. Предположение о гладкости функции $F(x,t)$ леммы 4 выполняется за счет гладкости входящих функций. Гладкость максимизатора для линейных задач обеспечивается гладкостью области управления в соответствии с формулой 23 и приведенным определением гладкого выпуклого компакта.

До сих пор принималось предположение, что область управления U является гладким компактом. В противном случае (например, прямоугольника) применение метода продолжения по параметру напрямую невозможно, т.к. не обеспечиваются требования существования непрерывных производных максимизатора, следовательно нарушаются предположения гладкости (1) и регулярности (6).

Во избежание описанной проблемы возможно применение сглаживания области управления. Также сглаживание в аффинных по управлению задачах позволяет избежать особых режимов. Подробно сглаживание выпуклых компактов описано в работах [28], [11]. Исследование устойчивости решения задачи оптимального управления при сглаживании области управления приведено в работах [11], [12].

Приведем пример, опорная функция прямоугольника $[-a,a]\times[-b,b]$ записывается так:

$$c(\xi_1,\xi_2) = a\,|\xi_1| + b\,|\xi_2|\,.$$

Применение сглаживания с параметром ν дает следующую опорную функцию:

$$\tilde{c}(\xi_1,\xi_2,\nu) = a\sqrt{\xi_1^2+(\nu\xi_2)^2} + b\sqrt{(\nu\xi_1)^2+\xi_2^2}.$$

Таким образом, в результате сглаживания область управления становится гладким компактом, опорная функция которого зависит от параметра $\nu \in [\nu_1,\nu_0]$. Видно, что при стремлении $\nu \to 0$, сглаженная опорная функция сходится к первоначальной.

При классическом решении задачи со сглаживанием параметр сглаживания поэтапно уменьшается от некоторого начального значения до значения, соответствующего требуемой точности аппроксимации. При этом на каждом этапе решается отдельная задача оптимального управления с начальным приближением, полученным на предыдущем этапе.

Автором предлагается алгоритм при котором параметр сглаживания ν выражается через параметр гомотопии $\mu \in [0,1]$, а процедура сглаживания внедряется в схему продолжения по параметру с помощью модифицированной гомотопии Ньютона(19). Предлагается следующий вид зависимости:

$$\nu(\mu) = \nu_0 \left(\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^{\mu},$$

где ν_0 – начальное значение параметра сглаживания, ν_1 – конечное значение равное требуемой точности решения.

Функция правых частей краевой задачи имеет вид:

$$F(x,t,\nu(\mu)) = \left(H'_\psi(x,\psi,u^*(x,\psi,t,\nu(\mu)),t), -H'_x(x,\psi,u^*(x,\psi,t,\nu(\mu)),t)\right)^T, \tag{24}$$

где для линейных по управлению задач максимизатор функции Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$u^*(x,\psi,t,\nu) = c'(U, H'_u(x,\psi,t),\nu). \tag{25}$$

Выпишем производную правой части по параметру, требуемую для модифицированной внутренней задачи,

$$\frac{d}{d\mu}F(x,t,\nu(\mu)) = F'_\nu(x,t,\nu(\mu))\cdot\nu'_\mu = F'_\nu(x,t,\nu(\mu))\cdot\nu(\mu)\cdot\ln\frac{\nu_1}{\nu_0}. \tag{26}$$

Лемма 6 *При сделанных предположениях поиск экстремали Понтрягина в задаче оптимального управления с малым значением параметра сглаживания ν_1 можно произвести с помощью решения параметризованной краевой задачи () с правой частью (24) методом продолжения с коррекцией (т. 2).*

Таким образом, решение задачи оптимального управления с автоматическим сглаживанием области управления сводится к решению всего лишь одной краевой задачи методом продолжения по параметру, что многократно эффективнее классического поэтапного уменьшения параметра. Для областей управления представляющих целиком или в сечении многомерные параллелепипеды вид сглаженную опорную функцию возможно строить автоматически в соответствии с приведенным примером.

8. Применение к нелинейным по управлению задачам

До этого момента сведение задачи ОУ к краевой задаче для принципа максимума и дальнейшее решение ее методом продолжения по параметру производилось в предположении, что максимизатор функции Гамильтона-Понтрягина задан аналитически. Многие реальные задачи являются нелинейными по управлению, в большинстве из них найти его не представляется возможным. В таких случаях возможно применение предложенной автором методики численного нахождения максимизатора.

Задача поиска максимизатора является стандартной задачей математического программирования

$$H(x, \psi, u, t) \to \max_{u \in U}.$$

Предположим единственность максимизатора, т.е. единственность решения такой задачи. Рассмотрим следующий аспект. Очевидно, что намного эффективнее решать n задач оптимизации размерности 1, чем задачу оптимизации размерности n. Для того, чтобы этим воспользоваться, необходимо разбить задачу оптимизации на независимые части(по функционалу и ограничениям). Также это позволяет выделить независимую линейную часть задачи, решение которой можно найти аналитически.

Разобьем пространство управлений на наибольшее количество l подпространств таким образом, чтобы области управления, соответствующие этим подпространствам были независимы, т.е. исходная область управления представлялась в виде их прямого произведения.

$$u = (u'_1, u'_2, ..., u'_l), \quad l \leq m.$$

$$u'_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{iN_i}), \quad u'_i \in U'_i \subset \mathbb{R}^{N_i}, \sum_{1 \leq i \leq l} N_i = m.$$

$$U = U'_1 \times U'_2 \times ... \times U'_l.$$

Нахождение такого разбиения эквивалентно решению известной задачи разбиения графа на связанные подграфы. Граф обладает m вершинами, между вершинами i и j ребро отсутствует, если

$$\frac{\partial^2 c(U, \psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \equiv 0.$$

Среди всех наборов управлений u'_i выделим те, которые содержат только управления u_{ij}, входящие в систему линейно. Объединим все управления, входящие в такие наборы, в вектор $\bar{u} = (\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{\bar{N}})$. Остальные наборы управлений обозначим (перенумеруем):

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_{\tilde{l}}), \quad \tilde{l} \leq l.$$

Объединим их в группы, между которыми максимизацию функции Гамильтона-Понтрягина можно производить раздельно. Для этого еще раз решим задачу разбиения графа на связанные подграфы. Граф обладает $\tilde{l}$ вершинами, между вершинами i и j ребро отсутствует, если матрица

$$\frac{\partial^2 H(x,\psi,u,t)}{\partial\tilde{u}_i\partial\tilde{u}_j} \equiv 0.$$

Допустим мы получили k групп по $\tilde{N}_i$ управлений в каждой, обозначим их:

$$\tilde{u}^i = (\tilde{u}_1^i, \tilde{u}_2^i, ..., \tilde{u}_{\tilde{N}_i}^i), \quad 1 \le i \le k.$$

$$\bar{N} + \sum_{1\le i\le k} \tilde{N}_i = m$$

В итоге функция Гамильтона-Понтрягина представляется в виде:

$$H(x,\psi,u,t) = (g(x,\psi,t),\bar{u}) + \sum_{1\le i\le k} h(x,\psi,\tilde{u}^i,t);$$

$$u = (\bar{u},\tilde{u}^1,...,\tilde{u}^k), \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^{\bar{N}}, \tilde{u}^i \in \mathbb{R}^{\tilde{N}_i}.$$

Максимизатор линейной части находится отдельно:

$$\bar{u}^*(x,\psi,t) = \arg\max_{\bar{u}\in\bar{U}} H(x,\psi,\bar{u},\tilde{u},t) = c'(\bar{U},g(x,\psi,t)) \stackrel{def}{=} \left.\frac{\partial c(\bar{U},\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=g(x,\psi,t)} \tag{27}$$

Максимизатор нелинейной части, в общем случае, не находится аналитически; требуется находить его численно в каждой точке. В наиболее часто встречающемся случае, когда размерность $\tilde{u}^i$ равна 1, можно применять методы глобальной оптимизации, связанные с нахождением нулей производной, или различные модификации метода золотого сечения. В случае большей размерности возможно применять более общие методы нелинейного программирования.

Система дифференциальных уравнений краевой задачи для принципа максимума имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_\psi(x,\psi,\bar{u}^*(x,\psi,t),\tilde{u}^*(x,\psi,t),t) \\ \dot{\psi} = -H_x(x,\psi,\bar{u}^*(x,\psi,t),\tilde{u}^*(x,\psi,t),t) \end{cases}$$

Или вводя расширенную переменную $\tilde{x} = (x,\psi)$:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = F(\tilde{x},\bar{u}^*(\tilde{x},t),\tilde{u}^*(\tilde{x},t),t)$$

Тип краевых условий определяется конкретным типом ЗОУ.

Для применения метода продолжения по параметру к решению данной краевой задачи(а именно, для построения уравнения вариации по начальному значению) необходим градиент максимизатора $\tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t)$, опишем процедуру его вычисления.

Пусть, находясь в фиксированной точке $(\tilde{x}, t)$, численно найдено значение максимизатора $\tilde{u}^* = \tilde{u}^*(\tilde{x}, t)$, а также $\bar{u}^*$ из соответствующей формулы (27).

Возможны два случая:

1. Максимизатор $\tilde{u}^*$ лежит внутри области $\tilde{U}$, тогда $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) = 0$.
2. Максимизатор $\tilde{u}^*$ лежит на границе области $\tilde{U}$, тогда $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) \perp \tilde{U}$.

Случай 1: *максимизатор $\tilde{u}^*$ лежит внутри области $\tilde{U}$.*

В этом случае необходимый градиент можно выразить, продифференцировав по $\tilde{x}$ уравнение $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, \tilde{u}^*(\tilde{x}, t), t) = 0$:

$$\tilde{u}^*_{\tilde{x}} = \tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{u}^*, t) = -\left[H_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{x}, \tilde{u}^*, t)\right]^{-1} H_{\tilde{u}\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{u}^*, t). \tag{28}$$

Гессеан функции Гамильтона-Понтрягина $H_{\tilde{u}\tilde{u}}$ не вырожден вследствие предположения о единственности максимизатора.

Случай 2: *максимизатор $\tilde{u}^*$ лежит на границе области $\tilde{U}$.*

Определение ортогональности $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) \perp \tilde{U}$ в точке $u^*(\tilde{x}, t) = u^*$ в терминах опорной функции:

$$(\tilde{u}^*(\tilde{x}, t), \xi) = c(\tilde{U}, \xi)\,\Big|_{\xi = H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*(\tilde{x}, t), t)}\,.$$

Отсюда, продифференцировав по ξ:

$$\tilde{u}^*(\tilde{x}, t) = c'(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*(\tilde{x}, t), t)).$$

Продифференцировав по $\tilde{x}$, выразим искомую матрицу:

$$\begin{aligned}&\tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t) = \\ &= \left[E - c''(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)) H_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)\right]^{-1} c''(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)) H_{\tilde{u}\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t)\end{aligned} \tag{29}$$

Матрица $E - c''(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(z, u^*, t)) H_{\tilde{u}\tilde{u}}(z, u^*, t)$ предполагается не вырожденной(следствие предположения о единственности максимизатора).

Таким образом, используя предложенную методику, становится возможным применение метода продолжения по параметру к широкому классу нелинейных по управлению задач оптимального управления.

Лемма 7 *При сделанных предположениях и надлежащем выборе точности вычисления максимизатора к решению краевой задачи принципа максимума для нелинейных по управлению задач возможно применение метода продолжения с коррекцией (леммы 4).*

Доказательство. Как было показано выше, решение краевой задачи сводится к решению уравнения, в которое в этом случае входит функция $\tilde{u}$, вычисляемая с погрешностью

$$\Phi(p, \tilde{u}(\cdot)) = 0.$$

Обозначим γ_v погрешность вычисления значения функции $\tilde{u}(t)$. Учитывая то, что зависимость Φ от $\tilde{u}$ является непрерывной, а область значений функции $\tilde{u}(\cdot)$ $\tilde{U}$ ограничена, погрешность вычисления $\Phi(p, \tilde{u}(\cdot))$ не превышает $C_1 \cdot \gamma_v$, где $C > 0$ – некоторая константа. Соответственно, выбирая $\gamma_v \leq \varepsilon_v h / C_1$, можно удовлетворить условию метода (т. 1) о качестве аппроксимации функции. Погрешность γ_j вычисления производной $\tilde{u}_z$ гладким образом зависит от погрешности вычисления $\tilde{u}$ (формулы 28, 29), существует константа C_2 такая, что

$$\gamma_j \leq C_2 \gamma_v.$$

Таким образом, выбором $\gamma_v = \min(\varepsilon_v h / C_1, \varepsilon_j h / C_2$ удовлетворяется и условие о качестве аппроксимации производной.

9. Применение к Аффинным задачам со смешанными ограничениями

Многие задачи оптимального управления помимо ограничений на управление содержат ограничения на фазовую переменную, а также смешанные ограничения. Эти ограничения обычно отражают физические рамки, в которых система функционирует по заданному дифференциальному закону.

Приведем пример. Рассмотрим управляемую систему, которая описывает движение ротора (также эта система известна под названием <<тележка>>):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

В классической задаче ставятся ограничения на управление

$$a \leq u \leq b,$$

Что физически трактуется, как ограничение крутящего момента (или силы тока, проходящего через обмотку). Однако в реальных условиях также не может быть бесконечной и мощность двигателя, поэтому напрашивается условие

$$x_2 \cdot u \leq c.$$

Подобные условия, включающие как управление, так и фазовую переменную называются смешанными и являются существенными для многих практических задач.

Другой вид смешанных ограничений появляется, например, при рассмотрении сложных механических систем. Как правило динамика механической системы описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{q} - V = 0, \\ \dot{V} - a = 0, \\ M(q)a - F(q, V, t) - \Lambda(q, V, t)\lambda = 0, \\ g(q) = 0. \end{cases}$$

Здесь q – вектор обобщенных координат, V – скоростей, a – ускорений, λ – вектор внутренних сил реакций в системе. Третье уравнение отражает второй закон Ньютона, четвертое – кинематические связи (циклы).

Эта система имеет индекс дифференцирования 3, продифференцировав последнее уравнение два раза, получим эквивалентную систему индекса 1

$$\begin{cases} \dot{q} - V = 0, \\ \dot{V} - a = 0, \\ M(q)a - F(q, V, t) - \Lambda(q, V, t)\lambda = 0, \\ (g_{qq}(q)V, V) + g_q(q)a = 0. \end{cases}$$

Из этой системы можно исключить переменные (a, λ) и формально перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, однако в ней будут присутствовать обращение матрицы, что затруднит дальнейшие аналитические выкладки применения принципа максимума, вычисления производных и т.п.

Мы поступим немного другим образом, обозначим $x = (q, V)$, $v = (a, \lambda)$. Фактически v можно рассматривать, как управление, на которое не наложено нефункциональных ограничений. В механических системах управляющие параметры обычно входят в функцию активных сил $F(q, V, t)$, мы же рассмотрим более общий случай следующей управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x} - f(x, v, u, t) = 0, \\ g(x, v, u, t) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что в такой постановке для механических систем размерности векторов v и g равны ($d(v) = d(g)$).

Реальные задачи, содержащие ограничения описанных типов, как правило, не поддаются аналитическому решению. Таким образом, возникает задача построения эффективных численных методов для данного класса задач. В этой секции предложенная схема использования метода продолжения для поиска экстремали будет адаптирована к подобным задачам.

Объединив два описанных класса ограничений, рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, v, u, t), \quad t \in [0, T], \\ g(x, v, u, t) = 0, \quad d(g) = d(v), \\ h_i(x, u, t) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq d(h), \\ K(p) = 0, \quad p = (x_0, x_T), \\ u \in U, \\ J(u) \to \min\limits_{u}, \\ p \in P, \quad (x, v, u, t) \in Q, \end{cases} \tag{30}$$

где $P \subset \mathbb{R}^{2n}$, $Q \subset \mathbb{R}^{1+n+r}$ – открытые множества, задающие <<жизненное пространство>> задачи. Пусть входящие функции имеют афинный вид

$$\begin{aligned} f(x, v, u, t) &\equiv f_0(x, t)v + f_1(x, t)u + f_2(x, t), \\ g(x, v, u, t) &\equiv g_0(x, t)v + g_1(x, t)u + g_2(x, t), \\ h_i(x, u, t) &\equiv \langle n_i(x, t), u \rangle + m_i(x, t). \end{aligned}$$

Входящие функции принадлежат следующим классам

$$x(\cdot) \in AC([0, T]), \quad v(\cdot),\ u(\cdot) \in L_\infty([0, T]).$$

Здесь присутствуют вектор управлений u, ограниченный компактом U, а также вектор управлений v, обремененный лишь функциональными ограничениями $g = 0$. Поставленную задачу можно классифицировать как аффинную задачу со смешанными ограничениями.

Предположим, что решение поставленной задачи существует и единственно, а также, что ограничения совместны в некоторой окрестности решения.

Сформулируем для задачи (30) необходимое условие оптимальности, как частный случай теоремы (44, стр. 126) из [29].

Предположение 6 *Фукнкция K аргумента $p \in \mathbb{R}^{2n}$ непрерывно дифференцируема на P.*

Предположение 7 *Функции f, g, h непрерывны на Q вместе со своими первыми производными по x, v.*

Относительно исследуемой траектории $(x^0(t), v^0(t), u^0(t))$ принимается следующее предположение.

Предположение 8 *Существует компакт $\Omega \subset Q$, такой что*

$$(x^0(t), v^0(t), u^0(t), t) \in \Omega \text{ почти всюду на } [0, T]$$

Предположение 9 *(регулярности смешанных ограничений). Во всех точках $(x, v, u, t) \in Q$ таких, что*

$$g(x, v, u, t) = 0, \quad h(x, u, t) \leq 0,$$

градиенты по v функций g_j, $j = 1, \ldots, d(g)$ линейно независимы.

Замечание. Задача с нефиксированным временем легко сводится к поставленной задаче при условии, что функции f, g, h гладко зависят от t.

Теорема 3 *(Дмитрук-Милютин-Осмоловский) Пусть траектория $(x^0(t), v^0(t), u^0(t))$ доставляет понтрягинский минимум в задаче (30). Тогда найдется вектор $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, n-мерная функция ограниченной вариации $\psi(t)$, функции $\lambda_i(t) \geq 0$, $i = 1, \ldots, d(h)$ из L_∞, непрерывные в концах отрезка, и вектор-функция $\mu(t) \in L_\infty$ размерности $d(g)$ для которых выполнены следующие условия:*

а) условие нетривиальности

$$|\beta| + \sum_i \int_0^T \lambda_i(t) dt > 0;$$

б) условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_i(t) h_i(x^0(t), u^0(t), t) = 0 \text{ почти всюду}, \quad \forall i;$$

в) сопряженное уравнение

$$-\dot{\psi} = \overline{H}_x = \psi f_x - \lambda h_x - \mu g_x,$$

где $\overline{H}(x,u,t) = (\psi, f) - (\lambda, h) - (\mu, g)$ *– расширенная функция Понтрягина;*

г) условия трансверсальности

$$\psi(0) = l_{x_0}(p^0), \quad \psi(T) = l_{x_T}(p^0),$$

где $l(p) = (\beta, K(p))$ *– концевая функция Лагранжа;*

д) условие стационарности (уравнение Эйлера-Лагранжа) по v*:*

$$\overline{H}_v = \psi f_v - \mu g_v = 0$$

вдоль траектории (x^0, v^0, u^0)*;*

е) условие максимума: для почти всех $t \in [0, T]$

$$\max_{u \in C(t)} H(x^0(t), v, u, t) = H(x^0(t), v^0(t), u^0(t), t),$$

где $H(x, v, u, t) = (\psi, f)$ *– функция Понтрягина,*

$$\begin{aligned} C(t) &= \{u \in \mathbb{R}^r \mid (x^0(t), v, u, t) \in Q, \\ &\quad h(x^0(t), u, t) \le 0,\ g(x^0(t), v, u, t) = 0,\ u \in U\} - \end{aligned}$$

множество управлений, допустимых к сравнению в момент t *для траектории* $x^0(t)$*.*

С помощью сформулированного принципа максимума задача оптимального управления сводится к краевой задаче (П-системе) (см. [26]), которую можно трактовать как некоторое уравнение относительно начального значения расширенной переменной

$$\Phi(z) = 0, \text{ где } \quad z = (x(0), \psi(0)), \quad \Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}. \tag{31}$$

Первая проблема заключается в том, что управление, максимизирующее функцию Гамильтона-Понтрягина, (максимизатор) не находится аналитически, следовательно необходимо находить его численно. Применение численных методов (градиентного, Ньютона, продолжения по параметру к уравнению (31) порождает вторую проблему: вычисление якобиана дифференциального уравнения. Это потребует решения задачи Коши для уравнения первой вариации, в которое войдет производная максимизатора и множителей Лагранжа, соответствующих смешанным ограничениям.

Решение сформулированных проблем предлагается в этом разделе.

Описанный далее метод предполагает, что область управления U является гладким выпуклым компактом или многогранником и задается опорной функцией $c(\xi) = \max\limits_{u \in U}(u, \xi)$.

Также предполагается, что выбрано достаточно хорошее начальное приближение для того, чтобы не возникала несовместность смешанных и нефункциональных ограничений на управление.

1. *Вычисление максимизатора функции Гамильтона-Понтрягина.*

Благодаря аффинности задачи и предположению 9 возможно выразить управление v, как функцию от (x, u, t)

$$v(x,u,t) = -(g_0(x,t))^{-1}(g_1(x,t)u + g_2(x,t))$$

Функция Гамильтона-Понтрягина в рассматриваемой задаче является аффинной по управлению

$$H(x,\psi,v,u,t) = \langle \psi, f(x,v,u,t)\rangle \equiv \langle \psi, f_0(x,t)v + f_1(x,t)u + f_2(x,t)\rangle \equiv$$
$$\Big\langle \psi, (-f_0(x,t)(g_0(x,t))^{-1}g_1(x,t) + f_1(x,t))u - (g_0(x,t))^{-1}g_2(x,t) + f_2(x,t)\Big\rangle$$
$$\equiv \langle a(x,\psi,t), u\rangle + b(x,\psi,t),$$

где

$$a(x,\psi,t) = \left(f_1(x,t) - f_0(x,t)(g_0(x,t))^{-1}g_1(x,t)\right)^T \psi.$$

При нахождении ее максимизатора возникает задача

$$\begin{cases} \langle a, u\rangle \to \max\limits_u, \\ u \in U, \\ \langle n_i, u\rangle + m_i \le 0, \quad 1 \le i \le d(h). \end{cases} \tag{32}$$

Результатом пересечения выпуклого множества U с выпуклыми полупространствами, порожденными линейными ограничениями, является выпуклое множество (вырожденный случай пустого множества, не рассматриваем). Будем рассматривать случай общего положения, предполагая, что задача максимизации линейного функционала на таком множестве имеет единственное решение. Для численного метода предсталяет интерес лишь регулярный случай, т.к. при малейшем изменении входных данных вырожденность пропадает.

Условие $u \in U$ можно переписать в терминах опорной функции

$$\langle \xi, u\rangle \le c(\xi), \quad \forall \xi.$$

Если область управления является многогранником, то имеем конечное число аффинных ограничений вида неравенств и задача превращается в классическую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \langle a, u\rangle \to \max\limits_u, \\ \langle \xi_i, u\rangle - c(\xi_i) \le 0, \quad 1 \le i \le k, \\ \langle n_i, u\rangle + m_i \le 0, \quad 1 \le i \le d(h). \end{cases}$$

Эту задачу можно решать, например, симплекс-методом, приведя сначала к каноническому виду. В дальнейшем будем считать, что в такой задаче ограничения вида $u \in U$ отсутствуют, а присутствуют лишь смешанные ограничения.

В случае гладкого выпуклого компакта напрашивается метод построения многогранных аппроксимаций для этого множества и сведение задачи к предыдущему случаю. Однако, для размерности управления больше двух задача линейного программирования для нахождения максимизатора с требуемой точностью будет крайне велика.

Предложим другой метод решения задачи нахождения максимизатора для гладкого выпуклого компакта U. В случае активности ограничения $u \in U$ решение, получаемое предлагаемым методом, характеризуется тем, что удовлетворяет этому ограничению точно. Алгоритм состоит из трех этапов.

<u>**1 этап**</u>. Определение активности смешанных ограничений.

1. Нахождение кандидата на роль максимизатора

$$\tilde{u}^* = c'(a).$$

2. Проверка, удовлетворяет ли кандидат $\tilde{u}^*$ смешанным ограничениям

$$\langle n_i, \tilde{u}^*\rangle + m_i \le 0, \quad 1 \le i \le d(h).$$

   Если ограничения удовлетворяются, смешанные ограничения неактивны, и максимизатор найден $u^* = \tilde{u}^*$, в противном случае, смешанные ограничения активны, переходим к следующему этапу.

<u>**2 этап**</u>. Определение активности ограничения $u \in U$.

Решение задачи линейного программирования с конечным числом аффинных ограничений

$$\begin{cases} \langle a, u\rangle \to \max\limits_u, \\ \langle n_i, u\rangle + m_i \le 0, \quad 1 \le i \le d(h). \end{cases}$$

Как уже упоминалось, будем рассматривать случай общего положения, в котором решение данной задачи единственно. Если максимум достигается в некоторой точке $\bar{u}^*$, производится проверка этой точки на удовлетворение ограничению $\bar{u}^* \in U$(алгоритм проведения этой проверки будет описан ниже). Если оно удовлетворяется, ограничение $u \in U$ неактивно, и максимизатор найден $u^* = \bar{u}^*$. В противном случае, если ограничение не удовлетворяется, или максимум не достигается, ограничение $u \in U$ активно, переходим к следующему этапу.

3 этап. Нахождение максимума по границе множества.

Предложим метод решения задачи нахождения максимума по границе множества с учетом аффинных ограничений

$$\begin{cases} \langle a, u \rangle \to \max\limits_{u \in dU}, \\ \langle n_i, u \rangle + m_i \leq 0, \quad 1 \leq i \leq d(h). \end{cases} \tag{33}$$

Так как область управления замкнута и строго выпукла, а максимум достигается на его границе, очевидно, что решение задачи максимизации существует и единственно. Таким образом, необходимые условия оптимальности, выполняющиеся в единственной точке, являются и достаточными.

Применим правило множителей Лагранжа (теорему Куна-Таккера). Максимум функции Лагранжа

$$L(u) = \langle a, u \rangle - \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j \left(\langle n_j, u \rangle + m_j \right) = \left\langle a - \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j n_j, u \right\rangle + \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j m_j$$

при условии $u \in dU$ достигается на векторе

$$u = c' \left(a - \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j n_j \right).$$

Подставляя это выражение в условие, дополняющее нежесткости, получим систему уравнений относительно $\{\lambda_i\}$

$$\lambda_i \left(\left\langle n_i, c' \left(a - \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j n_j \right) \right\rangle + m_i \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq d(h). \tag{34}$$

Необходимо найти нетривиальный корень данной системы $\{\lambda_i \geqslant 0\}$, удовлетворяющий ограничениям

$$\left\langle n_i, c' \left(a - \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j n_j \right) \right\rangle + m_i \leq 0, \quad 1 \leq i \leq d(h). \tag{35}$$

Рассматриваемый случай общего положения подразумевает, что число активных ограничений меньше размерности вектора управлений и матрица, составленная из вектора a и векторов активных ограничений n_i, имеет полный ранг. В этих предположениях полученное необходимое условие будет также достаточным, т.к. сделанные предположения на опорную функцию гарантируют, что некоторому значению

$$u^* = c' \left(a - \sum_{1 \le j \le d(h)} \lambda_j n_j \right)$$

может соответствовать не более одного набора λ_j. Из чего следует, что уравнение 34 имеет ровно один корень. Алгоритм поиска точки, удовлетворяющей данному условию, будет описан ниже.

2. *Множители Лагранжа и сопряженное уравнение.*

При активности смешанных ограничений сопряженная система приобретает вид

$$\dot{\psi} = -\left(f_x\right)^T \psi + \left(h_x\right)^T \lambda + \left(g_x\right)^T \mu.$$

В нее входят множители Лагранжа, соответствующие смешанным ограничениям.

Вектор μ определяется из условия стационарности

$$\mu(x, \psi, t) = ((g_v)^{-1})^T (f_v)^T \psi. \tag{36}$$

Если ограничение $u \in U$ активно, λ_i определяются из системы уравнений (34), если же нет, их можно определить из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in I_h} \lambda_j n_j = a, \\ \lambda_j = 0, \quad j \notin I_h, \end{cases} \tag{37}$$

где I_h – множество активных индексов смешанных ограничений.

Таким образом, расширенная система ОДУ, образующая вместе с краевыми условиями краевую задачу выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, v^*, u^*(x, \psi, t), t) \\ \dot{\psi} &= -\left(f_x(x, v^*, u^*, t)\right)^T \psi + \left(h_x(x, u^*, t)\right)^T \lambda(x, \psi, t) + \\ & \quad \left(g_x(x, v^*, u^*, t)\right)^T \mu(x, \psi, t). \end{cases} \tag{38}$$

Как упоминалось выше, в численных методах, таких как метод Ньютона или метод продолжения по параметру используется также система уравнений первой вариации данной системы, в частном случае отсутствия переменной v она выглядит так

$$\begin{cases} \dfrac{X_x}{dt} = f_x(x,u^*,t) + f_u(x,u^*,t)u_x^*(x,\psi,t), \\ \dfrac{X_\psi}{dt} = f_u(x,u^*,t)u_\psi^*(x,\psi,t), \\ \dfrac{\Psi_x}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(-\left(f_x(x,u^*,t)\right)^T\psi + \left(h_x(x,u^*,t)\right)^T\lambda(x,\psi,t)\Big), \\ \dfrac{\Psi_\psi}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial \psi}\Big(-\left(f_x(x,u^*,t)\right)^T\psi + \left(h_x(x,u^*,t)\right)^T\lambda(x,\psi,t)\Big), \\ X_x(0) = I, \Psi_\psi(0) = I, X_\psi(0) = 0, \Psi_x(0) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

В общем случае, в нее входят производные $u^*(x,\psi,t)$, $\lambda(x,\psi,t)$ и $\mu(x,\psi,t)$ по (x,ψ). В следующем разделе описывается алгоритм их нахождения.

3. *Вычисление производной максимизатора и множителей Лагранжа по фазовому вектору.*

Итак, необходимо вычисление производных максимизирующей функции $u^*(z)$ и функции множителей Лагранжа $\lambda(z)$ по вектору $z = (x,\psi)$.

Случай А) Ограничение $u \in U$ активно. Производные $\frac{d}{dz}u^*(z)$ и $\frac{d}{dz}\lambda(z)$ можно определить, продифференцировав по z систему уравнений

$$\begin{cases} h_i(z,u^*(z)) \equiv \langle n_i(z), u^*(z)\rangle + m_i(z) = 0, \quad i \in I_h, \\ u^*(z) - c'\left(a(z) - \sum\limits_{j\in I_A}\lambda_j(z)n_j(z)\right) = 0, \\ \lambda_i(z) = 0, \quad i \notin I_h; \end{cases} \tag{40}$$

здесь $n_i(z)$ зависят лишь от x, и считаются зависящими от ψ формально, для соблюдения единообразия записи. В результате дифференцирования получим систему линейных уравнений для нахождения $\frac{d}{dz}u^*(z)$ и $\frac{d}{dz}\lambda(z)$

$$\begin{cases} u^*\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}n_i+\dfrac{\partial}{\partial z}m_i+n_i\left[\dfrac{d}{dz}u^*\right]=0, \quad i\in I_h,\\ \left[\dfrac{d}{dz}u^*\right]-c''\left(a-\sum\limits_{j\in I_h}\lambda_j n_j\right)\cdot\left(\dfrac{\partial}{\partial z}a-\sum\limits_{j\in I_h}\left(\lambda_j\dfrac{\partial}{\partial z}n_j+n_j\cdot\left[\dfrac{d}{dz}\lambda_j\right]\right)\right)=0,\\ \left[\dfrac{d}{dz}\lambda_i\right]=0, \quad i\notin I_h. \end{cases} \tag{41}$$

В матричной форме это выглядит так

$$\begin{pmatrix} N & 0\\ I & c''N^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{du^*}{dz}\\ \dfrac{d\lambda}{dz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial h}{\partial z}\\ c''\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}\left(a-N^T\lambda\right)\end{pmatrix}, \tag{42}$$

где $N = \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial u}\right)$ – прямоугольная матрица активных ограничений, I – единичная матрица.

Отсюда, учитывая следующую из условия общего положения невырожденность матрицы

$$\begin{pmatrix} N & 0\\ I & c''N^T\end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{pmatrix}\dfrac{du^*}{dz}\\ \dfrac{d\lambda}{dz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N & 0\\ I & c''N^T\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial h}{\partial z}\\ c''\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}\left(a-N^T\lambda\right)\end{pmatrix}. \tag{43}$$

Случай Б) Ограничение $u \in U$ неактивно. Здесь случай общего положения предполагает, что число активных ограничений равно размерности вектора управлений u и матрица N невырождена.

В этом случае $\frac{d}{dz}u^*(z)$ и $\frac{d}{dz}\lambda(z)$ находим из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} u^*\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}n_i+\dfrac{\partial}{\partial z}m_i+n_i\left[\dfrac{d}{dz}u^*\right]=0, \quad i\in I_h,\\ \dfrac{\partial}{\partial z}a-\sum\limits_{j\in I_h}\left(\lambda_j\dfrac{\partial}{\partial z}n_j+n_j\cdot\left[\dfrac{d}{dz}\lambda_j\right]\right)=0,\\ \left[\dfrac{d}{dz}\lambda_i\right]=0, \quad i\notin I_h. \end{cases} \tag{44}$$

В матричной форме это выглядит так

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du^*}{dz} \\ \dfrac{d\lambda}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(a - N^T\lambda\right) \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\frac{du^*}{dz} = N^{-1}\left(-\frac{\partial h}{\partial z}\right), \\ &\frac{d\lambda}{dz} = \left(N^T\right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(a - N^T\lambda\right) = \left(N^{-1}\right)^T \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(a - N^T\lambda\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Найти производную μ по z можно, продифференцировав явную формулу (36). Единственное, что для этого нужно – найти производную $\frac{\partial}{\partial x}(g_v^{-1})^T$. Приведем соответствующие выкладки, обозначим

$$G(x,t) = (g_v^{-1})^T = (g_v^T)^{-1}.$$

Продифференцировав уравнение

$$(g_v)^T \cdot G(x,t) = I,$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial x} g_v^T \cdot G(x,t) + g_v^T \frac{\partial G}{\partial x} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -(g_v^T)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} g_v^T \cdot G(x,t) = -G(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} g_v^T \cdot G(x,t).$$

Лемма 8 *Для аффинных задач со смешанными ограничениями при вычислении максимизатора и его производных предложенным алгоритмом, при надлежащем выборе точностей – к решению краевой задачи принципа максимума возможно применение метода продолжения с коррекцией (леммы 4).*

Доказательство аналогично лемме 7.

1А. *Метод поиска корня системы уравнений (34).*

Задача (34)-(35) имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_i g_i(\lambda) = 0, \\ g_i(\lambda) \le 0, \\ \lambda_i \geqslant 0, \\ \lambda \ne 0, \end{cases} \qquad 1 \le i \le d(h), \tag{47}$$

где

$$g_i(\lambda) \equiv \left\langle n_i, c' \left(a - \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j n_j \right) \right\rangle + m_i. \tag{48}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \tilde{g}_i(\lambda) = 0, \\ \lambda_i \geqslant 0, \end{cases} \tag{49}$$

где

$$\tilde{g}_i(\lambda) \equiv \frac{(\lambda_i + \max(g_i(\lambda), 0))\, g_i(\lambda)}{\lambda_i + c_i} \equiv \frac{\lambda_i g_i(\lambda) + \max(g_i(\lambda), 0)^2}{\lambda_i + c_i}, \tag{50}$$

знаменатель с параметром $c_i > 0$ служит для придания компонентам функции хороших свойств монотонности по соответствующим компонентам вектора λ. Перед решением уравнения он устанавливается автоматически, обеспечивая сходимость численного метода.

Покажем, что система (49) эквивалентна системе (47).

$$\begin{cases} (\lambda_i + \max(g_i(\lambda), 0))\, g_i(\lambda) = 0 \\ \lambda_i \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lambda_i + \max(g_i(\lambda), 0) = 0 \\ g_i(\lambda) = 0 \end{array} \right. \\ \lambda_i \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda_i = 0 \\ \max(g_i(\lambda), 0) = 0 \end{cases} \\ g_i(\lambda) = 0 \end{array} \right. \\ \lambda_i \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda_i = 0 \\ g_i(\lambda) \leq 0 \end{cases} \\ g_i(\lambda) = 0 \end{array} \right. \\ \lambda_i \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_i g_i(\lambda) = 0 \\ g_i(\lambda) \leq 0 \\ \lambda_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Решать уравнение $\tilde{g}_i(\lambda) = 0$ можно известными численными методами (например, методом Ньютона), автор предлагает использовать метод продолжения по параметру и для этого уравнения, т.к. он предъявляет не такие жесткие требования к выбору начального приближения. Для использования этих методов необходимо найти производную функции $\tilde{g}_i(\lambda)$

$$\frac{d}{d\lambda_i}\tilde{g}_i(\lambda) \equiv$$

$$\frac{\left(g_i(\lambda) + (\lambda_i + 2\max(g_i(\lambda), 0))\, \frac{dg_i(\lambda)}{d\lambda_i}\right)(\lambda_i + c_i) - (\lambda_i + \max(g_i(\lambda), 0))\, g_i(\lambda)}{(\lambda_i + c_i)^2}$$

$$\equiv \frac{(\lambda_i + 2\max(g_i(\lambda), 0))}{(\lambda_i + c_i)} \frac{dg_i(\lambda)}{d\lambda_i} + \frac{(c_i - \max(g_i(\lambda), 0)) g_i(\lambda)}{(\lambda_i + c_i)^2}$$

$$\frac{d}{d\lambda_j}\tilde{g}_i(\lambda) \equiv \frac{(\lambda_i + 2\max(g_i(\lambda), 0))}{\lambda_i + c_i}\frac{dg_i(\lambda)}{d\lambda_j}, \quad j \neq i;$$

где

$$\frac{dg_i(\lambda)}{d\lambda_j} = -\left\langle n_i, c'' \left(a - \sum_{1 \leq j \leq d(h)} \lambda_j n_j\right) n_j \right\rangle = -N \cdot c'' \cdot N^T.$$

1Б. *Алгоритм проверки принадлежности точки компакту.*

Следующий известный алгоритм принадлежности точки компакту ($\bar{u}^* \in U$) излагается в курсе лекций Ю.Н.Киселева.

Введем функцию

$$V(q) = \frac{1}{2}\|q\|^2 + c(q) - \langle \bar{u}^*, q \rangle. \tag{51}$$

Свойства функции (51):

1. функция $V(q)$ строго выпукла;
2. имеет место предельное соотношение
$$V(q) \to +\infty, \text{ при } \|q\| \to \infty;$$
3. существует единственный минимизатор
$$q_\# \equiv \arg\min_q V(q),$$
решающий задачу минимизации
$$V(q) \to \min_{q \in \mathbb{R}^n};$$
4. минимизатор принадлежит множеству уровня
$$q_\# \in \{q \in \mathbb{R}^n : V(q) \leq 0\},$$
причем
$$V_\# \equiv \min_{q \in \mathbb{R}^n} V(q) = V(q_\#) \leq 0.$$

Лемма 9 *(критерий принадлежности точки $\bar{u}^*$ множеству U)*

$$\bar{u}^* \in U \Leftrightarrow m_0 \geqslant 0,$$

$$\bar{u}^* \notin U \Leftrightarrow m_0 < 0,$$

где

$$m_0 \equiv \min_{\psi : \|\psi\| = 1} (c(\psi) - (\bar{u}^*, \psi)).$$

Необходимо определить, существует ли $q : V(q) < 0$. Так как функция $V(q)$ выпуклая, с помощью какого-либо численного метода построим последовательность $\{q_n\} \to q_\# \equiv \arg\min_q V(q)$. Если на некотором шаге $V(q_n) < 0$, точка $\bar{u}^*$ не принадлежит множеству. Автор предлагает использовать градиентный метод, для которого необходимы производные функции $V(q)$

$$V'(q) = q + c'(q) - \bar{u}^*,$$
$$V''(q) = E + c''(q).$$

10. Заключение

В рамках данной работы автором получены следующие результаты:

1. Предложен эффективный численный метод решения нелинейных уравнений на основе продолжения решения по параметру с коррекцией, доказана теорема о качестве аппроксимации кривой гомотопии в условиях неточного вычисления правых частей и их производных.

2. Метод применен к задаче поиска экстремали Понтрягина в задачах оптимального управления. Решена проблема применения описанного метода к ЗОУ с негладкой областью управления посредством сглаживания с введением параметра сглаживания в общую схему продолжения.

3. Результаты распространены на классы нелинейных по управлению задач и аффинных задач со смешанными ограничениями, предложены алгоритмы вычисления максимизатора, найден аналитический вид производных.

Предложенные алгоритмы были реализованы автором при разработке программного комплекса "Система Optimus" [30], продемонстрировав хорошую эффективность.

Литература

1. Lahaye M.E. Solution of system of transcendental equations // Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 1948. V.5. P. 805-822.

2. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе решения систем нелинейных уравнений // Доклады АН СССР. 1953. Т.88. С. 601-602.

3. Давиденко Д.Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Украинский матем. журнал. 1953. Т.5. N 2. С. 196-206.

4. Шидловская Н.А. Применение метода дифференцирования по параметру к решению нелинейных уравнений в банаховых пространствах // Уч. зап. Львовского гос. ун-та, сер. матем. н., 1958, N 33, С. 3-17.

5. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наукова Думка, 1966.

6. Roberts S., Shipman J. Continuation in shooting methods for two-point boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 1967. V.18, P. 45-58.

7. Шалашилин В.И. Метод продолжения по параметру и его применение к задаче больших прогибов непологой круговой арки // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1979. N 4. С. 178-184.

8. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988.

9. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

10. Аввакумов С.Н. Решение гладкой линейной задачи быстродействия методом продолжения по параметру с обратной связью. // Некотор. вопр. вычисл. мат., мат. физ. и прогр. обеспеч. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 1988. С. 52-54.

11. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н., Орлов М.В. Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова РАН. 1995. Т.211. С. 3-31.

12. Киселев Ю.Н, Орлов М.В. Метод потенциалов в линейной задаче быстродействия // Дифференциальные Уравнения. 1996. Т.32, N 1. С. 44-51.

13. Киселев Ю.Н. Схема продолжения по параметру в нелинейной задаче быстродействия // Вестник Моск. ун-та, Сер. 15. 1990. N 2. С. 51-52.

14. Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N. Boundary value problem for ordinary differential equations with applications to optimal control // Spectral and Evolution Problems. 2000. Vol 10. Proceeding of the Tenth Crimean Autumn mathematical School – Symposium, Simferopol, Ukraine.

15. Allgower E.L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990.

16. Исмаилова И.Г. Приближенные процедуры решения задач управления и оптимизации. М: МАКС Пресс, 2002.

17. Дикусар В.В., Кошька М., Фигура А. Метод продолжения по параметру при решении краевых задач в оптимальном управлении // Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37, N 4. С. 453-457.

18. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

19. Болдырев В.И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. N 1. С. 28-123 (http://www.neva.ru/journal).

20. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

21. Catinas E. The inexact, inexact perturbed and quasi-Newton methods are equivalent models // Mathematics of Computation. 2004. V.74, N 249. P.291-301.

22. Kelley C.T., Sachs E.W. Approximate quasi-Newton method // Mathematical programming. 1990. V.48, N 1. P. 41-70.

23. Martinez J.M. Quasi-inexact-Newton methods with global convergence for solving constrained nonlinear systems. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 30. P. 1-8.

24. Morini B. Convergence behaviour of inexact Newton methods // Mathematics of Computation. 1999. V.68, N 228. P.1605-1613.

25. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.

26. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.

27. Киселев Ю.Н. Оптимальное управление. М.: Изд-во МГУ, 1988.

28. Аввакумов С.Н. Гладкая аппроксимация выпуклых компактов // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. 1996. Т.4. С. 184-200.

29. Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2004.

30. Жулин С.С. Численное решение задач оптимального управления с помощью системы Optimus // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова /под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского, – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ. 2005. Вып. 1, С. 158-165.